УДК 517.53

О НАИЛУЧШИХ И ОПТИМАЛЬНЫХ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛАХ НА КЛАССАХ ОГРАНИЧЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

К. Ю. ОСИПЕНКО

§1. Введение

Пусть G — односвязная область в комплексной плоскости, симметричная относительно вещественной оси. Обозначим через $A(G)$ класс аналитических в G функций, ограниченных там по модулю единицей. Рассматривается задача приближенного вычисления интеграла

$$I(f)=\int_a^b f(x)p(x)\,dx,$$

где $f\in A(G)$, $(a,b)\subset G$, а p — некоторый вещественный неотрицательный вес, по значениям функции f и ее производных в некоторой системе узлов.

Обозначим через

$$Z=\begin{pmatrix} z_1,\dots,z_n\\ \nu_1,\dots,\nu_n\end{pmatrix}$$

систему различных узлов $z_1,\dots,z_n\in G$ с кратностями $\nu_1,\dots,\nu_n$. Положим $N=\sum_{j=1}^{N}\nu_j$. *Погрешностью наилучшего приближения интеграла $I(f)$ на классе $A(G)$ для данной системы Z и веса p* будем называть величину

$$(1.1)\quad r(G,Z,p)=\inf_S\sup_{f\in A(G)}\Big|I(f)-S(f(z_1),\dots,f^{(\nu_1-1)}(z_1),\dots,f(z_n),\dots,f^{(\nu_n-1)}(z_n)\Big|,$$

где нижняя грань берется по всевозможным функциям (методам) $S\colon\mathbb{C}^N\to\mathbb{C}$. Метод S_0 будем называть *наилучшим для данной системы Z и веса p*, если на нем достигается нижняя грань в равенстве (1.1).

Известно [1], что для величины (1.1) имеет место равенство

$$(1.2)\qquad r(G,Z,p)=\sup_{\substack{f\in A(G)\\ f^{(k)}(z_j)=0,\ j=1,\dots,n,\ k=0,\dots,\nu_j-1}}|I(f)|,$$

а среди наилучших методов существует линейный. Тем самым задача о построении наилучшего метода сводится к задаче о нахождении наилучшей квадратурной формулы

$$I(f) \approx \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{\nu_j-1} a_{jk} f^{(k)}(z_j).$$

В рассматриваемой задаче от произвольной области G можно перейти к некоторой фиксированной области Q, удовлетворяющей тем же условиям, что и область G, например, единичному кругу $D = \{z : |z| < 1\}$ или внутренности эллипса $Э_c$ с фокусами в точках ± 1 и суммой полуосей c. Действительно, если $z = \alpha(w)$ — конформное отображение области Ω на G, переводящее точки вещественной оси в точки вещественной оси, $a = \alpha(a_1)$, $b = \alpha(b_1)$, то исходная задача сведется к задаче построения на классе функций $g \in A(\Omega)$ наилучшей квадратурной формулы

$$\int_{a_1}^{b_1} g(x)q(x)\,dx \approx \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{\nu_j-1} b_{jk} g^{(k)}(w_j),$$

где $q(x) = p(\alpha(x))\alpha'(x)$ (отображение α может быть выбрано так, что $\alpha'(x) > 0$ при $x \in \Omega \cap \mathbb{R}$), $g(x) = f(\alpha(x))$, а $\widetilde{z}_j = \alpha(w_j)$.

Положим $A_c = A(Э_c)$, $B = A(D)$. В § 2 для произвольной системы Z с четными ν_j, $j = 1, \ldots, n$, строится наилучшая на классе B квадратурная формула. Построены также наилучшие квадратурные формулы на классе A_c при $\nu_j < 2$, $j = 1, \ldots, n$, для $p_1(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ по узлам $\left\{\cos\dfrac{2j-1}{2n}\pi\right\}_{j=1}^{n}$ и для некоторого веса $p_2(x) \to \sqrt{1-x^2}$ при $c \to \infty$ по узлам $\left\{\cos\dfrac{j\pi}{n+1}\right\}_{j=1}^{n}$. Построенные квадратурные формулы при $c \to \infty$ переходят в квадратурные формулы Гаусса для соответствующих весов.

Обозначим через

$$R(G, \nu, p) = \inf_{a \le z_1 < \ldots < z_n \le b} r(G, Z, p). \tag{1.3}$$

Если на точках $a \le z_1^0 < \ldots < z_n^0 \le b$ достигается нижняя грань в равенстве (1.3), то наилучшую квадратурную формулу по этой системе точек с кратностями $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ будем называть *оптимальной для данных p и ν*. Задачам оценки величины $R(G, \nu, p)$ и доказательству существования оптимальной квадратурной формулы были посвящены работы [2–4]. Особо пристальное внимание уделялось случаю, когда $G = D$ и $(a, b) = (-1, 1)$. Соответствующие результаты и ссылки можно найти в работе [5].

