МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА И ОРДЕНА ТРУДОВОГО
КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ им. М.В. ЛОМОНОСОВА

Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра вычислительной математики

ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ ФРЕНЕЛЯ

ДИПЛОМНАЯ РАБОТА
студента V курса
ОСИПЕНКО К.Ю.

Научный руководитель —
профессор Н.С. БАХВАЛОВ

Москва 1972

С О Д Е Р Ж А Н И Е

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе рассматривается метод вычисления интегралов Френеля вида:

$$C(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\, dt,$$

$$S(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\, dt.$$

Предложенный метод, основанный на разложении интегралов Френеля по многочленам Чебышева, усовершенствуется в дальнейшем с помощью дробно-рациональных приближений.

Существующие методы вычисления интегралов Френеля используют при малых x разложения $C(x)$ и $S(x)$ в ряды Тейлора, а при больших x — асимптотические разложения $C(x)$ и $S(x)$. Трудности возникают при вычислении интегралов в промежуточных точках. Здесь имеются различные подходы.

Существует метод, сводящий вычисления $C(x)$ и $S(x)$ к системе разностных уравнений, которая в дальнейшем решается методом стрельбы и прогонки. Недостаток этого метода в том, что он довольно сложен и требует большого числа операций.

Другой метод использует для вычисления $C(x)$ и $S(x)$ квадратурные формулы Гаусса. Недостаток этого метода в том, что он требует многократного вычисления функций $\cos t$ и $\sin t$.

Интересен метод, использующий разложения интегралов Френеля по функциям Бесселя

$$C(x) = \sum_{k=0}^{\infty} J_{2k+\frac{1}{2}}(x),$$

$$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} J_{2k-\frac{1}{2}}(x).$$

Однако он требует большего числа операций, чем метод рассматриваемый в работе, для достижения той же точности.

Преимущества предлагаемого алгоритма в том, что он использует только два промежутка $[0, 8)$ и $[8, \infty)$ и имеет сравнительно малое число операций.

§1. РАЗЛОЖЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ ФРЕНЕЛЯ В РЯДЫ ПО МНОГОЧЛЕНАМ ЧЕБЫШЕВА

Интегралы Френеля определяются следующим образом:

$$C(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\, dt, \quad S(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\, dt.$$

Пусть $y \in [-1, 1]$. Разложим $\cos ty$ и $\sin ty$ при фиксированном t в ряды по многочленам Чебышева.

$\cos ty = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n T_n(y)$, где

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{\cos ty}{\sqrt{1-y^2}}\, dy,$$
$$a_{2n+1} = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{\cos ty T_{2n+1}(y)}{\sqrt{1-y^2}}\, dy = 0,$$
$$a_{2n} = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{\cos ty T_{2n}(y)}{\sqrt{1-y^2}}\, dy,$$

и $\sin ty = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n T_n(y)$, где

$$b_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{\sin ty}{\sqrt{1-y^2}}\, dy = 0,$$
$$b_{2n} = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{\sin ty T_{2n}(y)}{\sqrt{1-y^2}}\, dy = 0,$$
$$b_{2n+1} = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{\sin ty T_{2n+1}(y)}{\sqrt{1-y^2}}\, dy.$$

Покажем, что $a_0 = J_0(t)$, $a_{2n} = 2(-1)^n J_{2n}(t)$, $n \geq 1$, и $b_{2n+1} = 2(-1)^n J_{2n+1}(t)$, где $J_k(t)$ — функции Бесселя I рода.

Известно **[2]**, что

$$J_k(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(t \sin y - ky)\, dy$$
$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\cos(t \sin y) \cos ky + \sin(t \sin y) \sin ky\right)\, dy.$$

Поскольку

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(t \sin y) \sin 2ny\, dy = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(t \sin y) \cos(2n+1)y\, dy = 0,$$

то

$$J_{2n}(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(t\sin y)\cos 2ny\, dy = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos(t\sin y)\cos 2ny\, dy,$$

$$\begin{aligned} J_{2n+1}(t) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(t\sin y)\sin(2n+1)y\, dy \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin(t\sin y)\sin(2n+1)y\, dy. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{\cos ty}{\sqrt{1-y^2}}\, dy = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(t\cos y)\, dy \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(t\sin y)\, dy = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos(t\sin y)\, dy = J_0(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{2n} &= \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{\cos ty\cos(2n\arccos y)}{\sqrt{1-y^2}}\, dy = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(t\cos y)\cos 2ny\, dy \\ &= (-1)^n\frac{2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(t\sin y)\cos 2ny\, dy \\ &= (-1)^n\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos(t\sin y)\cos 2ny\, dy = 2(-1)^n J_{2n}(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{2n+1} &= \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{\sin ty\cos[(2n+1)\arccos y]}{\sqrt{1-y^2}}\, dy \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(t\cos y)\cos(2n+1)y\, dy \\ &= (-1)^n\frac{2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(t\sin y)\sin(2n+1)y\, dy = 2(-1)^n J_{2n+1}(t), \end{aligned}$$

Пусть $0 \le x \le a$. Представим интегралы Френеля в виде

$$C(x) = \sqrt{\frac{x}{2\pi}}\int_0^1 \frac{\cos tx}{\sqrt{t}}\, dt, \quad S(x) = \sqrt{\frac{x}{2\pi}}\int_0^1 \frac{\sin tx}{\sqrt{t}}\, dt. \tag{1.1}$$

Разложим $\cos tx$ и $\sin tx$ в ряды

$$\cos tx = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} T_{2n}\left(\frac{x}{a}\right),$$

$$\sin tx = \sum_{n=0}^{\infty} b_{2n+1} T_{2n+1}\left(\frac{x}{a}\right),$$

где $a_0 = J_0(at)$, $a_{2n} = 2(-1)^n J_{2n}(at)$, $b_{2n+1} = 2(-1)^n J_{2n+1}(at)$. Подставляя в интегралы (1.1) соответствующие разложения, получим

$$C(x) = \sqrt{\frac{x}{2\pi}}\left[\rho_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \rho_{2n} T_{2n}\left(\frac{x}{a}\right)\right],$$

$$S(x) = \sqrt{\frac{x}{2\pi}} 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \rho_{2n+1} T_{2n+1}\left(\frac{x}{a}\right),$$

где

$$\rho_n = \int_0^1 \frac{J_n(at)}{\sqrt{t}}\,dt.$$

Пусть $a \le x < \infty$. Тогда

$$C(x) + iS(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x \frac{e^{it}}{\sqrt{t}}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \frac{e^{it}}{\sqrt{t}}\,dt - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^\infty \frac{e^{it}}{\sqrt{t}}\,dt.$$

