НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ПРОИЗВОДНЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ В ПОЛОСЕ ФУНКЦИЙ

К. Ю. ОСИПЕНКО

1. Постановка задачи и основные результаты. В 1939 г. А.Н. Колмогоров [1] поставил и решил следующую задачу: среди всех функций, имеющих абсолютно непрерывные производные до $(r-1)$-го порядка и удовлетворяющих условию

$$\|f\|_\infty \le A_0, \quad \|f^{(r)}\|_\infty \le A_r,$$

где $\|\cdot\|$ — норма в пространстве $L_\infty(\mathbb{R})$, найти

$$\sup \|f^{(k)}\|_\infty, \quad 1 \le k \le r-1.$$

Обзор результатов, касающихся этой задачи, можно найти в [2]. В данной работе рассматривается аналог сформулированной задачи для функций, аналитически продолжаемых в полосу $S_\beta := \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| < \beta\}$.

Обозначим через $H^r_{\infty,\beta}$ класс аналитических в полосе S_β функций, вещественных на вещественной оси и удовлетворяющих условию

$$|f^{(r)}(z)| \le 1, \quad z \in S_\beta$$

(при $r = 0$ соответствующий класс будем обозначать через $H_{\infty,\beta}$). Пусть Λ и Λ' — полные эллиптические интегралы первого рода для модулей $\lambda \in (0,1)$ и $\lambda' = \sqrt{1-\lambda^2}$:

$$\Lambda := \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-\lambda^2 t^2)}}, \quad \Lambda' := \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-\lambda'^2 t^2)}}.$$

Рассмотрим функцию

$$\varphi_\lambda(z) := \sqrt{\lambda}\, \operatorname{sn}\left(\frac{\Lambda'}{2\beta} z, \lambda\right).$$

Из свойств эллиптических функций (см., например, [3]) вытекает, что при всех $x \in \mathbb{R}$ $|\varphi_\lambda(x+i\beta)| = 1$. Тем самым для любого $\lambda \in (0,1)$ $\varphi_\lambda \in H_{\infty,\beta}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 93-01-00237) и международного научного фонда (грант № MP 1000).

Положим $\Phi_{\lambda,0,\beta}(z)=\varphi_\lambda(z)$,

$$\left.\begin{aligned}\Phi_{\lambda,2j-1,\beta}(z)&=\int_{2\Lambda\beta/\Lambda'}^{z}\Phi_{\lambda,2j-2,\beta}(u)\,du,\\ \Phi_{\lambda,2j,\beta}(z)&=\int_0^z\Phi_{\lambda,2j-1,\beta}(u)\,du,\end{aligned}\right.\qquad j=1,2,\dots\,.$$

Свойства функций $\Phi_{\lambda,r,\beta}$ аналогичны свойствам идеальных сплайнов Эйлера (см. [4, с. 104], [5, с. 104]). Пользуясь разложением эллиптического синуса в ряд Фурье [3, с. 266]

$$\operatorname{sn}\left(\frac{\Lambda'}{2\beta}z,\lambda\right)=\frac{\pi}{\lambda\Lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\left((2n+1)\dfrac{\pi\Lambda'}{4\Lambda\beta}z\right)}{\operatorname{sh}\left((2n+1)\dfrac{\pi\Lambda'}{2\Lambda}\right)},$$

находим

$$\begin{aligned}\Phi_{\lambda,r,\beta}(z)=&\frac{\pi}{\sqrt{\lambda}\Lambda}\left(\frac{4\Lambda\beta}{\pi\Lambda'}\right)^r\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\left((2n+1)\dfrac{\pi\Lambda'}{4\Lambda\beta}z-\dfrac{\pi r}{2}\right)}{(2n+1)^r\operatorname{sh}\left((2n+1)\dfrac{\pi\Lambda'}{2\Lambda}\right)},\\ \|\Phi_{\lambda,r,\beta}\|_\infty=&\frac{\pi}{\sqrt{\lambda}\Lambda}\left(\frac{4\Lambda\beta}{\pi\Lambda'}\right)^r\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n(r+1)}}{(2n+1)^r\operatorname{sh}\left((2n+1)\dfrac{\pi\Lambda'}{2\Lambda}\right)}.\end{aligned}\tag{1}$$