В § 3 изучается вопрос о единственности оптимальных узлов. Оказывается, что в общем случае единственности нет. Тем не менее, для достаточно больших c на классе A_c доказана единственность оптимальных узлов. Показано также, что квадратурные формулы, построенные в § 2 и являющиеся оптимальными по порядку, являются оптимальными при достаточно больших c.

Построение оптимальных квадратурных формул приводит к необходимости исследования рациональных функций, аналогичных в некотором смысле ортогональным многочленам. В § 3 построены рациональные функции, являющиеся аналогами многочленов Чебышева первого и второго рода. Отмечена также связь рассматриваемых задач с n-поперечниками.

Поскольку значения функций, как правило, бывают известны с некоторыми ошибками, то возникает задача нахождения погрешности метода с учетом этих ошибок. Рассмотрим случай, когда $\nu = (1, \ldots, 1)$. Будем считать, что для любой функции $f \in A(G)$ известны значения f_j, для которых $|f(z_j) - f_j| \le \delta$, $j = 1, \ldots, n$. *Погрешностью метода интегрирования* S назовем величину

$$\rho(G, Z, p, \delta, S) = \sup_{f \in A(G)} \sup_{\substack{f_j \\ |f(z_j)-f_j| \le \delta,\ j=1,\ldots,n}} |I(f) - S(f_1, \ldots, f_n)|. \tag{1.4}$$

Величину

$$r(G, Z, p, \delta) = \inf_S \rho(G, Z, p, \delta, S), \tag{1.5}$$

где нижняя грань берется по всевозможным методам $S\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, будем называть *погрешностью наилучшего приближения интеграла $I(f)$ по значениям в узлах системы Z, заданным с ошибкой δ*. Эта величина при $\delta = 0$ совпадает с величиной (1.1) для $\nu = (1, \ldots, 1)$. Метод, на котором достигается нижняя грань в равенстве (1.5) будем называть *наилучшим для данного δ*.

В задаче (1.5) имеет место равенство, аналогичное (1.2) (см. [6, 7]),

$$r(G, Z, p, \delta) = \sup_{\substack{f \in A(G) \\ f(z_j) \le \delta,\ j=1,\ldots,n}} |I(f)|. \tag{1.6}$$

Кроме того, среди наилучших методов также существует линейный, т. е.квадратурная формула.

В § 4 находятся полные погрешности квадратурных формул, построенных в § 2, при использовании значений функций, заданных с погрешностью δ. Показано также, что найденные погрешности отличаются от погрешностей наилучшего приближения на величину $O(\delta^2)$.

§2. Наилучшие квадратурные формулы

Рассмотрим задачу (1.1) на классе функций B, когда $-1 \le a < b \le 1$. Пусть Z — система различных точек $z_1, \ldots, z_n$ из интервала

$(-1,1)$ с кратностями $\nu_1,\dots,\nu_n$. Положим

$$W_j(z)=\frac{z-z_j}{1-z_jz},\quad \Phi(z)=\prod_{j=1}^n W_j^{\nu_j}(z),\quad \Phi_j(z)=\Phi(z)/W_j^{\nu_j}(z).$$

Теорема 2.1. *При четных ν_j, $j=1,\dots,n$, квадратурная формула*

$$I(f)\approx\sum_{j=1}^n\sum_{k=0}^{\nu_j-1}a_{jk}f^{(k)}(z_j), \tag{2.1}$$

где

$$a_{jk}=\int_a^b D_{jk}(x)p(x)\,dx,$$

$$D_{jk}(x)=\frac{\Phi(x)(1-x^2)}{k!(\nu_j-k-1)!}\cdot\frac{\partial^{\nu_j-k-1}}{\partial\xi^{\nu_j-k-1}}\left[\frac{(1-z_j\xi)^{\nu_j}}{\Phi_j(\xi)(1-x\xi)(x-\xi)}\right]\Big|_{\xi=z_j}, \tag{2.2}$$

является наилучшим методом в задаче (1.1) *на классе B. Для ее погрешности справедливо равенство*

$$r(D,Z,p)=\int_a^b\Phi(x)p(x)\,dx. \tag{2.3}$$

Доказательство. Для функций $f\in B$ при любом $x\in(-1,1)$ с помощью теоремы о вычетах получаем (см. [7, с. 39], [8])

$$f(x)-\sum_{j=1}^n\sum_{k=0}^{\nu_j-1}D_{jk}(x)f^{(k)}(z_j)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=1}\frac{\Phi(x)(1-x^2)f(\xi)}{\Phi(\xi)(1-x\xi)(\xi-x)}\,d\xi, \tag{2.4}$$