Известно, что

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \frac{e^{it}}{\sqrt{t}}\,dt = \frac{1}{2}(1+i).$$

Рассмотрим

$$J = \int_x^\infty \frac{e^{it}}{\sqrt{t}}\,dt.$$

$$J = 2\int_{\sqrt{x}}^\infty e^{it^2}\,dt = 2\int_0^\infty e^{i(u+\sqrt{x})^2}\,du = 2e^{ix}\int_0^\infty e^{i(u^2+2u\sqrt{x})}\,du.$$

В последнем интеграле можно заменить интегрирование по действительной оси на интегрирование по мнимой оси от 0 до $i\infty$

$$\begin{aligned}
J &= 2e^{ix} i\int_0^\infty e^{-it^2} e^{-2t\sqrt{x}}\,dt = i\frac{2e^{ix}}{\sqrt{x}}\int_0^\infty e^{-2t} e^{-i\frac{t^2}{x}}\,dt \\
&= -\frac{2}{\sqrt{x}}\left(\sin x\int_0^\infty e^{-2t}\cos\frac{t^2}{x}\,dt - \cos x\int_0^\infty e^{-2t}\sin\frac{t^2}{x}\,dt\right) \\
&\quad + i\frac{2}{\sqrt{x}}\left(\sin x\int_0^\infty e^{-2t}\sin\frac{t^2}{x}\,dt + \cos x\int_0^\infty e^{-2t}\cos\frac{t^2}{x}\,dt\right).
\end{aligned}$$

Отсюда

$$C(x) = \frac{1}{2} + \frac{\sin x}{\sqrt{2\pi x}}\int_0^\infty 2e^{-2t}\cos\frac{t^2}{x}\,dt - \frac{\cos x}{\sqrt{2\pi x}}\int_0^\infty 2e^{-2t}\sin\frac{t^2}{x}\,dt,$$

$$S(x) = \frac{1}{2} - \frac{\sin x}{\sqrt{2\pi x}}\int_0^\infty 2e^{-2t}\sin\frac{t^2}{x}\,dt - \frac{\cos x}{\sqrt{2\pi x}}\int_0^\infty 2e^{-2t}\cos\frac{t^2}{x}\,dt.$$

Обозначим

$$A\left(\frac{a}{x}\right) = \int_0^\infty 2e^{-2t}\cos\frac{t^2}{x}\,dt = \int_0^\infty 2\sqrt{a}e^{-2\sqrt{a}t}\cos\frac{t^2 a}{x}\,dt,$$

$$B\left(\frac{a}{x}\right) = \int_0^\infty 2e^{-2t}\sin\frac{t^2}{x}\,dt = \int_0^\infty 2\sqrt{a}e^{-2\sqrt{a}t}\sin\frac{t^2 a}{x}\,dt.$$

Разлагая $\cos\dfrac{t^2a}{x}$ и $\sin\dfrac{t^2a}{x}$ в ряды по многочленам Чебышева, получим

$$A\left(\frac{a}{x}\right) = \gamma_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\gamma_{2n}T_{2n}\left(\frac{a}{x}\right),$$

$$B\left(\frac{a}{x}\right) = 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\gamma_{2n+1}T_{2n+1}\left(\frac{a}{x}\right),$$

где

$$\gamma_n = \int_0^\infty 2\sqrt{a}e^{-2\sqrt{a}t}J_n(t^2)\,dt.$$

Тогда для $C(x)$ и $S(x)$ будем иметь

$$C(x) = \frac{1}{2} + \frac{\sin x}{\sqrt{2\pi x}}\left[\gamma_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\gamma_{2n}T_{2n}\left(\frac{a}{x}\right)\right] - \frac{\cos x}{\sqrt{2\pi x}}2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\gamma_{2n+1}T_{2n+1}\left(\frac{a}{x}\right),$$

$$C(x) = \frac{1}{2} - \frac{\sin x}{\sqrt{2\pi x}}2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\gamma_{2n+1}T_{2n+1}\left(\frac{a}{x}\right) - \frac{\cos x}{\sqrt{2\pi x}}\left[\gamma_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\gamma_{2n}T_{2n}\left(\frac{a}{x}\right)\right].$$

§2. ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ МЕТОДА ПРИ $0 \le x \le a$

При $0 \le x \le a$ $C(x)$ и $S(x)$ можно представить в виде

$$C(x) = \sqrt{\frac{x}{2\pi}}\left[\rho_0 + 2\sum_{n=1}^{N}(-1)^n\rho_{2n}T_{2n}\left(\frac{x}{a}\right)\right] + E_c^N(x),$$

$$S(x) = \sqrt{\frac{x}{2\pi}}2\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\rho_{2n+1}T_{2n+1}\left(\frac{x}{a}\right) + E_s^N(x),$$

где

$$E_c^N(x) = \sqrt{\frac{x}{2\pi}}2\sum_{n=N+1}^{\infty}(-1)^n\rho_{2n}T_{2n}\left(\frac{x}{a}\right),$$

$$E_s^N(x) = \sqrt{\frac{x}{2\pi}}2\sum_{n=N+1}^{\infty}(-1)^n\rho_{2n+1}T_{2n+1}\left(\frac{x}{a}\right).$$

Оценим величины $E_c^N(x)$ и $E_s^N(x)$. Очевидно, что

$$|E_c^N(x)| \leq 2\sqrt{\frac{x}{2\pi}} \sum_{n=2N+2}^{\infty} |\rho_n|,$$

$$|E_s^N(x)| \leq 2\sqrt{\frac{x}{2\pi}} \sum_{n=2N+3}^{\infty} |\rho_n|.$$

Известно [**2**], что

$$J_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{(n+k)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n}.$$

Следовательно,

$$\rho_n = \int_0^1 \frac{J_n(at)}{\sqrt{t}}\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{(n+k)!} \left(\frac{a}{2}\right)^{2k+n} \int_0^1 t^{2k+n-\frac{1}{2}}\,dt$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{(n+k)!} \left(\frac{a}{2}\right)^{2k+n} \frac{1}{2k+n+\dfrac{1}{2}}.$$

Обозначим

$$a_k = \frac{1}{k!(n+k)!} \left(\frac{a}{2}\right)^{2k+n} \frac{1}{2k+n+\dfrac{1}{2}},$$

и рассмотрим $\dfrac{a_{k+1}}{a_k}$

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \frac{1}{(k+1)(n+k+1)} \frac{1}{1+\dfrac{2}{2k+n+\dfrac{1}{2}}} < \left(\frac{a}{2}\right)^2 \frac{1}{n+1}.$$

