

Г. Г. МАГАРИЛ-ИЛЬЯЕВ, К. Ю. ОСИПЕНКО, В. М. ТИХОМИРОВ

НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ ЗНАНИЯ ОБ ОБЪЕКТЕ И ТОЧНОСТЬ МЕТОДОВ ЕГО ВОССТАНОВЛЕНИЯ

Обсуждается один подход к задаче оптимального восстановления функционалов и операторов на классах функций в условиях неопределенности знания о самих функциях. Возможности данного подхода демонстрируются на ряде примеров. В конце статьи приводится один общий результат об оптимальном восстановлении линейных функционалов.

1. ВВЕДЕНИЕ

Многие стороны практической деятельности человека связаны с тем, что ему приходится судить об изучаемых объектах по неполной и/или неточной информации о них. По такой информации точно восстановить объект, как правило, невозможно: возникает некоторая *неопределенность* обычно в виде некоторой области, где объект может находиться. Иногда при уточнении исходной информации можно все ближе и ближе приближаться к цели (в этом случае можно считать, что объект "познаваем"), но "цена" этой познаваемости нередко оказывается непомерно большой.

Долгое время считалось, что "Мир познаваем но сейчас как-то на этом не настаивают, ибо были обнаружены принципиальные границы познаваемости (в математической логике, в квантовой механике и т.п.). С другой стороны, если имеется какая-то информация, то возникает желание максимально сузить границы неопределенности изучаемого объекта, максимально полно используя эту информацию. Для этого применяется те или иные *методы восстановления* объекта по той информации, которая находится в нашем распоряжении. Если метод восстановления очерчивает границы для объекта, совпадающие с мерой его неопределенности при данной информации, можно говорить об оптимальности данного метода восстановления.

Андрея Николаевича Колмогорова на протяжении всей его творческой жизни занимали подобные вопросы, и он так или иначе

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 00-15-96109, 02-01-39012 и 02-01-00386), программы "Университеты России" (УР.04.03.013), а также при поддержке U.S. CRDF – R.F. Ministry of Education Award VZ-010-0.

сталкивался с ними в своей научной деятельности (в теории вероятностей, в теории информации, в теории стрельбы и многих других вопросах). Ряд введенных им величин (скажем, ε -емкость и ε -энтропия) являются характеристиками мер неопределенности, а его результаты по экстраполяции случайных процессов привели к соответствующим оптимальным методам восстановления.

В данной работе для достаточно широкого класса задач (вполне естественных с точки зрения приложений) вводится понятие оптимальности метода восстановления по различного рода информации. Этот подход демонстрируется на ряде примеров, носящих иллюстративный характер и призванных показать разнообразие задач, охватываемых предлагаемой постановкой.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ

Общая постановка проблем неопределенности и восстановления, обсуждаемых здесь, заключается в определении значений заданного функционала или оператора на некоторых функциях. Об этих функциях мы располагаем двумя типами информации. Один из них — “глобальный” характеризует класс функций, которые только и могут встретиться; другой — “локальный” (индивидуальный), связанной с характеристикой отдельной функции. Классы обычно связывают со свойствами гладкости или аналитичности входящих в них функций. Локальная информация обычно состоит в том, что исследователю оказываются доступными некоторые характеристики функции (например, ее значения в отдельных точках, моменты, коэффициенты Фурье или Тейлора, преобразование Фурье и т. п.). Эта информация может задаваться точно или с ошибками. По этим двум типам информации и производится оценка неопределенности значения функционала или оператора и строится метод его восстановления. Переходим к точным формулировкам.

Пусть задано множество (класс) C и отображение $f: C \rightarrow Z$, где (Z, d) — метрическое пространство. Принадлежность элемента классу C составляет “глобальную” информацию о нем. Кроме того, о самом элементе имеется “локальная” (индивидуальная) информация, состоящая в том, что известно отображение (вообще говоря, многозначное, что соответствует информации, заданной неточно) $F: C \rightarrow Y$, где Y — некоторое множество. Отображение F назовем *информационным оператором*.

Задача состоит в том, чтобы *восстановить по возможности наилучшим способом значение $f(x)$, $x \in C$, по информации $y \in F(x)$.*

Примерами могут служить задачи о восстановлении значения функции в некоторой точке по ее значениям в других точках или по ее коэффициентам Фурье, или задача о восстановлении интеграла

от функции, или ее производной в отдельной точке, или восстановления самой функции по той же или какой-то иной информации.

Поясним смысл, которые мы вкладываем в слова “восстановить по возможности наилучшим способом”.

Любое отображение $m: F(C) \rightarrow Z$ назовем *методом восстановления*. Погрешностью такого метода назовем величину

$$e(f, C, F, m) = \sup_{x \in C, y \in F(x)} d(f(x), m(y)),$$

а *погрешность оптимального восстановления* (f на C по F), которую обозначим $E(f, C, F)$, определим как значение следующей экстремальной задачи:

$$\inf e(f, C, F, m), \tag{1}$$

где нижняя грань берется по всевозможным отображениям

$$m: F(C) \rightarrow Z.$$

Метод \hat{m} , на котором достигается нижняя грань в (1), называется *оптимальным методом восстановления*. Может оказаться, что имеется возможность использовать различные типы информации, т. е. мы располагаем семейством информационных отображений \mathcal{F} , и тогда под задачей о выборе оптимальной информации понимается задача о нахождении величины

$$E(f, C, \mathcal{F}) = \inf_{F \in \mathcal{F}} E(f, C, F).$$

Впервые постановка задачи оптимального восстановления появилась в работе Смоляка [1] для случая, когда C — выпуклое и уравновешенное (т.е. $C = \alpha C$ для всех α таких, что $|\alpha| = 1$) подмножество векторного пространства X , Y — конечномерное векторное пространство, f — линейный функционал на X и $F: X \rightarrow Y$ — линейное отображение. Смоляк доказал, что в этом случае среди оптимальных методов есть линейный. Впоследствии проблематика, связанная с оптимальным восстановлением развивалась достаточно интенсивно (см. [2]–[7]). Результаты, относящиеся к кругу вопросов, рассматриваемых в данной работе, можно найти в [8]–[10], где, в частности, содержатся различные обобщения большинства из тех примеров, которые обсуждаются ниже.