где

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\nu_j-1}&D_{jk}(x)f^{(k)}(z_j)\\&=\frac{\Phi(x)(1-x^2)}{(\nu_j-1)!}\cdot\frac{\partial^{\nu_j-1}}{\partial\xi^{\nu_j-1}}\left[\frac{f(\xi)(1-z_j\xi)^{\nu_j}}{\Phi_j(\xi)(1-x\xi)(x-\xi)}\right]\Big|_{\xi=z_j}\\&=\frac{\Phi(x)(1-x^2)}{(\nu_j-1)!}\sum_{k=0}^{\nu_j-1}C_{\nu_j-1}^kf^{(k)}(z_j)\\&\qquad\times\frac{\partial^{\nu_j-k-1}}{\partial\xi^{\nu_j-k-1}}\left[\frac{(1-z_j\xi)^{\nu_j}}{\Phi_j(\xi)(1-x\xi)(x-\xi)}\right]\Big|_{\xi=z_j}.\end{aligned}$$

Отсюда следуют равенства (2.2). Из равенства (2.4) имеем

$$\left|f(x)-\sum_{j=1}^n\sum_{k=0}^{\nu_j-1}D_{jk}(x)f^{(k)}(z_j)\right|\le\Phi(x)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-x^2}{|e^{i\theta}-x|^2}\,d\theta=\Phi(x).$$

Таким образом,

$$r(D, Z, p) \le \sup_{f\in B}\left| I(f) - \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{\nu_j-1} D_{jk}(x) f^{(k)}(z_j)\right| \le \int_a^b \Phi(x)p(x)\,dx.$$

С другой стороны, $\Phi(z) \in B$ и из равенства (1.2) вытекает

$$r(D, Z, p) \ge \int_a^b \Phi(x)p(x)\,dx.$$

Теорема доказана. □

Отметим, что наилучшая квадратурная формула (2.1) может быть получена интегрированием наилучшего метода восстановления на классе B_0 — подмножестве функций из B, вещественных на вещественной оси (см. [9]).

Обозначим через

$$W(z) = \prod_{j=1}^{n} W_j(z), \quad \omega_j(z) = W(z)/W_j(z).$$

Используя равенства (2.2) и (2.3), получаем

Следствие 2.1. *При* $\nu_1 = \ldots = \nu_n = 2$ *квадратурная формула* (2.1), *в которой*

$$a_{j1} = \int_a^b \frac{\omega_j^2(x)W_j(x)}{\omega_j^2(z_j)W_j'(z_j)}[1 - W_j^2(x)]p(x)\,dx,$$
$$a_{j0} = \int_a^b \frac{\omega_j^2(x)}{\omega_j^2(z_j)}[1 - W_j^4(x)]p(x)\,dx - 2\frac{\omega_j'(z_j)}{\omega_j(z_j)}a_{j1},$$

является наилучшим методом в задаче (1.1) *для класса* B. *Для ее погрешности справедливо равенство*

$$r(D, Z, p) = \int_a^b W^2(x)p(x)\,dx. \tag{2.5}$$

Утверждение этого следствия для класса B_0 и $p(x) = 1$ было доказано в работе [10].

Лемма 2.1. *Пусть* $z_1, \ldots, z_n$ *— различные точки интервала* $(-1, 1)$, *а функция* $g(\xi)$ *аналитична в* $\overline{\mathbb{C}}$ *за исключением, быть может, точек* z_j^{-1}, *в которых она может иметь полюсы порядка не выше* ν_j. *Тогда при всех* $x \in (-1, 1)$ *имеет место равенство*

$$g(x) - \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{\nu_j-1} D_{jk}(x) g^{(k)}(z_j) = \Phi^2(x) g(x^{-1}). \tag{2.6}$$