При $n+1 \geq \left(\dfrac{a}{2}\right)^2$ a_k монотонно убывают и, следовательно,

$$0 < \rho_n < \frac{1}{n!} \left(\frac{a}{2}\right)^n \frac{2}{2n+1}.$$

Отсюда

$$\sum_{n=M}^{\infty} \rho_n < \sum_{n=M}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{a}{2}\right)^n \frac{2}{2n+1} < \frac{1}{M!} \left(\frac{a}{2}\right)^M \frac{2}{2M+1} \cdot \frac{1}{1-\dfrac{a}{2(M+1)}}.$$

Таким образом,

$$
\begin{aligned}
|E_c^N(x)| &\le 2\sqrt{\frac{x}{2\pi}}\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^{2N+2}}{(2N+2)!}\frac{2}{4N+5}\frac{1}{1-\dfrac{a}{2(2N+3)}},\\
|E_s^N(x)| &\le 2\sqrt{\frac{x}{2\pi}}\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^{2N+3}}{(2N+3)!}\frac{2}{4N+7}\frac{1}{1-\dfrac{a}{2(2N+4)}},
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

при условии, что

$$
2N+3 \ge \left(\frac{a}{2}\right)^2. \tag{2.2}
$$

§3. ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ МЕТОДА ПРИ $a \le x < \infty$

При $a \le x < \infty$ $C(x)$ и $S(x)$ представляются в виде

$$
C(x) = \frac{1}{2} + \frac{\sin x}{\sqrt{2\pi x}}\left[\gamma_0 + 2\sum_{n=1}^{N}(-1)^n\gamma_{2n}T_{2n}\left(\frac{a}{x}\right)\right]
- \frac{\cos x}{\sqrt{2\pi x}}2\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\gamma_{2n+1}T_{2n+1}\left(\frac{a}{x}\right) + E_c^N(x),
$$

$$
S(x) = \frac{1}{2} - \frac{\sin x}{\sqrt{2\pi x}}2\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\gamma_{2n+1}T_{2n+1}\left(\frac{a}{x}\right)
- \frac{\cos x}{\sqrt{2\pi x}}\left[\gamma_0 + 2\sum_{n=1}^{N}(-1)^n\gamma_{2n}T_{2n}\left(\frac{a}{x}\right)\right] + E_s^N(x),
$$

где

$$
E_c^N(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{2\pi x}}2\sum_{n=N+1}^{\infty}(-1)^n\gamma_{2n}T_{2n}\left(\frac{a}{x}\right)
- \frac{\cos x}{\sqrt{2\pi x}}2\sum_{n=N+1}^{\infty}(-1)^n\gamma_{2n+1}T_{2n+1}\left(\frac{a}{x}\right),
$$

$$
E_s^N(x) = -\frac{\sin x}{\sqrt{2\pi x}}2\sum_{n=N+1}^{\infty}(-1)^n\gamma_{2n+1}T_{2n+1}\left(\frac{a}{x}\right)
- \frac{\cos x}{\sqrt{2\pi x}}2\sum_{n=N+1}^{\infty}(-1)^n\gamma_{2n}T_{2n}\left(\frac{a}{x}\right),
$$

Легко видеть, что

$$
|E_c^N(x)|, |E_s^N(x)| \le \frac{1}{\sqrt{2\pi x}}(|\sin x| + |\cos x|)\sum_{n=2N+2}^{\infty}|\gamma_n|. \tag{3.1}
$$

Известно [**3**], что
$$\int_0^\infty e^{-\sqrt{2a}t} J_n\left(\frac{t^2}{2}\right) dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-a\,\mathrm{sh}\,2t}}{(\mathrm{cth}\,t)^{n+\frac{1}{2}}} \frac{dt}{\mathrm{sh}\,t}.$$
Делая в последнем интеграле замену $x = \mathrm{sh}\,2t$, получаем
$$\gamma_n = \sqrt{\frac{a}{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{\sqrt{x}\sqrt{1+x^2}} \left(\frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}\right)^n dx.$$
Обозначим
$$\varphi_M = \sum_{n=M}^\infty \gamma_n = \sum_{n=M}^\infty \sqrt{\frac{a}{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{\sqrt{x}\sqrt{1+x^2}} \left(\frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}\right)^n dx.$$
Покажем, что ряд
$$\sum_{n=M}^\infty \sqrt{\frac{a}{\pi}} \frac{e^{-ax}}{\sqrt{x}\sqrt{1+x^2}} \left(\frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}\right)^n \tag{3.2}$$
равномерно сходится на $[0, \infty)$.

В силу ограниченности функции
$$\sqrt{\frac{a}{\pi}} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x^2}(1+\sqrt{1+x^2})}$$
достаточно доказать, что равномерно сходится ряд
$$\sum_{n=M}^\infty f_n(x) = \sum_{n=M}^\infty e^{-ax} \left(\frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}\right)^{n-1}.$$

Рассмотрим $f_n'(x)$ при $x \in [0, \infty)$
$$f_n'(x) = e^{-ax} \frac{x^{n-2}}{(1+\sqrt{1+x^2})^{n-1}} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} (n - 1 - ax\sqrt{1+x^2}).$$
Отсюда $f_n(x)$ имеет максимум в точке, удовлетворяющей уравнению
$$n - 1 = ax\sqrt{1+x^2}.$$
Решение этого уравнения:
$$x_n = \sqrt{\frac{n-1}{a}\sqrt{1+\frac{a^2}{4(n-1)^2}} - \frac{1}{2}}. \tag{3.3}$$

Следовательно,
$$\sum_{n=M}^\infty f_n(x) \le \sum_{n=M}^\infty f_n(x_n) = \sum_{n=M}^\infty e^{-ax_n} \left(\frac{x_n}{1+\sqrt{1+x_n^2}}\right)^{n-1}$$
$$< \sum_{n=M}^\infty e^{-ax_n} < \infty.$$

Отсюда следует равномерная сходимость ряда (3.2) и, следовательно, справедливость равенств:

$$\varphi_M = \sqrt{\frac{a}{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{\sqrt{x}\sqrt{1+x^2}} \sum_{n=M}^{\infty} \left(\frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}} \right)^n dx$$

$$= \sqrt{\frac{a}{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{\sqrt{x}\sqrt{1+x^2}} \frac{x^M}{(1+\sqrt{1+x^2})^M} \frac{1}{1-\dfrac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}}\, dx.$$