Основным результатом данной работы является

Теорема 1. *Пусть $\delta\in(0,\infty)$ при $r\ge 1$ и $\delta\in(0,1)$ при $r=0$. Тогда для любого $1\le k\le r+1$*

$$\begin{aligned}\sup_{\substack{f\in H^r_{\infty,\beta}\\ \|f\|_\infty\le\delta}}\|f^{(k)}\|_\infty&=\|\Phi^{(k)}_{\lambda,r,\beta}\|_\infty\\ &=\frac{\pi}{\sqrt{\lambda}\Lambda}\left(\frac{4\Lambda\beta}{\pi\Lambda'}\right)^{r-k}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n(r-k+1)}}{(2n+1)^{r-k}\operatorname{sh}\left((2n+1)\dfrac{\pi\Lambda'}{2\Lambda}\right)},\end{aligned}\tag{2}$$

где λ удовлетворяет равенству

$$\|\Phi_{\lambda,r,\beta}\|_\infty=\delta.\tag{3}$$

Одной из отличительных черт рассматриваемой экстремальной задачи на классе $H^r_{\infty,\beta}$ является то, что мы можем ставить задачу об оценке нормы не только промежуточной производной (как в гладком случае), но и производной любого порядка. Оказывается, что уже при $k=r+2$ равенство (2) справедливо лишь при малых δ. Остановимся более подробно на этом случае.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{1-5\lambda^2}{2}\left(\frac{\Lambda'}{\pi}\right)^2 = 1. \tag{4}$$

Из монотонного убывания Λ' при $\lambda \in (0,1)$ следует, что это уравнение имеет единственное решение $\lambda_0 \in (0,1)$ (вычисления показывают, что $\lambda_0 = 0{,}0460\ldots$). Положим

$$\delta_r := \|\Phi_{\lambda_0,r,1}\|_\infty.$$

Теорема 2. *Пусть* $r \geq 0$, *а* $\delta \in (0, \delta_r\beta^r]$. *Тогда*

$$\sup_{\substack{f \in H^r_{\infty,\beta}\\ \|f\|_\infty \leq \delta}} \|f^{(r+2)}\|_\infty = \|\Phi''_{\lambda,0,\beta}\|_\infty = \left(\frac{\Lambda'}{2\beta}\right)^2 \sqrt{\lambda}(1-\lambda^2),$$

где λ *удовлетворяет равенству* (3).

Приведем значения δ_r для $r = 0, 1$. В силу того, что

$$\|\Phi_{\lambda,0,\beta}\|_\infty = \sqrt{\lambda}, \tag{5}$$

имеем

$$\delta_0 = \sqrt{\lambda_0} = 0{,}2145\ldots .$$

Для $r = 1$ находим

$$\begin{aligned}\|\Phi_{\lambda,1,1}\|_\infty &= \int_0^{2\Lambda/\Lambda'} \sqrt{\lambda}\,\mathrm{sn}\left(\frac{\Lambda'}{2}z, \lambda\right) dz \\ &= \frac{2\sqrt{\lambda}}{\Lambda'} \int_0^{\Lambda} \mathrm{sn}(t,\lambda)\,dt = \frac{1}{\sqrt{\lambda}\Lambda'} \ln\frac{1+\lambda}{1-\lambda}.\end{aligned}$$

Учитывая равенство (4), получаем

$$\delta_1 = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1-5\lambda_0^2}{2\lambda_0}\right)^{1/2} \ln\frac{1+\lambda_0}{1-\lambda_0} = 0{,}0961\ldots .$$

2. Доказательства основных результатов. В доказательстве теоремы 1 будем использовать индуктивную схему, применяемую в теореме сравнения Колмогорова (см., например, [4, с. 115]). Однако, в отличие от гладкого случая здесь наиболее трудным является первый шаг индукции. Докажем сначала ряд предварительных результатов.