Доказательство леммы получается непосредственным применением при фиксированном $x \in (-1,1)$ теоремы о полной сумме вычетов к функции

$$\frac{\Phi(x)(1-x^2)g(\xi)}{\Phi(\xi)(1-x\xi)(\xi-x)}.$$

Применяя лемму 2.1 к функции $g(\xi) = 1$, получаем при всех $x \in (-1,1)$

$$\sum_{j=1}^{n} D_{j0}(x) = 1 - \Phi^2(x).$$

Отсюда

$$\sum_{j=1}^{n} a_{j0} = \int_a^b [1 - \Phi^2(x)] p(x)\, dx. \tag{2.7}$$

Рассмотрим теперь функции $g_j(x) = \dfrac{\omega_j(x)}{\omega_j(z_j)}[1 - W_j^2(x)]$. При $\nu_1 = \ldots = \nu_n = 2$ из равенства (2.6) имеем

$$g_j(x) - D_{j0}(x) - \sum_{l=1}^{n} D_{l1}(x) g_j'(z_j) = -W^2(x) g_j(x).$$

Следовательно,

$$a_{j0} = \int_a^b g_j(x)[1 + W^2(x)] p(x)\, dx - \sum_{l=1}^{n} a_{l1} g_j'(z_l). \tag{2.8}$$

Теорема 2.2. *Пусть* $-1 \le a < b \le 1$ *и система различных узлов* $z_1, \ldots, z_n$ *из интервала* $(-1,1)$ *такова, что*

$$\int_a^b W^2(x) \frac{1 - W_j^2(x)}{W_j(x)} p(x)\, dx = 0, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{2.9}$$

Тогда квадратурная формула

$$I(f) \approx \sum_{j=1}^{n} a_j f(z_j), \tag{2.10}$$

где a_j *определены равенствами*

$$\begin{aligned} a_j &= \int_a^b \frac{\omega_j^2(x)}{\omega_j^2(z_j)}[1 - W_j^4(x)] p(x)\, dx \\ &= \int_a^b \frac{\omega_j(x)}{\omega_j(z_j)}[1 - W_j^2(x)][1 + W^2(x)] p(x)\, dx, \end{aligned} \tag{2.11}$$

является наилучшим методом на классе B для задачи (1.1) *при* $\nu_j \le 2$, $j = 1, \dots, n$. *Для погрешности этой квадратурной формулы справедливо равенство* (2.5). *Имеет место также равенство*

$$\sum_{j=1}^{n} a_j = \int_a^b [1 - W^4(x)] p(x)\, dx. \tag{2.12}$$

Доказательство. Положим $Z_2 = \begin{pmatrix} z_1, \dots, z_n \\ 2, \dots, 2 \end{pmatrix}$. Из следствия 2.1

$$r(D, Z_2, p) = \int_a^b W^2(x) p(x)\, dx,$$

а в силу того, что условия (2.9) означают равенство нулю коэффициентов a_{j1}, $j = 1, \dots, n$, наилучшим методом является квадратурная формула (2.10), где

$$a_j = \int_a^b \frac{\omega_j^2(x)}{\omega_j^2(z_j)} [1 - W_j^4(x)] p(x)\, dx.$$

Равенство (2.12) следует из (2.7), а из равенства (2.8) получается еще одно представление для коэффициентов a_j. Пусть теперь Z — система узлов $z_1, \dots, z_n$ с кратностями $\nu_j \le 2$, $j = 1, \dots, n$. Тогда имеем

$$r(D, Z_2, p) = \sup_{f \in B} \left| I(f) - \sum_{j=1}^{n} a_j f(z_j) \right| \ge r(D, Z, p) \ge r(D, Z_2, p).$$

Теорема доказана. □

Обозначим через L, Λ, K полные эллиптические интегралы первого рода для модулей l, λ, k, соответственно, а через L', Λ', K' — для дополнительных модулей. Для системы точек $t_1, \dots, t_n$ положим

$$\varphi_j(t) = \frac{\operatorname{sn} t_j \operatorname{cn} t_j \operatorname{dn} t_j (1 - l^2 \operatorname{sn}^4 t)}{(\operatorname{sn}^2 t_j - \operatorname{sn}^2 t)(1 - l^2 \operatorname{sn}^2 t_j \operatorname{sn}^2 t)}, \quad j = 1, \dots, n. \tag{2.13}$$

Зависимость эллиптических функций Якоби от модуля будем отмечать лишь в случае, когда он отличен от l.

Лемма 2.2. *Пусть функция $f(x)$, определенная на отрезке $[-1, 1]$, такова, что функция $x^{-1} f(x)$ интегрируема на этом отрезке. Положим при $l \in [0, 1)$*

$$I_j = (-1)^{j+1} \int_0^L f(x(t)) \varphi_j(t)\, dt, \quad j = 1, \dots, n.$$

Тогда для всех $\lambda \in [0, 1)$ при $x(t) = \operatorname{sn}\left[\left(\frac{2nt}{L} + 1\right)\Lambda, \lambda\right]$, $t_j = \frac{2j-1}{2n} L$:

1) *если* $f(x)$ — *четная функция, то* $I_j = 0$, $j = 1, \dots, n$,

2) *если* $f(x)$ — *нечетная функция, то* $I_1 = \ldots = I_n$;

при $x(t) = \operatorname{sn}\left[\frac{2(n+1)t}{L}\Lambda, \lambda\right]$, $t_j = \frac{jL}{n+1}$ *имеет место утверждение* 1).