Поскольку для всех $x \in [0, \infty)$ выполнены неравенства

$$\frac{1}{1-\dfrac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{x+1}{\sqrt{1+x^2}} + 1 \right) \le \frac{1+\sqrt{2}}{2},$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}} \le \frac{1}{\sqrt{2}},$$

для φ_M будем иметь

$$\varphi_M < \sqrt{\frac{a}{\pi}} \frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \int_0^\infty e^{-ax} \left(\frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}} \right)^{M-\frac{1}{2}} dx. \tag{3.4}$$

Из (3.3) находим точку, в которой подынтегральная функция принимает максимум

$$\xi = \sqrt{\frac{M-\dfrac{1}{2}}{a} \sqrt{1+\frac{a^2}{4\left(M-\dfrac{1}{2}\right)^2}} - \frac{1}{2}}.$$

Отметим, что

$$\begin{gathered} \xi < \xi_1 = \sqrt{\frac{M-\dfrac{1}{2}}{a}}, \\ \xi > \xi_2 = \sqrt{\frac{M-\dfrac{1}{2}}{a} - \frac{1}{2}}. \end{gathered} \tag{3.5}$$

Рассмотрим

$$I = \int_0^\infty e^{-ax} \left(\frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}} \right)^{M-\frac{1}{2}} dx.$$

Этот интеграл можно представить в виде

$$I = \int_0^{2\xi} e^{-ax} \left(\frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}} \right)^{M-\frac{1}{2}} dx + \int_{2\xi}^{\infty} e^{-ax} \left(\frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}} \right)^{M-\frac{1}{2}} dx.$$

Отсюда

$$I < e^{-a\xi} \left(\frac{\xi}{1+\sqrt{1+\xi^2}} \right)^{M-\frac{1}{2}} 2\xi + \frac{e^{-2a\xi}}{a}.$$

Так как ξ удовлетворяет уравнению $a\xi\sqrt{1+\xi^2} = M - \dfrac{1}{2}$, то

$$\frac{\xi}{1+\sqrt{1+\xi^2}} = \frac{\xi}{1+\dfrac{M-\frac{1}{2}}{a\xi}} \le \frac{\xi_1}{1+\dfrac{M-\frac{1}{2}}{a\xi_1}} = \frac{\sqrt{M-\frac{1}{2}}}{\sqrt{a}+\sqrt{M-\frac{1}{2}}}.$$

Учитывая неравенства (3.5), имеем

$$I < e^{-2a\xi_2} \left[2\xi_1 e^{a\xi_2 + \left(M-\frac{1}{2}\right) \ln \frac{\sqrt{M-\frac{1}{2}}}{\sqrt{a}+\sqrt{M-\frac{1}{2}}}} + \frac{1}{a} \right].$$

Обозначим

$$\tau(M,a) = \sqrt{a\left(M-\frac{1}{2}\right) - \frac{a^2}{2}} + \left(M-\frac{1}{2}\right) \ln \frac{\sqrt{M-\frac{1}{2}}}{\sqrt{a}+\sqrt{M-\frac{1}{2}}}.$$

Тогда из (3.4) получим

$$\varphi_M < \sqrt{\frac{a}{\pi}} \frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} e^{-2a\sqrt{\frac{M-\frac{1}{2}}{a}-\frac{1}{2}}} \left[2\sqrt{\frac{M-\frac{1}{2}}{a}} e^{\tau(M,a)} + \frac{1}{a} \right] = \frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2\pi}} e^{-2a\sqrt{\frac{M-\frac{1}{2}}{a}-\frac{1}{2}}} \left[2\sqrt{M-\frac{1}{2}} e^{\tau(M,a)} + \frac{1}{\sqrt{a}} \right].$$

Наконец, из (3.1) и последнего неравенства будем иметь

$$|E_c^N(x)|, |E_s^N(x)| \le \frac{1}{\sqrt{x}}(|\sin x| + |\cos x|)\frac{1+\sqrt{2}}{4\pi}e^{-2a\sqrt{\frac{2N+\frac{3}{2}}{a}-\frac{1}{2}}}$$
$$\times \left[2\sqrt{2N+\frac{3}{2}}e^{\tau(2N+2,a)} + \frac{1}{\sqrt{a}}\right], \quad (3.6)$$

где

$$\tau(2N+2,a) = \sqrt{a\left(2N+\frac{3}{2}\right) - \frac{a^2}{2}} + \left(2N+\frac{3}{2}\right)\ln\frac{\sqrt{2N+\frac{3}{2}}}{\sqrt{a}+\sqrt{2N+\frac{3}{2}}}.$$

§4. АЛГОРИТМ

При $0 \le x < 8$ $C(x)$ и $S(x)$ вычисляем по формулам

$$C(x) = \sqrt{\frac{x}{2\pi}}\left[\rho_0 + 2\sum_{n=1}^{12}(-1)^n\rho_{2n}T_{2n}\left(\frac{x}{8}\right)\right],$$
$$S(x) = \sqrt{\frac{x}{2\pi}}2\sum_{n=0}^{N}(-1)^{12}\rho_{2n+1}T_{2n+1}\left(\frac{x}{8}\right).$$

Так как неравенство (2.2) для $N = 12$, $a = 8$ выполняется, для погрешностей $E_c^{12}(x)$ и $E_s^{12}(x)$ из (2.1) будем иметь

$$|E_c^{12}(x)| \le 2\sqrt{\frac{x}{2\pi}}\frac{4^{26}}{26!}\frac{2}{53}\frac{27}{23} < \sqrt{x}\,4.0\cdot 10^{-13},$$
$$|E_s^{12}(x)| \le 2\sqrt{\frac{x}{2\pi}}\frac{4^{27}}{27!}\frac{2}{55}\frac{7}{6} < \sqrt{x}\,5.7\cdot 10^{-14}.$$

При $8 \le x < \infty$ $C(x)$ и $S(x)$ вычисляем по формулам

$$C(x) = \frac{1}{2} + \frac{\sin x}{\sqrt{2\pi x}}\left[\gamma_0 + 2\sum_{n=1}^{12}(-1)^n\gamma_{2n}T_{2n}\left(\frac{a}{x}\right)\right]$$
$$- \frac{\cos x}{\sqrt{2\pi x}}2\sum_{n=0}^{12}(-1)^n\gamma_{2n+1}T_{2n+1}\left(\frac{a}{x}\right),$$

$$C(x) = \frac{1}{2} - \frac{\sin x}{\sqrt{2\pi x}}2\sum_{n=0}^{12}(-1)^n\gamma_{2n+1}T_{2n+1}\left(\frac{a}{x}\right)$$
$$- \frac{\cos x}{\sqrt{2\pi x}}\left[\gamma_0 + 2\sum_{n=1}^{12}(-1)^n\gamma_{2n}T_{2n}\left(\frac{a}{x}\right)\right].$$