Обозначим через $H^{\mathbb{R}}_\infty$ множество аналитических в единичном круге $D := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ функций, вещественных на вещественной оси, для которых $|f(z)| < 1$, $z \in D$. Положим для заданного $\lambda \in (0,1)$

$$\beta_n := \mathrm{th}\left(n\frac{\pi\Lambda}{\Lambda'}\right), \quad n = 1, 2, \ldots, \quad B_1(z) := z\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\beta_n^2 - z^2}{1-\beta_n^2 z^2}.$$

Предложение 1. *Пусть* $f \in H_\infty^{\mathbb{R}}$ *и при некотором* $\lambda \in (0,1)$

$$\|f\|_{C(-1,1)} \le \|B_1\|_{C(-1,1)}, \tag{6}$$

где $\|x\|_{C(-1,1)} := \sup_{t\in(-1,1)} |x(t)|$. *Если* $\xi \in (-1,1)$ *и* $f(\xi) = B_1(\xi)$, *то*

$$|f'(\xi)| \le |B_1'(\xi)|.$$

Доказательство. Положим

$$\begin{aligned}\alpha_n &:= \operatorname{th}\left((2n-1)\frac{\pi\Lambda}{2\Lambda'}\right), \quad n = 1, 2, \dots,\\ B_2(z) &:= \prod_{n=1}^\infty \frac{\alpha_n^2 - z^2}{1-\alpha_n^2 z^2},\\ h(z) &:= \prod_{n=1}^\infty \left(\frac{1-\beta_n^2 z^2}{1-\alpha_n^2 z^2}\right)^2.\end{aligned}$$

В работе [6] было показано, что имеют место равенства

$$\begin{aligned}B_1(z) =& \sqrt{\lambda}\operatorname{sn}\left(\frac{2\Lambda'}{\pi}\operatorname{arth} z, \lambda\right),\\ B_2(z) =& \sqrt{\lambda}\operatorname{sn}\left(\frac{2\Lambda'}{\pi}\operatorname{arth} z + \Lambda, \lambda\right),\\ h(z) =& (1-z^2)\operatorname{dn}^{-2}\left(\frac{2\Lambda'}{\pi}\operatorname{arth} z, \lambda\right).\end{aligned} \tag{7}$$

В силу равенств

$$\|B_1\|_{C(-1,1)} = \sqrt{\lambda}, \quad B_1(\pm\alpha_n) = \pm(-1)^{n+1}\sqrt{\lambda}. \tag{8}$$

утверждение предложения очевидно для $\xi = \pm\alpha_n$, $n = 1, 2, \dots$. Для $f \in H_\infty^{\mathbb{R}}$ и $\xi \ne \pm\alpha_n$, $n = 1, 2, \dots$, положим

$$Jf := \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \frac{h(z) f(z)\,dz}{B_2(z)(z-\xi)^2(1-\xi z)^2}.$$

Из леммы 1 работы [7] (см. также [6]) получаем

$$Jf = \left[\frac{h(z)f(z)}{B_2(z)(1-\xi z)^2}\right]'_{|z=\xi} + \sum_{n=1}^\infty \frac{h(\alpha_n)}{B_2'(\alpha_n)}\left[\frac{f(\alpha_n)}{(\alpha_n-\xi)^2(1-\xi\alpha_n)^2} - \frac{f(-\alpha_n)}{(\alpha_n+\xi)^2(1+\xi\alpha_n)^2}\right].$$

В силу (7)

$$h(\alpha_n) = \frac{1-\alpha_n^2}{1-\lambda^2}, \quad B_2'(\alpha_n) = (-1)^n\sqrt{\lambda}\frac{2\Lambda'}{\pi(1-\alpha_n^2)}.$$