Доказательство. Используя известные в теории эллиптических функций тождества (см., например, [11]), получаем

$$\varphi_j(t) = \frac{1}{2}\left[\frac{\operatorname{cn}(t+t_j)\operatorname{dn}(t+t_j)}{\operatorname{sn}(t+t_j)} - \frac{\operatorname{cn}(t-t_j)\operatorname{dn}(t-t_j)}{\operatorname{sn}(t-t_j)}\right].$$

Пусть $\lambda \in [0,1)$, $x(t) = \operatorname{sn}\left[\left(\frac{2nt}{L}+1\right)\Lambda, \lambda\right]$ и $t_j = \frac{2j-1}{2n}L$. Если $f(x)$ — четная функция, то, сделав замены переменных $u = t + t_j$ и $u = t - t_j$ будем иметь

$$I_j = \frac{(-1)^{j+1}}{2}\left[\int_{t_j}^{L+t_j} \psi(u)\,du - \int_{-t_j}^{L-t_j} \psi(u)\,du\right], \tag{2.14}$$

где

$$\psi(u) = f\left(\operatorname{sn}\left[\frac{2nu}{L}\Lambda, \lambda\right]\right)\frac{\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u}.$$

Поскольку в этом случае для функции $\psi(u)$ будут справедливы равенства

$$\psi(-u) = -\psi(u), \quad \psi(L-u) = -\psi(L+u), \tag{2.15}$$

то из (2.14) нетрудно получить, что $I_j = 0$, $j = 1, \dots, n$. В случае, когда $f(x)$ — нечетная функция, сделав те же замены переменных, будем иметь

$$I_j = \frac{1}{2}\left[\int_{t_j}^{L+t_j} \psi(u)\,du + \int_{-t_j}^{L-t_j} \psi(u)\,du\right].$$

В этом случае функция $\psi(u)$ удовлетворяет равенствам $\psi(-u) = \psi(u)$, $\psi(L-u) = \psi(L+u)$. Отсюда следует, что $I_1 = \ldots = I_n = \int_0^L \psi(u)\,du$. В случае, когда $x(t) = \operatorname{sn}\left[\frac{2(n+1)t}{L}\Lambda, \lambda\right]$, $t_j = \frac{jL}{n+1}$, а $f(x)$ — четная функция, аналогичные замены приводят к равенствам (2.14), в которых

$$\psi(u) = f\left(x(u)\right)\frac{\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u}.$$

Для этой функции выполнены равенства (2.15), из которых с учетом (2.14) вытекает утверждение 1). Лемма доказана. $\square$

Теорема 2.3. *На классе функций A_c для веса $p_1(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ и системы*

$$T_1 = \begin{pmatrix} x_1, \dots, x_n \\ \nu_1, \dots, \nu_n \end{pmatrix},$$

где $x_j = \cos\dfrac{2j-1}{2n}\pi$, $\nu_j \le 2$, квадратурная формула

$$\int_{-1}^{1} f(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \approx \pi\frac{1-d_n(c)}{n}\sum_{j=1}^{n} f\left(\cos\frac{2j-1}{2n}\pi\right) \tag{2.16}$$

является наилучшей; здесь

$$d_n(c) = \frac{(\lambda^2+2)\Lambda - 2(\lambda^2+1)E}{3\lambda^2\Lambda} = 6c^{-4n} + O\left(c^{-8n}\right), \tag{2.17}$$

Λ и E — полные эллиптические интегралы первого и второго рода, соответственно, для модуля λ, определенного равенством

$$\frac{\Lambda'}{\Lambda} = \frac{4n}{\pi}\ln c.$$

Для погрешности наилучшей квадратурной формулы (2.16) *имеют место соотношения*

(2.18)

$$r(Э_c, T_1, p_1) = \pi\frac{\Lambda - E}{\lambda\Lambda} = 2\pi c^{-2n} + O\left(c^{-6n}\right), \quad r(Э_c, T_1, p_1) < 4\pi c^{-2n}.$$