Из (3.6) для погрешностей $E_c^{12}(x)$ и $E_s^{12}(x)$ имеем

$$|E_c^N(x)|, |E_s^N(x)| \le \frac{1}{\sqrt{x}}(|\sin x| + |\cos x|)\frac{1+\sqrt{2}}{4\pi}e^{-4\sqrt{43}}$$
$$\times\left[\sqrt{102}e^{2\sqrt{43}+\frac{51}{2}\ln\frac{\sqrt{51}}{4+\sqrt{51}}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right] < \frac{1}{\sqrt{x}}(|\sin x|+|\cos x|)\cdot 1.5\cdot 10^{-10}.$$

Значения ρ_n и γ_n $(n = 0, 1, \ldots, 25)$ приведены в [**1**]. Для вычисления линейных комбинаций многочленов Чебышева используется модификация метода, предложенного в [**4**].

Для вычисления значений

$$\mathcal{P}_{2N}(x) = \sum_{j=0}^{N} a_j T_{2j}(x)$$

запоминаем

$$c_0 = v_0 = \frac{a_N}{2}, \quad c_1 = \frac{a_{N-1}}{2}, \quad c_n = \frac{a_{N-n} - a_{N-n+2}}{2},$$
$$n = 2, \ldots, N-1, \quad c_N = a_0 - \frac{a_2}{2}.$$

При заданном x находим $y = 4x^2 - 2$, $v_1 = yv_0 + c_1$, затем последовательно $v_2, \ldots, v_N$ по рекуррентной формуле

$$v_n = yv_{n-1} - v_{n-2} + c_n.$$

Нетрудно проверить, что

$$v_n = \frac{a_{N-n}}{2} + \sum_{j=1}^{n} a_{N-n+j} T_{2j}(x), \quad n = 0, \ldots, N-1,$$

и

$$v_N = \mathcal{P}_{2N}(x).$$

Для вычисления значений

$$\mathcal{P}_{2N+1}(x) = \sum_{j=0}^{N} b_j T_{2j+1}(x)$$

запоминаем

$$d_0 = v_0 = b_N, \quad d_n = b_{N-n} - b_{N-n+1}, \quad n = 1, \ldots, N.$$

При заданном x находим $y = 4x^2 - 2$, $v_1 = yv_0 + d_1$, затем последовательно $v_2, \ldots, v_N$ по рекуррентной формуле

$$v_n = yv_{n-1} - v_{n-2} + d_n.$$

Нетрудно проверить, что

$$v_n = \frac{1}{x}\sum_{j=0}^{n} b_{N-n+j} T_{2j+1}(x), \quad n = 0, \ldots, N.$$

Отсюда

$$\mathcal{P}_{2N+1}(x) = xv_N.$$

Таким образом, вместо ρ_n запоминаем

$$c_0 = \rho_{24}, \quad c_1 = -\rho_{22}, \quad c_n = (-1)^n[\rho_{24-2n} - \rho_{28-2n}], \quad n = 2, \dots, 12,$$
$$d_0 = 2\rho_{25}, \quad d_n = 2(-1)^n[\rho_{25-2n} - \rho_{27-2n}], \quad n = 1, \dots, 12.$$

Аналогично вместо γ_n запоминаем

$$c_0 = \gamma_{24}, \quad c_1 = -\gamma_{22}, \quad c_n = (-1)^n[\gamma_{24-2n} - \gamma_{28-2n}], \quad n = 2, \dots, 12,$$
$$d_0 = 2\gamma_{25}, \quad d_n = 2(-1)^n[\gamma_{25-2n} - \gamma_{27-2n}], \quad n = 1, \dots, 12.$$

Значения c_n и d_n приведены в таблице 1.

§5. ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ ФРЕНЕЛЯ

После того, как была составлена программа вычисления интегралов Френеля, использующая алгоритмы из § 4, был поставлен вопрос: можно ли с помощью дробно-рациональных приближений сократить число операций при той же точности?

Для решения этой задачи был взят алгоритм из **[5]**, который для заданных непрерывной функции $f(x)$, непрерывной и монотонной функции $\phi(x)$, $x \in [a, b]$, строит рациональную функцию при заданных l и m

$$R^*_{l,m}[\phi(x)] = \frac{P_l[\phi(x)]}{Q_m[\phi(x)]} = \frac{p_0 + p_1\phi(x) + \ldots + p_l[\phi(x)]^l}{q_0 + q_1\phi(x) + \ldots + q_m[\phi(x)]^m},$$

которая почти минимизирует величину

$$\max_{x\in[a,b]} |f(x) - R_{l,m}[\phi(x)]|.$$

В качестве приближаемых функций были взяты функции

$$f_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\rho_0 + 2\sum_{n=1}^{12}(-1)^n\rho_{2n}T_{2n}\left(\frac{x}{8}\right)\right],$$

$$f_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{8t}\left[2\sum_{n=0}^{N}(-1)^{12}\rho_{2n+1}T_{2n+1}\left(\frac{x}{8}\right)\right],$$

$$f_3(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\gamma_0 + 2\sum_{n=1}^{12}(-1)^n\gamma_{2n}T_{2n}\left(\frac{x}{8}\right)\right],$$

$$f_4(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{8t}\left[2\sum_{n=0}^{N}(-1)^{12}\gamma_{2n+1}T_{2n+1}\left(\frac{x}{8}\right)\right], \quad t \in [0, 1],$$

а в качестве монотонного преобразования отрезка $[0, 1]$ — функция $\psi(t) = t^2$.

Нетрудно проверить, что значения интегралов Френеля, получаемые по алгоритму из § 4, связаны с $f_1(t), \ldots, f_4(t)$ следующим образом:
при $0 \le x < 8$

$$C(x) = \sqrt{x} f_1\left(\frac{x}{8}\right),$$
$$S(x) = x\sqrt{x} f_2\left(\frac{x}{8}\right),$$

при $8 \le x < \infty$

$$\begin{aligned} C(x) &= \frac{1}{2} + \frac{\sin x}{\sqrt{x}} f_3\left(\frac{x}{8}\right) - \frac{\cos x}{x\sqrt{x}} f_4\left(\frac{x}{8}\right), \\ S(x) &= \frac{1}{2} - \frac{\sin x}{x\sqrt{x}} f_4\left(\frac{x}{8}\right) - \frac{\cos x}{\sqrt{x}} f_3\left(\frac{x}{8}\right). \end{aligned} \tag{5.1}$$

Результаты дробно-рациональных приближений для функций $f_1(t), \ldots, f_4(t)$ приведены в таблицах 2,3,4 и 5. В этих таблицах приводятся значения $\lambda \approx \max\limits_{t\in[0,1]} |f_i(x) - R^*_{l,m}(t^2)|$ для $1 \le l \le 7$, $0 \le m \le 7$. Символом $*$ обозначено наилучшее приближение из таблицы при фиксированном числе коэффициентов. Символ P означает расходимость алгоритма.