3. ПРИМЕРЫ

1. Восстановление значения функции в точке по ее значениям в других точках. Обозначим через $W_\infty^1([-1, 1])$ класс вещественных функций $x(\cdot)$, определенных на отрезке $[-1, 1]$, абсолютно непрерывных и удовлетворяющую условию

$$|x'(t)| \leq 1, \quad \text{для почти всех } t \in [-1, 1].$$

Пусть $-1 \leq t_1 < \dots < t_n \leq 1$. Рассмотрим задачу оптимального восстановления значения функции $x(\cdot) \in W_\infty^1([-1, 1])$ в точке $\tau \in [-1, 1]$ по ее значениям в наборе точек $\bar{t} = (t_1, \dots, t_n)$. В соответствии с общей постановкой здесь $C = W_\infty^1([-1, 1])$, $Z = \mathbb{R}$, $f(x(\cdot)) = x(\tau)$, $Y = \mathbb{R}^n$ и $F_{\bar{t}}: C \rightarrow Y$, $F_{\bar{t}}x(\cdot) = (x(t_1), \dots, x(t_n))$.

В качестве методов восстановления рассматриваются всевозможные функции $m: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Погрешность данного метода m есть величина

$$e(x(\tau), W_\infty^1([-1, 1]), F_{\bar{t}}, m) = \sup_{x(\cdot) \in W_\infty^1([-1, 1])} |x(\tau) - m(F_{\bar{t}}x(\cdot))|,$$

а погрешность оптимального восстановления — величина

$$E(x(\tau), W_\infty^1([-1, 1]), F_{\bar{t}}) = \inf_{m: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}} E(x(\tau), W_\infty^1([-1, 1]), F_{\bar{t}}, m).$$

Найдем эту величину, а также оптимальный метод восстановления.

Обозначим через $\alpha(t)$ — ближайшую к t точку из множества $\{t_1, \dots, t_n\}$ (в случае, если t лежит посередине между t_i и t_{i+1} , будем считать для определенности $\alpha(t) = t_i$). Положим

$$\hat{x}(t) = |t - \alpha(t)|.$$

Очевидно, что $\hat{x}(\cdot) \in W_\infty^1([-1, 1])$, $-\hat{x}(\cdot) \in W_\infty^1([-1, 1])$ и $F_{\bar{t}}\hat{x}(\cdot) = F_{\bar{t}}(-\hat{x}(\cdot)) = 0$. Для любого метода m имеем

$$2\hat{x}(\tau) \leq |\hat{x}(\tau) - m(0)| + |-\hat{x}(\tau) - m(0)| \leq 2e(x(\tau), W_\infty^1([-1, 1]), F_{\bar{t}}, m).$$

Откуда

$$E(x(\tau), W_\infty^1([-1, 1]), F_{\bar{t}}) \geq \hat{x}(\tau).$$

Пусть $\alpha(\tau) = t_k$ $1 \leq k \leq n$. Определим метод \hat{m} равенством $\hat{m}(y) = y_k$, $y = (y_1, \dots, y_n)$. Тогда для любой функции $x(\cdot) \in W_\infty^1([-1, 1])$ имеем

$$|x(\tau) - \hat{m}(F_{\bar{t}}x(\cdot))| = |x(\tau) - x(t_k)| \leq |\tau - t_k| = \hat{x}(\tau).$$

Следовательно,

$$E(x(\tau), W_\infty^1([-1, 1]), F_{\bar{t}}) = \hat{x}(\tau),$$

а метод

$$x(\tau) \approx x(\alpha(\tau))$$

является оптимальным методом восстановления.

2. Восстановление интеграла от функции по ее значениям в отдельных точках. Для того же класса $W_\infty^1([-1, 1])$ и того же информационного оператора $F_{\bar{t}}$ рассмотрим теперь задачу оптимального восстановления значения интеграла

$$Ix(\cdot) = \int_{-1}^1 x(t) dt.$$

В качестве методов восстановления будем по-прежнему рассматривать всевозможные функции $m: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Здесь задача оптимального восстановления состоит в нахождении величины

$$E(I, W_\infty^1([-1, 1]), F_{\bar{t}}) = \inf_{m: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}} \sup_{x(\cdot) \in W_\infty^1([-1, 1])} \left| \int_{-1}^1 x(t) dt - m(F_{\bar{t}}x(\cdot)) \right|$$

и оптимального метода восстановления \hat{m}_0 , на котором достигается нижняя грань в этом равенстве.

Сохраняя обозначения для функции $\hat{x}(\cdot)$ из предыдущего примера, получаем, что для любого метода m

$$\begin{aligned} 2 \int_{-1}^1 \hat{x}(t) dt &\leq \left| \int_{-1}^1 \hat{x}(t) dt - m(0) \right| + \left| \int_{-1}^1 (-\hat{x}(t)) dt - m(0) \right| \\ &\leq 2 \sup_{x(\cdot) \in W_\infty^1([-1, 1])} \left| \int_{-1}^1 x(t) dt - m(F_{\bar{t}}x(\cdot)) \right|. \end{aligned}$$

Тем самым

$$E(I, W_\infty^1([-1, 1]), F_{\bar{t}}) \geq \int_{-1}^1 \hat{x}(t) dt.$$

С другой стороны, положив

$$\hat{m}_0(y) = \int_{-1}^1 y(t) dt,$$

где

$$y(t) = \begin{cases} y_1, & -1 \leq t \leq \frac{t_1 + t_2}{2}, \\ y_i, & \frac{t_{i-1} + t_i}{2} < t \leq \frac{t_i + t_{i+1}}{2}, \quad 2 \leq i \leq n-1, \\ y_n, & \frac{t_{n-1} + t_n}{2} < t \leq 1, \end{cases}$$

при всех $\hat{x}(\cdot) \in W_\infty^1([-1, 1])$ будем иметь

$$\begin{aligned} \left| \int_{-1}^1 x(t) dt - \hat{m}_0(F_{\bar{t}}x(\cdot)) \right| &= \left| \int_{-1}^1 (x(t) - x(\alpha(t))) dt \right| \\ &\leq \int_{-1}^1 |t - \alpha(t)| dt = \int_{-1}^1 \hat{x}(t) dt. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} E(I, W_\infty^1([-1, 1]), F_{\bar{t}}) &= \int_{-1}^1 \hat{x}(t) dt \\ &= \frac{(t_1 + 1)^2}{2} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(t_{j+1} - t_j)^2}{4} + \frac{(1 - t_n)^2}{2}, \end{aligned}$$

а

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 x(t) dt &\approx \widehat{m}_0(F_{\bar{t}}x(\cdot)) \\ &= \left(\frac{t_1 + t_2}{2} + 1\right) x(t_1) + \sum_{j=2}^{n-1} \frac{t_{j+1} - t_{j-1}}{2} x(t_j) + \left(1 - \frac{t_{n-1} + t_n}{2}\right) x(t_n) \end{aligned}$$

— оптимальный метод восстановления.