Доказательство. Функция $v = \sqrt{k}\,\mathrm{sn}\left(\dfrac{2K}{\pi}\arcsin w, k\right)$, где k определяется из условия $\dfrac{K'}{K} = \dfrac{4}{\pi}\ln c$, отображает конформно эллипс $Э_c$ на единичный круг так, что отрезок $[-1,1]$ переходит в отрезок $[-\sqrt{k}, \sqrt{k}]$. Функция $z = (v-\sqrt{k})/(1-\sqrt{k}v)$ преобразует конформно единичный круг, при этом отрезок $[-\sqrt{k}, \sqrt{k}]$ переходит в отрезок $[-l, 0]$, где $l = 2\sqrt{k}/(1+k)$. С помощью преобразования Гаусса эллиптических функций [11, с. 134] можно показать, что

$$\frac{-l\,\mathrm{sn}^2 t - \sqrt{k}}{1-\sqrt{k}l\,\mathrm{sn}^2 t} = \sqrt{k}\,\mathrm{sn}\left[\left(1-\frac{2t}{L}\right)K, k\right].$$

Отсюда следует, что функция

$$z = -l\,\mathrm{sn}^2\left(\frac{L}{\pi}\arccos w\right) \tag{2.19}$$

отображает конформно эллипс $Э_c$ на единичный круг, а отрезок $[-1,1]$ при этом отображении переходит в отрезок $[-l, 0]$, где l удовлетворяет условию $\dfrac{L'}{L} = \dfrac{2}{\pi}\ln c$. Это отображение переводит систему T_1 в систему $Z_1 = \begin{pmatrix} z_1, \dots, z_n \\ \nu_1, \dots, \nu_n \end{pmatrix}$, где $z_j = -l\,\mathrm{sn}^2\dfrac{2j-1}{2n}L$. Таким образом, исходная задача сводится к построению наилучшей квадратурной формулы на классе B по системе Z_1 для интеграла

$$\int_{-l}^{0} g(x)q_1(x)\,dx, \quad q_1(x)=\frac{\pi}{2L}[-x(l+x)(1+lx)]^{-1/2}.$$

Покажем, что для точек $z_1,\dots,z_n$ и веса $q_1(x)$ выполняются условия (2.9). Рассмотрим величины

$$A_j=\int_{-l}^{0} W^2(x)\frac{1-W_j^2(x)}{W_j(x)}q_1(x)\,dx = \int_{-l}^{0} W^2(x)\frac{(1-x^2)(1-z_j^2)}{(x-z_j)(1-z_jx)}q_1(x)\,dx.$$

Делая замену $x=-l\operatorname{sn}^2 t$, получаем

$$A_j=\frac{2\pi}{lL\operatorname{sn}2t_j}\int_0^L W^2(-l\operatorname{sn}^2 t)\varphi_j(t)\,dt,$$

где $\varphi_j(t)$ определены равенствами (2.13) при $t_j=\dfrac{2j-1}{2n}L$. Функцию

$$W(-l\operatorname{sn}^2 t)=\prod_{j=1}^{n}\frac{l\operatorname{sn}^2 t_j-l\operatorname{sn}^2 t}{1-l^2\operatorname{sn}^2 t_j\operatorname{sn}^2 t} \tag{2.20}$$

с помощью первого главного преобразования $2n$-й степени (см. [11]) можно записать в виде

$$W(-l\operatorname{sn}^2 t)=\sqrt{\lambda}\operatorname{sn}\left[\left(\frac{2nt}{L}+1\right)\Lambda,\lambda\right]; \tag{2.21}$$

здесь λ определяется из равенств

$$\frac{\Lambda'}{\Lambda}=2n\frac{L'}{L}=\frac{4n}{\pi}\ln c.$$

Отсюда, используя лемму 2.2, получаем, что $A_1=\ldots=A_n=0$. Из теоремы 2.2 вытекает, что квадратурная формула (2.10) является наилучшей. Для нахождения ее коэффициентов воспользуемся вторым из равенств (2.11). В силу того, что

$$\omega_j(z_j)=\frac{W'(z_j)}{W_j'(z_j)}=(-1)^{j+1}\frac{\sqrt{\lambda}\Lambda n(1-l^2\operatorname{sn}^4 t_j)}{lL\operatorname{sn}t_j\operatorname{cn}t_j\operatorname{dn}t_j},$$

после замены $x=-l\operatorname{sn}^2 t$, получаем

$$a_j=(-1)^{j+1}\frac{\pi}{\Lambda n}\int_0^L f(x(t))\varphi_j(t)\,dt,$$

где $f(x)=x(1+\lambda x^2)$, $x(t)=\operatorname{sn}\left[\left(\dfrac{2nt}{L}+1\right)\Lambda,\lambda\right]$. Из леммы 2.2 следует, что $a_1=\ldots=a_n$. Таким образом, учитывая равенства