Тем самым имеем

$$(9)\quad f'(\xi) = -C(\xi)\left[\frac{h(z)}{B_2(z)(1-\xi z)^2}\right]'_{\big| z=\xi} f(\xi) + \frac{\pi C(\xi)}{2\sqrt{\lambda}\Lambda'(1-\lambda^2)}$$

$$\times \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(1-\alpha_n^2)^2\left[\frac{f(\alpha_n)}{(\alpha_n-\xi)^2(1-\xi\alpha_n)^2} - \frac{f(-\alpha_n)}{(\alpha_n+\xi)^2(1+\xi\alpha_n)^2}\right]$$

$$+ C(\xi)Jf,$$

где

$$C(\xi) := \frac{B_2(\xi)(1-\xi^2)^2}{h(\xi)}.$$

Положив

$$\psi(z) := \frac{B_1(z)h(z)}{zB_2(z)}, \quad \psi_1(z) := \frac{z^2}{(z-\xi)^2(1-\xi z)^2}$$

и учитывая, что $|B_1(e^{i\theta})| = 1$ почти всюду, будем иметь

$$Jf = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{B_1(e^{i\theta})}\psi(e^{i\theta})\psi_1(e^{i\theta})f(e^{i\theta})\, d\theta.$$

В лемме 2 работы [6] доказано, что функция $\psi(e^{i\theta})$ ограничена и почти всюду положительна. Очевидно этим же свойством обладает функция $\psi(e^{i\theta})$. Таким образом, для всех $f \in H_\infty^{\mathbb{R}}$

$$(10)\qquad |Jf| \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi(e^{i\theta})\psi_1(e^{i\theta})\, d\theta = JB_1.$$

Предположим, что $C(\xi) > 0$. Тогда в силу (8), (9) и (10) имеем

$$(11)\quad f'(\xi) \le -C(\xi)\left[\frac{h(z)}{B_2(z)(1-\xi z)^2}\right]'_{\big| z=\xi} f(\xi) + \frac{\pi C(\xi)}{2\Lambda'(1-\lambda^2)}$$

$$\times \sum_{n=1}^{\infty}(1-\alpha_n^2)^2\left[\frac{1}{(\alpha_n-\xi)^2(1-\xi\alpha_n)^2} + \frac{1}{(\alpha_n+\xi)^2(1+\xi\alpha_n)^2}\right]$$

$$+ C(\xi)JB_1.$$

Если $f(\xi) = B_1(\xi)$, то правая часть последнего неравенстве совпадает с $B_1'(\xi)$ (см. (9)). Таким образом,

$$(12)\qquad f'(\xi) \le B_1'(\xi).$$

Положим

$$g(z) := f\left(\frac{\alpha - z}{1-\alpha z}\right), \quad \alpha := \frac{2\xi}{1+\xi^2}.$$

Очевидно, что $g \in H_\infty^{\mathbb{R}}$ и удовлетворяет условию (6). Кроме того, $g(\xi) = f(\xi)$ и $g'(\xi) = -f'(\xi)$. Поэтому, применяя неравенство (12) к функции g, получаем

$$-f'(\xi) \le B_1'(\xi).$$

Случай $C(\xi) < 0$ рассматривается аналогично, заменяя неравенство (11) на противоположное. Предложение доказано. $\square$

Предложение 2. *Пусть* $f \in H_{\infty,\beta}$ *и при некотором* $\lambda \in (0,1)$

$$\|f\|_\infty \le \|\varphi_\lambda\|_\infty.$$

Если $a, b \in \mathbb{R}$ *и* $f(a) = \varphi_\lambda(b)$, *то*

$$|f'(a)| \le |\varphi'_\lambda(b)|.$$

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $a = b$. Положим $w(z) := \dfrac{4\beta}{\pi} \operatorname{arth} z$. Эта функция конформно отображает единичный круг D на полосу S_β. Тем самым $f(w(z)) \in H_\infty^{\mathbb{R}}$. Так как $\varphi_\lambda(w(z)) = B_1(z)$ (см. (7)), то положив $\xi = \operatorname{th} \dfrac{\pi a}{4\beta}$, из предложения 1 получаем

$$|f'(w(\xi))w'(\xi)| \le |\varphi'_\lambda(w(\xi))w'(\xi)|.$$

Отсюда следует, что $|f'(a)| \le |\varphi'_\lambda(a)|$. Предложение доказано. $\square$

Из предложения 2, применяя индуктивную схему доказательства теоремы сравнения Колмогорова, получаем следующий результат.