Если в наших возможностях выбирать систему точек $\bar{t} = (t_1, \dots, t_n)$, в которых будут измеряться значения функций $x(\cdot) \in W_\infty^1([-1, 1])$ (иначе говоря, есть возможность выбора исходной информации), то естественно выбрать эти точки так, чтобы величина $E(I, W_\infty^1([-1, 1]), F_{\bar{t}})$ была по возможности меньше. Нетрудно убедиться, что

$$\inf_{\bar{t}} E(I, W_\infty^1([-1, 1]), F_{\bar{t}}) = \frac{1}{n},$$

а оптимальные точки (т. е. точки, на которых достигается нижняя грань) таковы

$$\widehat{t}_j = -1 + \frac{2j-1}{n}, \quad j = 1, \dots, n.$$

В рассмотренных выше примерах информация о функции хотя и была неполной, но задавалась точно. Реально, любая исходная информация содержит ту или иную погрешность. Дальнейшие примеры посвящены случаям, когда информация о функциях задается с некоторой ошибкой.

3. Восстановление производной функции в точке по приближенным значениям в других точках. Обозначим через $W_\infty^2([-1, 1])$ множество функций $x(\cdot)$, определенных на отрезке $[-1, 1]$, для которых $x'(\cdot) \in W_\infty^1([-1, 1])$. Пусть для функции $x(\cdot) \in W_\infty^2([-1, 1])$ известны приближенные значения $x(-h)$ и $x(h)$, $0 < h \leq 1$. Требуется восстановить оптимальным образом значение $x'(0)$. Будем считать, что для каждой функции $x(\cdot) \in W_\infty^2([-1, 1])$ нам известны значения \tilde{x}_{-1} и \tilde{x}_1 такие, что

$$|x(jh) - \tilde{x}_j| \leq \delta, \quad j = -1, 1, \quad (2)$$

где $\delta > 0$ — погрешность исходной информации. Здесь информационный оператор уже многозначное отображение $F_{h,\delta}$, ставящее в соответствие каждой функции $x(\cdot) \in W_\infty^2([-1, 1])$ множество

$F_{h,\delta}x(\cdot) = \{(\tilde{x}_{-1}, \tilde{x}_1)\}$, где \tilde{x}_{-1} и \tilde{x}_1 удовлетворяют условию (2). Рассмотрим в качестве методов восстановления произвольные функции $m: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Погрешностью данного метода m назовем величину

$$\begin{aligned} e(x'(0), W_\infty^2([-1, 1]), F_{h,\delta}, m) \\ = \sup_{x(\cdot) \in W_\infty^2([-1, 1])} \sup_{\substack{\tilde{x}_{-1}, \tilde{x}_1 \\ |x(jh) - \tilde{x}_j| \leq \delta, j=-1, 1}} |x'(0) - m(\tilde{x}_{-1}, \tilde{x}_1)|. \end{aligned}$$

Нас будет интересовать погрешность оптимального восстановления

$$E(x'(0), W_\infty^2([-1, 1]), F_{h,\delta}) = \inf_{m: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}} e(x'(0), W_\infty^2([-1, 1]), F_{h,\delta}, m)$$

и оптимальный метод восстановления, т.е. метод, на котором эта нижняя грань достигается.

Положим

$$\hat{x}(t) = \begin{cases} -\frac{t^2}{2} + \left(\frac{h}{2} + \frac{\delta}{h}\right)t, & 0 \leq t \leq 1, \\ \frac{t^2}{2} + \left(\frac{h}{2} + \frac{\delta}{h}\right)t, & -1 \leq t < 0. \end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что $\pm \hat{x}(\cdot) \in W_\infty^2([-1, 1])$ и $\hat{x}(-h) = -\delta$, $\hat{x}(h) = \delta$. Для любого метода m имеем

$$\begin{aligned} 2\hat{x}'(0) &\leq |\hat{x}'(0) - m(0, 0)| + |-\hat{x}'(0) - m(0, 0)| \\ &\leq 2e(x'(0), W_\infty^2([-1, 1]), F_{h,\delta}, m). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$E(x'(0), W_\infty^2([-1, 1]), F_{h,\delta}) \geq \hat{x}'(0) = \frac{h}{2} + \frac{\delta}{h}. \quad (3)$$

Рассмотрим метод

$$\hat{m}(\tilde{x}_{-1}, \tilde{x}_1) = \frac{\tilde{x}_1 - \tilde{x}_{-1}}{2h}. \quad (4)$$

Учитывая, что $\tilde{x}_j = x(jh) + \delta_j$, где $|\delta_j| \leq \delta$, $j = -1, 1$, будем иметь

$$\begin{aligned} e(x'(0), W_\infty^2([-1, 1]), F_{h,\delta}, \hat{m}) \\ = \sup_{x(\cdot) \in W_\infty^2} \sup_{|\delta_j| \leq \delta, j=-1, 1} \left| x'(0) - \frac{x(h) - x(-h)}{2h} - \frac{\delta_1 - \delta_{-1}}{2h} \right| \\ \leq \sup_{x(\cdot) \in W_\infty^2([-1, 1])} \left| x'(0) - \frac{x(h) - x(-h)}{2h} \right| + \frac{\delta}{h}. \end{aligned}$$

Пользуясь равенствами

$$\begin{aligned}x(h) &= x(0) + x'(0)h + M_1 \frac{h^2}{2}, \\x(-h) &= x(0) - x'(0)h + M_{-1} \frac{h^2}{2},\end{aligned}$$

где $M_1, M_{-1} \in [-1, 1]$, получаем

$$\left| x'(0) - \frac{x(h) - x(-h)}{2h} \right| = \frac{h}{4} |M_1 - M_{-1}| \leq \frac{h}{2}.$$

Тем самым

$$e(x'(0), W_\infty^2([-1, 1]), F_{h,\delta}, \widehat{m}) \leq \frac{h}{2} + \frac{\delta}{h}.$$

Учитывая (3), находим, что

$$E(x'(0), W_\infty^2([-1, 1]), F_{h,\delta}) = \frac{h}{2} + \frac{\delta}{h},$$

а метод (4) является оптимальным.