(2.12), (2.21), имеем

$$a_j = \frac{1}{n}\int_{-l}^{0}[1-W^4(x)]q_1(x)\,dx$$
$$= \frac{\pi}{Ln}\int_0^L \left\{1-\lambda^2\,\mathrm{sn}^4\left[\left(\frac{2nt}{L}+1\right)\Lambda,\lambda\right]\right\}dt$$
$$= \frac{\pi}{n}\left[1-\frac{\lambda^2}{2n}\int_1^{2n+1}\mathrm{sn}^4(u\Lambda,\lambda)\,du\right].$$

Нетрудно показать, что при любых целых m и $r>0$ справедливо равенство

$$\int_m^{m+1}\mathrm{sn}^{2r}(u\Lambda,\lambda)\,du = \int_0^1 \mathrm{sn}^{2r}(u\Lambda,\lambda)\,du. \tag{2.22}$$

Тем самым

$$a_j = \frac{\pi}{n}[1-d_n(c)],$$

где

$$d_n(c) = \lambda^2\int_0^1 \mathrm{sn}^4(u\Lambda,\lambda)\,du = \frac{\lambda^2}{\Lambda}\int_0^1\frac{t^4\,dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-\lambda^2t^2)}}.$$

Выражая последний интеграл через полные эллиптические интегралы первого и второго рода (см. [12, с. 47]), получим первое из соотношений (2.17). Разлагая полные эллиптические интегралы Λ и E по степеням модуля λ [11, с. 152], будем иметь $d_n(c)=\dfrac{3}{8}\lambda^2+O(\lambda^4)$. Из известного в теории эллиптических функций равенства

$$\sqrt{k} = 2h^{1/4}\frac{\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}h^{m(m+1)}}{\displaystyle 1+2\sum_{m=1}^{\infty}h^{m^2}}, \quad h = e^{-\frac{\pi\Lambda'}{\Lambda}},$$

для $\lambda\in(0,1)$ следуют соотношения

$$\lambda = 4h^{1/2}+O(h^{3/2}), \quad h^{1/4}<\sqrt{\lambda}<2h^{1/4}. \tag{2.23}$$

Поскольку $h=c^{-4n}$, то

$$\lambda = 4c^{-2n}+O(c^{-6n}), \quad \lambda<4c^{-2n}. \tag{2.24}$$

Отсюда следует второе из соотношений (2.17). Из теоремы 2.2, равенств (2.21), (2.22) и (2.24) имеем

$$r(Э_c,T_1,p_1) = r(D,Z_1,q_1) = \pi\lambda\int_0^1\mathrm{sn}^2(u\Lambda,\lambda)\,du$$
$$= \pi\frac{\Lambda-E}{\lambda\Lambda} = \frac{\pi}{2}\lambda+O(\lambda^3) = 2\pi c^{-2n}+O\left(c^{-6n}\right).$$

В силу того, что $\operatorname{sn}^2(u\Lambda, \lambda) < 1$ при $u \in (0,1)$,

$$r(\mathcal{Э}_c, T_1, p_1) < \pi\lambda < 4\pi c^{-2n}.$$

Теорема доказана. □

Теорема 2.4. *На классе функций A_c для веса*

$$p_2(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \operatorname{sn}^2\left(\frac{2K}{\pi}\arccos x, k\right),$$

где k определено равенством $\dfrac{K'}{K} = \dfrac{4}{\pi}\ln c$, и системы

$$T_2 = \begin{pmatrix} x_1, \dots, x_n \\ \nu_1, \dots, \nu_n \end{pmatrix},$$

где $x_j = \cos\dfrac{j\pi}{n+1}$, $\nu_j \le 2$, квадратурная формула

$$\int_{-1}^{1} f(x)p_2(x)\,dx \approx \sum_{j=1}^{n} a_j f\left(\cos\frac{j\pi}{n+1}\right), \tag{2.25}$$

в которой

$$a_j = \pi L C_j^2 \int_o^L \operatorname{sn}^2\left[\frac{2(n+1)t}{L}\Lambda, \lambda\right] \frac{1 - l^4 \operatorname{sn}^4(t-t_j)\operatorname{sn}^4(t+t_j)}{\operatorname{sn}^2(t-t_j)\operatorname{sn}^2(t+t_j)}\,dt,$$

$$C_j = \frac{\operatorname{sn} t_j \operatorname{cn} t_j \operatorname{sn} 2t_j}{(k+1)(n+1)\Lambda \operatorname{dn} t_j}, \quad l = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}, \quad t_j = \frac{jL}{n+1},$$