Из приведенных таблиц видно, что для $f_1(t)$ и $f_2(t)$ существенного улучшения алгоритма с помощью дробно-линейных приближений добиться нельзя.

Для $f_3(t)$ и $f_4(t)$ при $l = m = 3$ существуют достаточно хорошие приближения.

Для $f_3(t)$

$$\begin{aligned} R_3(t) = {} & \frac{0.3989422804 + 0.6051068615t^2 + 0.1661805811t^4}{1 + 1.528496698t^2 + 0.4328633506t^4 + 0.01615472133t^6} \\ & + \frac{0.00515296899t^6}{1 + 1.528496698t^2 + 0.4328633506t^4 + 0.01615472133t^6}, \end{aligned}$$

для $f_4(t)$

$$\begin{aligned} R_3(t) = {} & \frac{0.1994711398 + 0.3703941275t^3 + 0.126890305t^4}{1 + 1.915474243t^2 + 0.7339567627t^4 + 0.04516091093t^6} \\ & + \frac{0.004349819078t^6}{1 + 1.915474243t^2 + 0.7339567627t^4 + 0.04516091093t^6}. \end{aligned}$$

Чтобы проверить точность приближения функций $f_3(t)$ и $f_4(t)$ функциями $R_3(t)$ и $R_4(t)$, были сосчитаны $\delta_3(t_i) = |f_3(t_i) - R_3(t_i)|$

и $\delta_4(t_i) = |f_4(t_i) - R_4(t_i)|$ в точках $t_i = \dfrac{i}{200}$, $i = 0, 1, \ldots, 200$. Оказалось, что

$$\max_i \delta_3(t_i) \le 9.92 \cdot 10^{-11},$$
$$\max_i \delta_4(t_i) \le 3.40 \cdot 10^{-10}.$$

Считая, что

$$\max_{t\in[0,1]} |f_3(t) - R_3(t)| \le 9.92 \cdot 10^{-11},$$
$$\max_{t\in[0,1]} |f_4(t) - R_4(t)| \le 3.40 \cdot 10^{-10},$$

и заменяя $f_3\left(\dfrac{8}{x}\right)$ и $f_4\left(\dfrac{8}{x}\right)$ на соответствующие дробно-рациональные приближения, из (5.1) будем иметь

$$|C(x) - \widetilde{C}(x)| \le \frac{1}{\sqrt{x}}\left(9.92|\sin x| + \frac{34.0}{x}|\cos x|\right)10^{-11} < 4.96 \cdot 10^{-11},$$
$$|S(x) - \widetilde{S}(x)| \le \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{34.0}{x}|\cos x| + 9.92|\sin x|\right)10^{-11} < 4.96 \cdot 10^{-11},$$

где

$$\widetilde{C}(x) = \frac{1}{2} + \frac{\sin x}{\sqrt{x}} R_3\left(\frac{x}{8}\right) - \frac{\cos x}{x\sqrt{x}} R_4\left(\frac{x}{8}\right),$$
$$\widetilde{S}(x) = \frac{1}{2} - \frac{\sin x}{x\sqrt{x}} R_4\left(\frac{x}{8}\right) - \frac{\cos x}{\sqrt{x}} R_3\left(\frac{x}{8}\right).$$

Таким образом, используя дробно-рациональные приближения при $x \in [8, \infty)$, можно существенно сократить число операций.

Л И Т Е Р А Т У Р А

[1] G. NÉMETH. Chebyshev expansions for Fresnel integrals. Numer. Math., 1965, 7, № 4, 310–312.
[2] Е. ЯНКЕ, Ф. ЭМДЕ, Ф. ЛЕШ. Специальные функции, "Наука", 1968.
[3] И.С. ГРАДШТЕЙН, И.М. РЫЖИК. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, "Наука", 1971.
[4] Н.С. БАХВАЛОВ. Об устойчивом вычислении значений многочленов. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1971, 11, № 6, I568–1574.
[5] W.J. CODY, W. FRASER, and J.F. HART. Rational Chebyshev approximation user linear equations. Numer. Math., 1968, 12, № 4, 242–252.

Таблицы

Таблица 1

Для ρ_n:

$c_0 = 0.10 \cdot 10^{-10}$	$d_0 = 0.4 \cdot 10^{-11}$
$c_1 = -0.366 \cdot 10^{-9}$	$d_1 = -0.128 \cdot 10^{-9}$
$c_2 = 0.10898 \cdot 10^{-7}$	$d_2 = 0.4206 \cdot 10^{-8}$
$c_3 = -0.267681 \cdot 10^{-6}$	$d_3 = -0.115070 \cdot 10^{-6}$
$c_4 = 0.5276080 \cdot 10^{-5}$	$d_4 = 0.2562196 \cdot 10^{-5}$
$c_5 = -0.81056841 \cdot 10^{-4}$	$d_5 = -0.45321924 \cdot 10^{-4}$
$c_6 = 0.933990129 \cdot 10^{-3}$	$d_6 = 0.617430236 \cdot 10^{-3}$
$c_7 = -0.7651297534 \cdot 10^{-2}$	$d_7 = -0.6220184292 \cdot 10^{-2}$
$c_8 = 0.41140949487 \cdot 10^{-1}$	$d_8 = 0.43868192558 \cdot 10^{-1}$
$c_9 = -0.127133929270$	$d_9 = -0.200717449332$
$c_{10} = 0.174360773295$	$d_{10} = 0.538666617980$
$c_{11} = -0.80811186046 \cdot 10^{-1}$	$d_{11} = -0.799616840492$
$c_{12} = 0.547910386743$	$d_{12} = 1.053859157204$

Для γ_n:

$c_0 = 0.10 \cdot 10^{-11}$	$d_0 = 0.2 \cdot 10^{-11}$
$c_1 = -0.4 \cdot 10^{-11}$	$d_1 = -0.6 \cdot 10^{-11}$
$c_2 = 0.14 \cdot 10^{-10}$	$d_2 = 0.18 \cdot 10^{-10}$
$c_3 = -0.54 \cdot 10^{-10}$	$d_3 = -0.72 \cdot 10^{-10}$
$c_4 = 0.239 \cdot 10^{-9}$	$d_4 = 0.298 \cdot 10^{-9}$
$c_5 = -0.1176 \cdot 10^{-8}$	$d_5 = -0.1346 \cdot 10^{-8}$
$c_6 = 0.6545 \cdot 10^{-8}$	$d_6 = 0.6798 \cdot 10^{-8}$
$c_7 = -0.42829 \cdot 10^{-7}$	$d_7 = -0.39518 \cdot 10^{-7}$
$c_8 = 0.347441 \cdot 10^{-6}$	$d_8 = 0.275996 \cdot 10^{-6}$
$c_9 = -0.3810219 \cdot 10^{-5}$	$d_9 = -0.2475448 \cdot 10^{-5}$
$c_{10} = 0.66275081 \cdot 10^{-4}$	$d_{10} = 0.32029670 \cdot 10^{-4}$
$c_{11} = -0.2617529549 \cdot 10^{-2}$	$d_{11} = -0.755202944 \cdot 10^{-3}$
$c_{12} = 0.944548822473$	$d_{12} = 0.60881924150 \cdot 10^{-1}$

Таблица 2

$f_1(t)$

$m \backslash l$	1	2	3	4
0	$2.36 \cdot 10^{-1}*$	$1.18 \cdot 10^{-1}*$	$3.47 \cdot 10^{-2}$	$6.26 \cdot 10^{-3}$
1	P	$2.95 \cdot 10^{-2}*$	$4.23 \cdot 10^{-3}*$	$3.85 \cdot 10^{-4}*$
2	$5.20 \cdot 10^{-2}$	P	$6.62 \cdot 10^{-4}$	$3.14 \cdot 10^{-5}$
3	P	$2.50 \cdot 10^{-3}$	$1.00 \cdot 10^{-4}$	$2.72 \cdot 10^{-6}$
4	P	$3.45 \cdot 10^{-4}$	$1.64 \cdot 10^{-5}$	$2.37 \cdot 10^{-7}$
5	P	$3.80 \cdot 10^{-5}$	$3.18 \cdot 10^{-6}$	$2.00 \cdot 10^{-8}$
6	P	$1.56 \cdot 10^{-6}$	$8.44 \cdot 10^{-7}$	$1.59 \cdot 10^{-9}$
7	P	$8.22 \cdot 10^{-7}$	P	P

$m \backslash l$	5	6	7
0	$7.55 \cdot 10^{-4}$	$6.52 \cdot 10^{-5}$	$4.23 \cdot 10^{-6}$
1	$2.63 \cdot 10^{-5}*$	$1.41 \cdot 10^{-6}$	$6.06 \cdot 10^{-8}$
2	$1.28 \cdot 10^{-6}*$	$4.47 \cdot 10^{-8}*$	$1.33 \cdot 10^{-9}*$
3	$7.00 \cdot 10^{-8}$	$1.64 \cdot 10^{-9}$	$3.11 \cdot 10^{-11}*$
4	$3.96 \cdot 10^{-9}$	$6.44 \cdot 10^{-11}$	P
5	$2.23 \cdot 10^{-10}$	P	P
6	$3.45 \cdot 10^{-8}*$	P	P
7	$2.88 \cdot 10^{-11}*$	P	P

Таблица 3

$f_2(t)$

$m \backslash l$	1	2	3	4
0	$6.55 \cdot 10^{-2}*$	$2.16 \cdot 10^{-2}$	$4.53 \cdot 10^{-3}$	$6.31 \cdot 10^{-4}$
1	$1.31 \cdot 10^{-2}*$	$2.85 \cdot 10^{-3}*$	$3.30 \cdot 10^{-4}*$	$2.63 \cdot 10^{-5}*$
2	P	$6.09 \cdot 10^{-4}$	$3.43 \cdot 10^{-5}$	$1.58 \cdot 10^{-6}*$
3	$3.65 \cdot 10^{-3}$	$1.27 \cdot 10^{-4}$	$3.81 \cdot 10^{-6}$	$1.05 \cdot 10^{-7}$
4	P	$1.93 \cdot 10^{-5}$	$4.25 \cdot 10^{-7}$	$7.25 \cdot 10^{-8}$
5	$1.04 \cdot 10^{-3}$	$2.35 \cdot 10^{-6}$	$4.93 \cdot 10^{-8}$	$4.98 \cdot 10^{-10}$
6	P	$2.44 \cdot 10^{-7}$	$6.23 \cdot 10^{-9}$	$3.35 \cdot 10^{-11}$
7	P	$1.94 \cdot 10^{-8}$	P	$1.35 \cdot 10^{-12}*$

$m \backslash l$	5	6	7
0	$6.22 \cdot 10^{-5}$	$4.55 \cdot 10^{-6}$	$2.56 \cdot 10^{-7}$
1	$1.59 \cdot 10^{-6}$	$7.64 \cdot 10^{-8}$	$2.98 \cdot 10^{-9}$
2	$6.07 \cdot 10^{-8}*$	$1.97 \cdot 10^{-9}*$	$5.41 \cdot 10^{-11}*$
3	$2.66 \cdot 10^{-9}$	$5.98 \cdot 10^{-11}$	P
4	$1.23 \cdot 10^{-10}$	$7.59 \cdot 10^{-13}*$	P
5	P	P	P
6	P	$1.01 \cdot 10^{-12}*$	P
7	P	P	P

Таблица 4

$f_3(t)$

$m \backslash l$	1	2	3	4
0	$5.33 \cdot 10^{-5}*$	$3.10 \cdot 10^{-6}$	$2.87 \cdot 10^{-7}$	$3.60 \cdot 10^{-8}$
1	$1.75 \cdot 10^{-6}*$	$1.08 \cdot 10^{-7}$	$9.65 \cdot 10^{-9}$	$1.13 \cdot 10^{-9}$
2	$1.01 \cdot 10^{-7}*$	$6.77 \cdot 10^{-9}*$	$5.97 \cdot 10^{-10}$	$6.62 \cdot 10^{-11}$
3	$9.01 \cdot 10^{-9}$	$5.70 \cdot 10^{-10}*$	$5.05 \cdot 10^{-11}*$	$5.82 \cdot 10^{-12}$
4	$1.06 \cdot 10^{-9}$	$6.27 \cdot 10^{-11}$	$5.10 \cdot 10^{-12}$	P
5	$1.55 \cdot 10^{-10}$	$1.31 \cdot 10^{-12}*$	P	$1.46 \cdot 10^{-12}*$
6	$2.60 \cdot 10^{-11}$	$4.25 \cdot 10^{-12}$	$3.65 \cdot 10^{-12}$	P
7	$4.75 \cdot 10^{-12}$	P	P	P