Можно поставить вопрос об оптимизации исходной информации за счет выбора шага h . Несложные вычисления показывают, что

$$\min_{0 < h \leq 1} E(x'(0), W_\infty^2([-1, 1]), F_{h,\delta}) = \begin{cases} \sqrt{2\delta}, & \delta < 1/2, \\ \delta + 1/2, & \delta \geq 1/2, \end{cases}$$

при этом значение шага, на котором достигается минимум таково:

$$\widehat{h} = \begin{cases} \sqrt{2\delta}, & \delta < 1/2, \\ 1 & \delta \geq 1/2. \end{cases}$$

4. Восстановление производной функции по ее приближенным коэффициентам Фурье. Обозначим через \mathbb{T} единичную окружность, реализованную как отрезок $[-\pi, \pi]$ с идентифицированными концами. Через $L_2(\mathbb{T})$ обозначим совокупность функций $x(\cdot)$ на \mathbb{T} , суммируемых с квадратом, с нормой

$$\|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |x(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Класс $W_2^2(\mathbb{T})$ — это совокупность 2π -периодических функций $x(\cdot)$, у которых первая производная абсолютно непрерывна и $\|x''(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} \leq 1$.

На этом классе рассмотрим задачу восстановления первой производной функции $x(\cdot)$ в метрике $L_2(\mathbb{T})$ по конечному набору ее коэффициентов Фурье

$$x_j = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} x(t) e^{-ijt} dt,$$

заданных с погрешностью. Точнее говоря, будем предполагать, что для каждой функции $x(\cdot) \in W_2^2(\mathbb{T})$ нам известны числа y_j , $|j| \leq N$, такие, что

$$|x_j - y_j| \leq \delta, \quad |j| \leq N, \quad \delta > 0. \quad (5)$$

Здесь информационным оператором является многозначное отображение F_δ^N , ставящее в соответствие каждой функции $x(\cdot) \in W_2^2(\mathbb{T})$ множество $F_\delta^N x(\cdot) = \{y_j\}_{|j| \leq N}$, где y_j удовлетворяют условию (5). Задача заключается в нахождении величины

$$E(x'(\cdot), W_2^2(\mathbb{T}), F_\delta^N) = \inf_{m: \mathbb{C}^{2N+1} \rightarrow L_2(\mathbb{T})} \sup_{\substack{x(\cdot) \in W_2^2(\mathbb{T}) \\ y \in F_\delta^N x(\cdot)}} \|x'(\cdot) - m(y)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}$$

и соответствующего оптимального метода.

Аналогично предыдущему нетрудно получить оценку снизу

$$E(x'(\cdot), W_2^2(\mathbb{T}), F_\delta^N) \geq \sup_{\substack{x(\cdot) \in W_2^2(\mathbb{T}) \\ |x_j| \leq \delta, |j| \leq N}} \|x'(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}.$$

Задача справа в силу равенства Парсеваля записывается в виде (для удобства мы переходим к квадрату нормы)

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} j^2 u_j \rightarrow \max, \quad \sum_{j \in \mathbb{Z}} j^4 u_j \leq 1, \quad 0 \leq u_j \leq \delta^2, \quad |j| \leq N, \quad (6)$$

где $u_j = |x_j|^2$, $j \in \mathbb{Z}$.

Эта задача выпуклого программирования. Легко убедиться, что для нахождения ее решения достаточно найти такие $\hat{\lambda} \geq 0$, $\hat{\lambda}_j \geq 0$, $|j| \leq N$, и допустимую последовательность $\{\hat{u}_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$, для которых при всех $u_j \geq 0$, $j \in \mathbb{Z}$,

$$(a) \quad \sum_{j \in \mathbb{Z}} (-j^2 + \hat{\lambda} j^4 + \hat{\lambda}_j \chi_j) u_j \geq \sum_{j \in \mathbb{Z}} (-j^2 + \hat{\lambda} j^4 + \hat{\lambda}_j \chi_j) \hat{u}_j$$

и

$$(b) \quad \hat{\lambda} \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} j^4 \hat{u}_j - 1 \right) = 0, \quad \hat{\lambda}_j (\hat{u}_j - \delta_j^2) = 0, \quad |j| \leq N,$$

где $\chi_j = 1$, если $|j| \leq N$, и нулю в остальных случаях. Пусть

$$p_0 = \max \left\{ p \in \mathbb{Z}_+ : \delta^2 \sum_{|j| \leq p} j^4 < 1, \quad 0 \leq p \leq N \right\}.$$

Положим $\hat{\lambda} = (p_0 + 1)^{-2}$,

$$\hat{\lambda}_j = \begin{cases} j^2 - (p_0 + 1)^{-2} j^4, & |j| \leq p_0, \\ 0, & p_0 + 1 \leq |j| \leq N. \end{cases}$$

Последовательность $\{\hat{u}_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ определим равенством

$$\hat{u}_j = \begin{cases} \delta^2, & |j| \leq p_0, \\ \frac{1 - \delta^2 \sum_{|k| \leq p_0} k^4}{2(p_0 + 1)^4}, & |j| = p_0 + 1, \\ 0, & |j| > p_0 + 1. \end{cases}$$

Легко проверить, что последовательность $\hat{u} = \{\hat{u}_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ допустима и выполняются условия (a) и (b). Таким образом, \hat{u} — решение задачи (6). Подставляя \hat{u} в максимизируемый функционал и извлекая квадратный корень, получаем

$$E(x'(\cdot), W_2^2(\mathbb{T}), F_\delta^N) \geq \frac{\left(1 + \delta^2 \sum_{|j| \leq p_0} (j^2(p_0 + 1)^2 - j^4)\right)^{1/2}}{p_0 + 1}. \quad (7)$$

Исходя из аналогичных соображений достаточности можно убедиться, что \hat{u} является также решением и такой задачи

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} j^2 u_j \rightarrow \max, \quad \hat{\lambda} \sum_{j \in \mathbb{Z}} j^4 u_j + \sum_{|j| \leq N} \hat{\lambda}_j u_j \leq \hat{\lambda} + \delta^2 \sum_{|j| \leq N} \hat{\lambda}_j, \quad u_j \geq 0. \quad (8)$$

Следовательно, значения задач (6) и (8) совпадают.