Теорема 3. *Пусть* $f \in H^r_{\infty,\beta}$, $r \ge 0$ *и при некотором* $\lambda \in (0,1)$

$$\|f\|_\infty \le \|\Phi_{\lambda,r,\beta}\|_\infty. \tag{13}$$

Если $a, b \in \mathbb{R}$ *и* $f(a) = \Phi_{\lambda,r,\beta}(b)$, *то*

$$|f'(a)| \le |\Phi'_{\lambda,r,\beta}(b)|.$$

В силу определения

$$\Phi^{(k)}_{\lambda,r,\beta}(z) = \Phi_{\lambda,r-k,\beta}(z), \quad k = 1, \dots, r.$$

Таким образом, из теоремы 3 вытекает

Следствие 1. *Пусть* $f \in H^r_{\infty,\beta}$, $r \ge 0$, *и при некотором* $\lambda \in (0,1)$ *выполнено неравенство* (13). *Тогда при всех* $1 \le k \le r+1$

$$\|f^{(k)}\|_\infty \le \|\Phi^{(k)}_{\lambda,r,\beta}\|_\infty.$$

Доказательство теоремы 1. Положим $\Phi_{\lambda,-1,\beta}(z) := \Phi'_{\lambda,0,\beta}(z)$. Нетрудно убедиться, что равенства (1) имеют место и для $r = -1$. Тем самым, используя следствие 1, достаточно доказать существование $\lambda \in (0,1)$, удовлетворяющего равенству (3). При $r = 0$ из (5) вытекает, что $\lambda = \delta^2$. Пусть $r \ge 1$. Из (1) следует, что $\|\Phi_{\lambda,r,\beta}\|_\infty$ непрерывно зависит от λ. При $\lambda \to 0$ $\Lambda' \to \infty$, $\Lambda \to \pi/2$ и, кроме того,

$$\lim_{\lambda \to 0} \sqrt{\lambda} \exp\left(\frac{\pi\Lambda'}{4\Lambda}\right) = \frac{1}{2}$$

(см. [3, с. 116]). Отсюда получаем, что для всех $n \geq 0$

$$\sqrt{\lambda}\,\mathrm{sh}\left((2n+1)\frac{\pi\Lambda'}{2\Lambda}\right) \to \infty.$$

Тем самым $\|\Phi_{\lambda,r,\beta}\|_\infty \to 0$ при $\lambda \to 0$. Если $\lambda \to 1$, то $\Lambda' \to \pi/2$, а $\Lambda \to \infty$. В этом случае из (1) следует, что $\|\Phi_{\lambda,r,\beta}\|_\infty \to \infty$. Теорема доказана. □

Доказательство теоремы 2. В работе [7] при $0 < \lambda \leq \lambda_0$ доказано равенство

$$\sup_{\substack{f \in H_{\infty,\beta} \\ \|f\|_\infty \leq \sqrt{\lambda}}} \|f''\|_\infty = \|\Phi''_{\lambda,0,\beta}\|_\infty = \left(\frac{\Lambda'}{2\beta}\right)^2 \sqrt{\lambda}(1-\lambda^2). \tag{14}$$

(там же найдено решение этой задачи при $\lambda_0 < \lambda < 1$, которое мы не приводим из-за его сложного вида). Из (1) следует, что

$$\|\Phi_{\lambda_0,r,\beta}\|_\infty = \delta_r \beta^r.$$

Аналогично доказательству теоремы 1 можно показать, что при $\delta \in (0, \delta_r\beta^r]$ существует $\lambda \in (0, \lambda_0]$, удовлетворяющее равенству (3). Теперь утверждение теоремы вытекает из теоремы 1 и равенства (14). Теорема доказана. □