$m \backslash l$	5	6	7
0	$5.61 \cdot 10^{-9}$	$1.03 \cdot 10^{-9}$	$2.14 \cdot 10^{-10}$
1	$1.63 \cdot 10^{-10}$	$2.73 \cdot 10^{-11}$	$7.53 \cdot 10^{-12}$
2	$8.57 \cdot 10^{-12}$	$2.45 \cdot 10^{-14}*$	$2.03 \cdot 10^{-11}$
3	P	P	$4.77 \cdot 10^{-12}*$
4	P	P	P
5	P	P	P
6	P	P	P
7	$9.86 \cdot 10^{-13}*$	P	P

Таблица 5

$f_4(t)$

$m \backslash l$	1	2	3	4
0	$2.08 \cdot 10^{-4}*$	$1.63 \cdot 10^{-5}$	$1.85 \cdot 10^{-6}$	$2.70 \cdot 10^{-7}$
1	$7.43 \cdot 10^{-6}*$	$5.80 \cdot 10^{-7}$	$6.20 \cdot 10^{-8}$	$8.37 \cdot 10^{-9}$
2	$4.72 \cdot 10^{-7}*$	$3.76 \cdot 10^{-8}*$	$3.86 \cdot 10^{-9}$	$4.81 \cdot 10^{-10}$
3	$4.87 \cdot 10^{-8}$	$3.31 \cdot 10^{-9}*$	$3.26 \cdot 10^{-10}*$	$3.76 \cdot 10^{-11}$
4	$6.64 \cdot 10^{-9}$	$3.92 \cdot 10^{-10}$	$3.33 \cdot 10^{-11}*$	$8.29 \cdot 10^{-12}*$
5	$1.09 \cdot 10^{-9}$	$5.60 \cdot 10^{-11}$	$8.39 \cdot 10^{-12}$	P
6	$2.03 \cdot 10^{-10}$	$1.05 \cdot 10^{-11}$	$6.89 \cdot 10^{-12}$	$1.05 \cdot 10^{-12}$
7	$4.36 \cdot 10^{-11}$	$6.58 \cdot 10^{-12}$	$5.94 \cdot 10^{-12}$	P

$m \backslash l$	5	6	7
0	$4.73 \cdot 10^{-8}$	$9.57 \cdot 10^{-9}$	$2.16 \cdot 10^{-9}$
1	$1.34 \cdot 10^{-9}$	$2.45 \cdot 10^{-10}$	$5.12 \cdot 10^{-11}$
2	$6.92 \cdot 10^{-11}$	P	$6.81 \cdot 10^{-12}$
3	P	$6.69 \cdot 10^{-12}$	$6.41 \cdot 10^{-12}$
4	$5.81 \cdot 10^{-12}*$	$4.24 \cdot 10^{-13}*$	$3.10 \cdot 10^{-12}$
5	$9.89 \cdot 10^{-13}$	$3.09 \cdot 10^{-12}*$	P
6	$3.54 \cdot 10^{-12}$	P	P
7	P	P	P

Программа к § 4

```
_PROCEDURE CS(C,S,X);
_VALUE X:'REAL C,S,X;
'BEGIN 'INTEGER I;'REAL Z,H,Y,F,D,E,B;
'ARRAY A[1:26],RK,RL[1:13];Z:=ABS(X);_IF Z<8.0_THEN _BEGIN
A[1]:=⏨-11;A[2]:=-0.366⏨-9;A[3]:=0.10898⏨-7;A[4]:=-0.267681⏨-6;
A[5]:=0.527608⏨-5;A[6]:=-0.81056841⏨-4;A[7]:=0.933990129⏨-3;
A[8]:=-0.007651297534;A[9]:=0.041140949487;A[10]:=-0.12713392927;
A[11]:=0.174360773295;A[12]:=-0.080811186046;A[13]:=0.547910386743;
A[14]:=0.4⏨-11;A[15]:=-0.128⏨-9;A[16]:=0.4206⏨-8;A[17]:=-0.11507 ⏨-6;
A[18]:=0.2562196⏨-5;A[19]:=-0.45321924⏨-4;A[20]:=0.617420236⏨-3;
A[21]:=-0.006220184292;A[22]:=0.4043868192558;A[23]:=-0.200717449332;
A[24]:=0.53866661798;A[25]:=-0.799616840492;A[26]:=1.053859157204;
H:=Z/8.0'END _ELSE _BEGIN
A[1]:=0.1⏨-11;A[2]:=-0.4⏨-11;A[3]:=0.14⏨-10;A[4]:=-0.54⏨-10;
A[5]:=0.239⏨-9;A[6]:=-0.1176⏨-8;A[7]:=0.6545⏨-8;
A[8]:=-0.42829⏨-7;A[9]:=0.347441⏨-6;A[10]:=-0.3810219⏨-5;
A[11]:=0.66275081⏨-4;A[12]:=-0.002617529549;A[13]:=0.994548822473;
A[14]:=0.2⏨-11;A[15]:=-0.6⏨-11;A[16]:=0.18⏨-10;A[17]:=-0.72 ⏨-10;
A[18]:=0.298⏨-9;A[19]:=-0.1346⏨-8;A[20]:=0.6798⏨-8;
A[21]:=-0.39518⏨-7;A[22]:=0.275996⏨-6;A[23]:=-0.2475448⏨-5;
A[24]:=0.3202967⏨-4;A[25]:=-0.755202944⏨-3;A[26]:=0.06088192415;
H:=8.0/Z'END ;Y:=4.0*H*H-2.0;
RK[1]=A[1];RK[2]:=Y*RK[1]+A[2];
RL[1]:=A[14];RL[2]:=Y*RL[1]+A[15];
'FOR I:=3'STEP 1'UNTIL 13_DO
_BEGIN RK[I]:=Y*RK[I-1]-RK[I-2]+A[I];
RL[I]:=Y*RL[I-1]-RL[I-2]+A[I+13]_END ;
F:=0.398942280401;D:=F*RK[13];E:=F*RL[13]*H;B:=SQRT(Z);
_IF Z<8.0'THEN _ C:=D*B;S:=F*B_END
_ELSE 'BEGIN Y:=SIN(Z);H:=COS(Z);
C:=0.5+(C*Y-E*H)/B;S:=0.5-(E*Y+D*H)/B_END _END;
```