Положим

$$\hat{x}_j = \begin{cases} y_0, & j = 0, \\ \frac{\hat{\lambda}_j}{\hat{\lambda} j^4 + \hat{\lambda}_j} y_j, & 1 \leq |j| \leq p_0, \\ 0, & |j| > p_0. \end{cases}$$

Непосредственной проверкой легко убедиться, что для всех $x(\cdot) \in W_2^2(\mathbb{T})$ имеет место равенство

$$\begin{aligned} \hat{\lambda} \sum_{j \in \mathbb{Z}} j^4 |x_j - \hat{x}_j|^2 + \sum_{|j| \leq N} \hat{\lambda}_j |x_j - \hat{x}_j|^2 + \hat{\lambda} \sum_{j \in \mathbb{Z}} j^4 |\hat{x}_j|^2 + \sum_{|j| \leq N} \hat{\lambda}_j |\hat{x}_j - y_j|^2 \\ = \hat{\lambda} \sum_{j \in \mathbb{Z}} j^4 |x_j|^2 + \sum_{|j| \leq N} \hat{\lambda}_j |x_j - y_j|^2. \end{aligned}$$

Если $x(\cdot) \in W_2^2(\mathbb{T})$ и $|x_j - y_j| \leq \delta$, то, положив $v_j = |x_j - \hat{x}_j|^2$, будем иметь

$$\hat{\lambda} \sum_{j \in \mathbb{Z}} j^4 v_j + \sum_{|j| \leq N} \hat{\lambda}_j v_j \leq \hat{\lambda} \sum_{j \in \mathbb{Z}} j^4 |x_j|^2 + \sum_{|j| \leq N} \hat{\lambda}_j |x_j - y_j|^2 \leq \hat{\lambda} + \delta^2 \sum_{|j| \leq N} \hat{\lambda}_j.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \left\| x'(t) - \sum_{|j| \leq N} i j \hat{x}_j e^{ijt} \right\|_{L_2(\mathbb{T})}^2 &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} j^2 v_j \\ &\leq \sup \left\{ \sum_{j \in \mathbb{Z}} j^2 u_j : \hat{\lambda} \sum_{j \in \mathbb{Z}} j^4 u_j + \sum_{|j| \leq N} \hat{\lambda}_j u_j \leq \hat{\lambda} + \delta^2 \sum_{|j| \leq N} \hat{\lambda}_j, \quad u_j \geq 0 \right\}. \end{aligned}$$

Поскольку значение экстремальной задачи в правой части, являющейся задачей (8), совпадает со значением задачи (6), то для погрешности оптимального восстановления получаем оценку сверху, совпадающую с оценкой снизу (7). Таким образом,

$$E(x'(\cdot), W_2^2(\mathbb{T}), F_\delta^N) = \frac{\left(1 + \delta^2 \sum_{|j| \leq p_0} (j^2(p_0 + 1)^2 - j^4)\right)^{1/2}}{p_0 + 1},$$

а метод

$$x'(t) \approx \sum_{|j| \leq N} ij \widehat{x}_j e^{ijt} = \sum_{|j| \leq p_0} ij \left(1 - \left(\frac{j}{p_0 + 1}\right)^2\right) y_j e^{ijt}$$

является оптимальным.

Отметим, что если $p_0 < N$, то дальнейшее увеличение числа коэффициентов Фурье, известных с той же погрешностью, не приводит к уменьшению погрешности оптимального восстановления. Тем самым при фиксированном δ набор из $2N(\delta)$ коэффициентов Фурье (нулевой коэффициент не используется в оптимальном методе), где

$$N(\delta) = \max \left\{ N \in \mathbb{Z}_+ : \delta^2 \sum_{|j| \leq N} j^4 < 1 \right\},$$

позволяет максимально точно восстановить производную функции из $L_2(\mathbb{T})$. Приведем некоторые значения функции $N(\delta)$ и соответствующей погрешности оптимального восстановления.

δ^2	$N(\delta)$	$E^2(x'(\cdot), W_2^2(\mathbb{T}), F_\delta^{N(\delta)})$
$\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$	0	1
$\left[\frac{1}{34}, \frac{1}{2}\right)$	1	$\frac{1 + 6\delta^2}{4}$
$\left[\frac{1}{196}, \frac{1}{34}\right)$	2	$\frac{1 + 56\delta^2}{9}$
$\left[\frac{1}{1446}, \frac{1}{196}\right)$	3	$\frac{1 + 252\delta^2}{16}$

В общем случае, если

$$\left(\sum_{|j| \leq k+1} j^4\right)^{-1/2} \leq \delta < \left(\sum_{|j| \leq k} j^4\right)^{-1/2},$$

то $N(\delta) = k$ и

$$E(x'(\cdot), W_2^2(\mathbb{T}), F_\delta^{N(\delta)}) = \frac{\left(1 + \delta^2 \sum_{|j| \leq k} (j^2(k+1)^2 - j^4)\right)^{1/2}}{k+1}.$$

5. Восстановление функции в точке по самой функции, заданной с погрешностью в L_2 -норме. Обозначим через $L_2(\mathbb{R})$ пространство функций $x(\cdot)$, определенных на \mathbb{R} , для которых

$$\|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} = \left(\int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 dt \right)^{1/2} < \infty.$$

Через $W_2^1(\mathbb{R})$ будем обозначать пространство функций $x(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$, для которых $\|x'(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} < \infty$, а через $W_2^1(\mathbb{R})$ — класс функций из $W_2^1(\mathbb{R})$, для которых $\|x'(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} \leq 1$. На классе $W_2^1(\mathbb{R})$ рассмотрим задачу оптимального восстановления значения $x(0)$ по информации о самой функции $x(\cdot)$, заданной с погрешностью $\delta > 0$ в норме $L_2(\mathbb{R})$. Иными словами, мы считаем, что для любой функции $x(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{R})$ нам известна функция $y(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$, такая, что

$$\|x(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq \delta. \quad (9)$$

Тем самым здесь в качестве информационного оператора F_δ рассматривается многозначное отображение, которое каждой функции $x(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{R})$ ставит в соответствие множество функций $y(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$, удовлетворяющих условию (9). Нас, как и в предыдущих примерах, интересует погрешность оптимального восстановления

$$E(x(0), W_2^1(\mathbb{R}), F_\delta) = \inf_{m: L_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}} \sup_{\substack{x(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{R}), y(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}) \\ \|x(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq \delta}} |x(0) - m(y(\cdot))|,$$

а также оптимальный метод восстановления (метод, на котором достигается нижняя грань).