3. Связь с задачами восстановления. Изучаемая экстремальная задача тесно связана с задачами оптимального восстановления производных функции по неточно заданной информации о самой функции. Обозначим через $C^b(\mathbb{R})$ множество непрерывных ограниченных функций на $\mathbb{R}$ и рассмотрим задачу о нахождении величины

$$e_k(H^r_{\infty,\beta}, \delta) := \inf_{A\colon C^b(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}} \sup_{f \in H^r_{\infty,\beta}} \sup_{\substack{y \in C^b(\mathbb{R}) \\ \|f-y\|_\infty \leq \delta}} |f^{(k)}(0) - Ay|.$$

Эта величина есть погрешность оптимального восстановления значения $f^{(k)}(0)$ по следу $f_{|\mathbb{R}}$, известному с погрешностью δ в равномерной норме. Из общих утверждений, касающихся задач восстановления (см. [8], [9]), и инвариантности относительно сдвига имеем

$$e_k(H^r_{\infty,\beta}, \delta) = \sup_{\substack{f \in H^r_{\infty,\beta} \\ \|f\|_\infty \leq \delta}} |f^{(k)}(0)| = \sup_{\substack{f \in H^r_{\infty,\beta} \\ \|f\|_\infty \leq \delta}} \|f^{(k)}\|_\infty.$$

Рассмотрим еще одну экстремальную задачу, в общем случае поставленную С. Б. Стечкиным [10]. Требуется найти величину

$$E_k(H^r_{\infty,\beta}, N) := \inf_{\substack{A \in C^b(\mathbb{R})^* \\ \|A\| \leq N}} \sup_{f \in H^r_{\infty,\beta}} |f^{(k)}(0) - Af_{|\mathbb{R}}|.$$

Из результатов В. Н. Габушина [11] (см. также [8]) следует, что имеет место равенство

$$E_k(H^r_{\infty,\beta}, N) = \sup_{\delta\geq 0}\left(e_k(H^r_{\infty,\beta}, \delta) - N\delta\right).$$

Московский государственный
авиационный технологический
университет им. К.Э.Циолковского

Поступило
18.11.93

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Колмогоров А. Н. О неравенствах между верхними гранями последовательных производных произвольной функции на бесконечном интервале // Уч. зап. МГУ. 1939. №30. С. 3–16.

[2] Тихомиров В. М., Магарил-Ильяев Г.Г. Неравенства для производных // Колмогоров А.Н. Избр. труды. Математика, механика. М.: Наука, 1985. С. 387–390.

[3] Ахиезер Н. И. Элементы теории эллиптических функций. М.: Наука, 1970.

[4] Корнейчук Н. П. Экстремальные задачи теории приближения. М.: Наука, 1976.

[5] Корнейчук Н. П. Точные константы в теории приближения. М.: Наука, 1987.

[6] Осипенко К. Ю., Стесин М. И. Оптимальное восстановление производных ограниченных аналитических и гармонических функций по неточным данным // Матем. заметки. 1993. Т. 53, №5. С. 87–97.

[7] Осипенко К. Ю. Об n-поперечниках, оптимальных квадратурных формулах и оптимальном восстановлении функций, аналитических в полосе // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58, №4. С. 55–79.

[8] Арестов В. В. Наилучшее восстановление операторов и родственные задачи // Тр. МИАН. 1989. Т. 189. С. 3–20.

[9] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Об оптимальном восстановлении функционалов по неточным данным // Матем. заметки. 1991. Т. 50. №6. С. 85–93.

[10] Стечкин С. Б. Наилучшее приближение линейных операторов // Матем. заметки. 1967. Т.1, №2. С. 137–148.

[11] Габушин В. Н. Наилучшее приближение функционалов на некоторых множествах // Матем. заметки. 1970. Т.8, №5. С. 551–562.