В точности так же, как и раньше, доказывается оценка

$$E(x(0), W_2^1(\mathbb{R}), F_\delta) \geq \sup_{\substack{x(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{R}) \\ \|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq \delta}} |x(0)|.$$

Поскольку функция

$$\hat{x}(t) = \sqrt{\delta} e^{-|t|/\delta}$$

принадлежит классу $W_2^1(\mathbb{R})$ и, кроме того, $\|\hat{x}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} = \delta$, то

$$E(x(0), W_2^1(\mathbb{R}), F_\delta) \geq \hat{x}(0) = \sqrt{\delta}.$$

Для нахождения оптимального метода восстановления воспользуемся легко проверяемым тождеством

$$x(0) = \frac{1}{2\delta} \int_{\mathbb{R}} e^{-|t|/\delta} x(t) dt - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} e^{-|t|/\delta} x'(t) \operatorname{sign} t dt, \quad (10)$$

справедливым для всех $x(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{R})$. Рассмотрим метод

$$m(y(\cdot)) = \frac{1}{2\delta} \int_{\mathbb{R}} e^{-|t|/\delta} y(t) dt. \quad (11)$$

Воспользовавшись тождеством (10) и применяя неравенство Коши-Буняковского, будем иметь

$$\begin{aligned}
 E(x(0), W_2^1(\mathbb{R}), F_\delta) &= \sup_{x(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{R})} \sup_{\substack{y(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}) \\ \|x(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq \delta}} \left| x(0) - \frac{1}{2\delta} \int_{\mathbb{R}} e^{-|t|/\delta} x(t) dt \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2\delta} \int_{\mathbb{R}} e^{-|t|/\delta} (y(t) - x(t)) dt \right| \leq \sup_{x(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{R})} \left| \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} e^{-|t|/\delta} x'(t) \operatorname{sign} t dt \right| \\
 &\quad + \frac{\sqrt{\delta}}{2} \leq \sqrt{\delta}.
 \end{aligned}$$

Отсюда и соответствующей оценки снизу вытекает равенство

$$E(x(0), W_2^1(\mathbb{R}), F_\delta) = \sqrt{\delta}$$

и оптимальность метода (11).

Кроме того, из доказанного следует, что значение задачи

$$x(0) \rightarrow \max, \quad \|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq \delta, \quad \|x'(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq 1, \quad (12)$$

равно $\sqrt{\delta}$. Функция $x(\cdot)/\|x'(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}$ для всех $x(\cdot) \in \mathcal{W}_2^1(\mathbb{R})$ является допустимой в задаче (12) с $\delta = \|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}/\|x'(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}$. Следовательно, для всех $x(\cdot) \in \mathcal{W}_2^1(\mathbb{R})$ справедливо неравенство

$$\frac{|x(0)|}{\|x'(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}} \leq \frac{\|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^{1/2}}{\|x'(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^{1/2}},$$

т.е.

$$|x(0)| \leq \|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^{1/2} \|x'(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^{1/2}.$$

В силу инвариантности нормы относительно сдвига точку 0 можно заменить на любую точку $\tau \in \mathbb{R}$.

Полученное неравенство можно рассматривать как некоторый принцип неопределенности для функций из $\mathcal{W}_2^1(\mathbb{R})$, означающий, что при фиксированном значении функции в произвольной точке нормы функции и ее производной не могут быть одновременно малы — их произведение всегда не меньше квадрата этого значения.

6. Восстановление функции по ее приближенным значениям в весовой норме. Обозначим через $L_2(\mathbb{R}, t^2)$ пространство функций $x(\cdot)$, определенных на \mathbb{R} , для которых

$$\|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}, t^2)} = \left(\int_{\mathbb{R}} t^2 |x(t)|^2 dt \right)^{1/2} < \infty.$$

Через $\mathcal{W}_2^1(\mathbb{R}, t^2)$ обозначим пространство функций из $L_2(\mathbb{R}, t^2)$, для которых $x'(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$. Положим

$$W_2^1(\mathbb{R}, t^2) = \{ x(\cdot) \in \mathcal{W}_2^1(\mathbb{R}, t^2) : \|x'(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq 1 \}.$$

На классе $W_2^1(\mathbb{R}, t^2)$ рассмотрим задачу оптимального восстановления функции $x(\cdot)$ по информации о ее приближенных значениях в норме пространства $L_2(\mathbb{R}, t^2)$. Мы считаем, что для любой функции $x(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{R}, t^2)$ нам известна функция $y(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}, t^2)$, такая, что

$$\|x(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}, t^2)} \leq \delta. \quad (13)$$

Здесь в качестве информационного оператора F_δ рассматривается многозначное отображение, которое каждой функции $x(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{R}, t^2)$ ставит в соответствие множество функций $y(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}, t^2)$, удовлетворяющих условию (13). Нас интересует погрешность оптимального восстановления

$$\begin{aligned} & E(x(\cdot), W_2^1(\mathbb{R}, t^2), F_\delta) \\ &= \inf_{m: L_2(\mathbb{R}, t^2) \rightarrow L_2(\mathbb{R})} \sup_{\substack{x(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{R}, t^2), y(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}, t^2) \\ \|x(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}, t^2)} \leq \delta}} \|x(\cdot) - m(y)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}, \end{aligned}$$

а также оптимальный метод восстановления.

Рассуждения, аналогичные проводимым в предыдущих примерах, приводят к неравенству

$$E(x(\cdot), W_2^1(\mathbb{R}, t^2), F_\delta) \geq \sup_{\substack{\|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}, t^2)} \leq \delta \\ \|x'(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq 1}} \|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}.$$

Для решения экстремальной задачи

$$\|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 \rightarrow \max, \quad \|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}, t^2)}^2 \leq \delta^2, \quad \|x'(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 \leq 1, \quad (14)$$

рассмотрим функцию Лагранжа

$$\mathcal{L}(x(\cdot), \lambda_1, \lambda_2) = - \int_{\mathbb{R}} x^2(t) dt + \lambda_1 \int_{\mathbb{R}} t^2 x^2(t) dt + \lambda_2 \int_{\mathbb{R}} x'^2(t) dt.$$

Несложно показать, что для того чтобы функция $\hat{x}(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{R}, t^2)$ была решением задачи (14) достаточно, чтобы нашлись $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2 \geq 0$, для которых

$$\min_{x(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{R}, t^2)} \mathcal{L}(x(\cdot), \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2) = \mathcal{L}(\hat{x}(\cdot), \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2)$$

и

$$\hat{\lambda}_1 \left(\int_{\mathbb{R}} t^2 \hat{x}^2(t) dt - \delta^2 \right) = 0, \quad \hat{\lambda}_2 \left(\int_{\mathbb{R}} \hat{x}'^2(t) dt - 1 \right) = 0.$$

Положим $\hat{\lambda}_1 = \delta^{-1}$ и $\hat{\lambda}_2 = \delta$. Интегрируя по частям первое слагаемое в функции Лагранжа, получим

$$\mathcal{L}(x(\cdot), \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2) = \frac{1}{\delta} \int_{\mathbb{R}} (tx(t) + \delta x'(t))^2 dt.$$

Очевидно, что на функции

$$\hat{x}(t) = \sqrt{2} \left(\frac{\delta}{\pi} \right)^{1/4} e^{-\frac{t^2}{2\delta}}$$

функция Лагранжа обращается в ноль, т.е. на этой функции достигается минимум. В силу того, что

$$\int_{\mathbb{R}} t^2 x^2(t) dt = \delta^2, \quad \int_{\mathbb{R}} x'^2(t) dt = 1,$$

$\widehat{x}(\cdot)$ — решение задачи (14). Тем самым

$$E(x(\cdot), W_2^1(\mathbb{R}, t^2), F_\delta) \geq \left(\int_{\mathbb{R}} \widehat{x}^2(t) dt \right)^{1/2} = \sqrt{2\delta}.$$

Из аналогичных соображений достаточности вытекает, что функция $\widehat{x}(\cdot)$ является также решением экстремальной задачи

$$\|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 \rightarrow \max, \quad \delta^{-1} \|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}, t^2)}^2 + \delta \|x'(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 \leq 2\delta. \quad (15)$$

Перейдем к построению оптимального метода восстановления. Положим

$$\psi_n(t) = H_n \left(\frac{t}{\sqrt{\delta}} \right) e^{-\frac{t^2}{2\delta}}, \quad n = 0, 1, \dots,$$

где $H_n(\cdot)$ — полиномы Чебышева–Эрмита ($\{H_n(\cdot)\}_{n=0}^\infty$ — ортогональная на \mathbb{R} система полиномов для веса e^{-x^2} со старшими коэффициентами $a_n = 2^n$). Функции $\psi_n(\cdot)$, $n = 0, 1, \dots$, образуют ортогональный базис в $L_2(\mathbb{R})$. Пусть $y(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}, t^2)$ и

$$ty(t) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n \psi_n(t).$$

Положим

$$\widehat{x}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{x}_n \psi_n(t),$$

где

$$\widehat{x}_0 = \frac{y_1}{\sqrt{\delta}}, \quad \widehat{x}_n = \frac{(n+1)y_{n+1} + y_{n-1}/2}{\sqrt{\delta}(2n+1)}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Пользуясь свойствами полиномов Чебышева–Эрмита, можно показать, что для всех $z(\cdot) \in \mathcal{W}_2^1(\mathbb{R}, t^2)$ имеет место равенство

$$\frac{1}{\delta} \int_{\mathbb{R}} t^2 (\widehat{x}(t) - y(t)) z(t) dt + \delta \int_{\mathbb{R}} \widehat{x}'(t) z'(t) dt = 0.$$

Откуда вытекает, что для любого $x(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{R}, t^2)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta} \int_{\mathbb{R}} t^2 (x(t) - \widehat{x}(t))^2 dt + \delta \int_{\mathbb{R}} (x'(t) - \widehat{x}'(t))^2 dt + \frac{1}{\delta} \int_{\mathbb{R}} t^2 (\widehat{x}(t) - y(t))^2 dt \\ + \delta \int_{\mathbb{R}} \widehat{x}'^2(t) dt = \frac{1}{\delta} \int_{\mathbb{R}} t^2 (x(t) - y(t))^2 dt + \delta \int_{\mathbb{R}} x'^2(t) dt. \end{aligned}$$

Если $x(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{R}, t^2)$ и $\|x(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}, t^2)} \leq \delta$, то, положив $z(\cdot) = x(\cdot) - \widehat{x}(\cdot)$, будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta} \int_{\mathbb{R}} t^2 z^2(t) dt + \delta \int_{\mathbb{R}} z'^2(t) dt \\ \leq \frac{1}{\delta} \int_{\mathbb{R}} t^2 (x(t) - y(t))^2 dt + \delta \int_{\mathbb{R}} x'^2(t) dt \leq 2\delta. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \|x(\cdot) - \widehat{x}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} &= \|z(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \\ &\leq \sup \left\{ \|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} : \delta^{-1} \|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}, t^2)}^2 + \delta \|x'(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 \leq 2\delta \right\}. \end{aligned}$$

Квадрат значения экстремальной задачи в правой части совпадает со значением задачи (15) и тем самым со значением задачи (14). Следовательно, для погрешности оптимального восстановления получена оценка сверху, совпадающая с оценкой снизу. Таким образом,

$$E(x(\cdot), W_2^1(\mathbb{R}, t^2), F_\delta) = \sqrt{2\delta}, \quad (16)$$

а метод

$$x(t) \approx \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{x}_n \psi_n(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n H_n \left(\frac{t}{\sqrt{\delta}} \right) e^{-\frac{t^2}{2\delta}},$$

где

$$\alpha_n = \frac{1}{(2n+1)2^n n!} \int_{\mathbb{R}} y(t) H_n \left(\frac{t}{\sqrt{\delta}} \right) e^{-\frac{t^2}{2\delta}} t^2 dt,$$

является оптимальным.

Из (16) по тем же соображениям, что и в предыдущем примере, вытекает следующее точное неравенство

$$\int_{\mathbb{R}} x^2(t) dt \leq 2 \left(\int_{\mathbb{R}} t^2 x^2(t) dt \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} x'^2(t) dt \right)^{1/2}. \quad (17)$$

Если рассматривать функции $x(\cdot)$, нормированные условием

$$\int_{\mathbb{R}} x^2(t) dt = 1,$$

то из (17) вытекает неравенство

$$\int_{\mathbb{R}} t^2 x^2(t) dt \int_{\mathbb{R}} x'^2(t) dt \geq 1/4,$$

которое известно как принцип неопределенности Гейзенберга.

4. ТЕОРИЯ

Приведенные выше примеры были решены непосредственно, без привлечения каких-либо общих утверждений. Мы это сделали сознательно, чтобы сосредоточить внимание читателя только на самих примерах. Здесь же мы приведем один общий результат, связанный с оптимальным восстановлением линейных функционалов (в некоторых примерах мы, фактически, им пользовались).

Пусть в обозначениях п.2 C — подмножество вещественного или комплексного пространства X , X' — сопряженное к X и $f = x' \in X'$, т. е. $Z = \mathbb{R}$ или \mathbb{C} . Значение линейного функционала x' на элементе $x \in X$ обозначаем $\langle x', x \rangle$. Пусть, далее, Y — другое вещественное или комплексное векторное пространство, Y' — его сопряженное и $F: C \rightarrow Y$ — (вообще говоря, многозначное) отображение. Задача состоит в том, чтобы восстановить значения линейного функционала x' на множестве C по информации F .

Будем для определенности считать, что X и Y — комплексные векторные пространства. Любое отображение $m: F(C) \rightarrow \mathbb{C}$, как и раньше, назовем *методом восстановления*. Погрешностью такого метода называется величина

$$e(x', C, F, m) = \sup_{x \in C, y \in F(x)} |\langle x', x \rangle - m(y)|, \quad (18)$$

а *погрешность оптимального восстановления* (x' на C по F), обозначаемую $E(x', C, F)$, определим как значение задачи:

$$e(x', C, F, m) \rightarrow \min, \quad (19)$$

где нижняя грань берется по всевозможным отображениям

$$m: F(C) \rightarrow \mathbb{C}.$$

Любой метод \hat{m} , который является решением этой задачи называется *оптимальным методом восстановления*.

Сопоставим задаче (19) следующую экстремальную задачу

$$\operatorname{Re} \langle x', x \rangle \rightarrow \max, \quad x \in F^{-1}(0), \quad x \in C, \quad (20)$$

где $F^{-1}(y) = \{x \in C \mid y \in F(x)\}$.

Функцию

$$\mathcal{L}((x, y), \lambda_0, y') = \lambda_0 \operatorname{Re} \langle x', x \rangle + \operatorname{Re} \langle y', y \rangle.$$

назовем функцией Лагранжа задачи (20), а число λ_0 и функционал $y' \in Y'$ — множителями Лагранжа.

Теорема 1. Пусть в задаче (20) множества C и $\operatorname{gr} F = \{(x, y) : x \in C, y \in F(x)\}$ выпуклы и уравновешены. Тогда допустимая в (20) точка \hat{x} является решением этой задачи в том и только в

том случае, когда найдется такой множитель Лагранжа $\widehat{y}' \in Y'$, что

$$\min_{\substack{x \in C \\ y \in F(x)}} \mathcal{L}((x, y), -1, \widehat{y}') = \mathcal{L}((\widehat{x}, 0), -1, \widehat{y}').$$

При этом \widehat{y}' — оптимальный метод восстановления в задаче (19) и $E(x', C, F) = \operatorname{Re} \langle x', \widehat{x} \rangle$.

Из этой теоремы видно, что для нахождения оптимального метода в (19) достаточно решить задачу (20), которая является выпуклой. Решая ее стандартными методами выпуклой оптимизации, мы находим заодно и множители Лагранжа, т. е. находим оптимальный метод восстановления (который оказывается линейным). С точки зрения выпуклой двойственности это означает, что задачи (19) и (20) двойственны друг к другу.

При оптимальном восстановлении линейных операторов оценка снизу величины оптимальной погрешности также сводится к решению задачи, аналогичной (20), но оценка сверху требует отдельных рассуждений. На этот счет имеются некоторые соображения общего характера, но здесь мы на них не будем останавливаться (см. [10]).

Доказательство сформулированной теоремы можно найти в [9].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Смоляк С. А. Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них. Канд. дисс. Москва: МГУ, 1965.
- [2] Micchelli C. A., Rivlin T. J. A survey of optimal recovery. In: Optimal Estimation in Approximation Theory (C. A. Micchelli and T. J. Rivlin, Eds.). P. 1–54. New York: Plenum Press, 1977.
- [3] Traub J. F., Woźniakowski H. A General Theory of Optimal Algorithms. New York: Academic Press, 1980.
- [4] Micchelli C. A., Rivlin T. J. Lectures on Optimal Recovery. Lecture Notes in Mathematics. V. 1129. P. 21–93. Berlin: Springer-Verlag, 1985.
- [5] Арестов В. В. Наилучшее восстановление операторов и родственные задачи // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1989. Т. 189. С. 3–20.
- [6] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Об оптимальном восстановлении функционалов по неточным данным // Мат. заметки. 1991. Т. 50. 6. С. 85–93.
- [7] Osipenko K. Yu. Optimal Recovery of Analytic Functions, Nova Science Publ., Inc., Huntington, New York 2000.
- [8] Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М. О неравенствах для производных колмогоровского типа // Матем. сб. 1997. Т. 188. 12. С. 73–106.
- [9] Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М. Выпуклый анализ и его приложения. Москва: Эдиториал УРСС, 2000.
- [10] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Оптимальное восстановление функций и их производных по коэффициентам Фурье, заданным с погрешностью // Матем. сб. 2002. Т. 193. С. 79–100.

МАТИ — РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. К. Э. ЦИОЛКОВСКОГО

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. М. В. ЛОМОНОСОВА