а λ определяется из условия

$$\frac{\Lambda'}{\Lambda} = \frac{4(n+1)}{\pi}\ln c,$$

является наилучшей. Для ее погрешности справедливы соотношения

$$\begin{gathered} r(\mathcal{Э}_c, T_2, p_2) = \pi\frac{\Lambda - E}{k\lambda\Lambda} = \frac{2\pi}{kc^2}c^{-2n} + O\left(c^{-6n}\right), \\ r(\mathcal{Э}_c, T_2, p_2) < 2\pi c^{-2n}. \end{gathered} \tag{2.26}$$

Доказательство. С помощью отображения (2.19) сведем исходную задачу к задаче построения наилучшей квадратурной формулы на классе B по системе $Z_2 = \begin{pmatrix} z_1, \dots, z_n \\ \nu_1, \dots, \nu_n \end{pmatrix}$, где $z_j = -l\operatorname{sn}^2\dfrac{jL}{n+1}$, для интеграла $\displaystyle\int_{-l}^{0} g(x)q_2(x)\,dx$. Найдем весовую функцию $q_2(x)$. В силу того, что при $l = \dfrac{2\sqrt{k}}{1+k}$

$$k = \frac{1-\sqrt{1-l^2}}{1+\sqrt{1-l^2}},$$

применяя преобразование Ландена [11, с. 133], будем иметь

$$p_2(x) = \frac{\operatorname{sn}^2 t \operatorname{cn}^2 t}{M^2\sqrt{1-x^2}\operatorname{dn}^2 t}, \quad t = \frac{L}{\pi}\arccos x, \quad M = (1+\sqrt{1-l^2})^{-1}.$$

Следовательно,

$$q_2(x) = \frac{\pi\sqrt{-x(l+x)}}{2kL(1+lx)^{3/2}}.$$

Докажем выполнение условий (2.9) для точек $z_1, \dots, z_n$ и веса $q_2(x)$. Аналогично доказательству теоремы 2.3, делая замену $x = -l\operatorname{sn}^2 t$, имеем

$$A_j = \int_{-l}^{0} W^2(x)\frac{1-W_j^2(x)}{W_j(x)}q_2(x)\,dx = \frac{2\pi l}{kL\operatorname{sn}2t_j}\int_0^L W^2(-l\operatorname{sn}^2 t)\frac{\operatorname{sn}^2 t\operatorname{cn}^2 t}{\operatorname{dn}^2 t}\varphi_j(t)\,dt;$$

здесь φ_j и W определяются равенствами (2.13) и (2.20) при $t_j = jL/(n+1)$. Используя первое главное преобразование эллиптических функций $2(n+1)$-й степени, функцию W можно записать в виде

$$W(-l\operatorname{sn}^2 t) = \frac{\sqrt{\lambda}}{l}\operatorname{sn}\left[\frac{2(n+1)t}{L}\Lambda, \lambda\right]\frac{\operatorname{dn} t}{\operatorname{sn} t\operatorname{cn} t}, \tag{2.27}$$

где

$$\frac{\Lambda'}{\Lambda} = 2(n+1)\frac{L'}{L} = \frac{4(n+1)}{\pi}\ln c.$$

В силу леммы 2.2 получаем

$$A_j = \frac{2\pi\lambda}{klL\operatorname{sn}2t_j}\int_0^L \operatorname{sn}^2\left[\frac{2(n+1)t}{L}\Lambda, \lambda\right]\varphi_j(t)\,dt = 0.$$

Из теоремы 2.2 вытекает, что квадратурная формула (2.25), коэффициенты которой могут быть найдены с помощью представления (2.27) и, например, первого из равенств (2.11), является наилучшей. Для погрешности этой формулы аналогично доказательству теоремы 2.3 имеем

$$r(Э_c, T_2, p_2) = r(D, Z_2, q_2) = \frac{\pi\lambda}{k}\int_0^1 \operatorname{sn}^2(u\Lambda, \lambda)\,du = \pi\frac{\Lambda - E}{k\lambda\Lambda} = \frac{\pi}{2k}\lambda + O(\lambda^3).$$

Поскольку для λ справедливы соотношения (2.23), а $h = c^{-4(n+1)}$, то $\lambda = 4c^{-2(n+1)} + O(c^{-6n})$ и $\lambda < 4c^{-2(n+1)}$. Таким образом,

$$r(Э_c, T_2, p_2) = \frac{2\pi}{kc^2}c^{-2n} + O(c^{-6n}).$$

Из соотношений (2.23) при $h = e^{-\pi K'/K}$ имеем $\sqrt{k} > h^{1/4} = c^{-1}$. Отсюда следует, что $kc^2 > 1$. Тем самым

$$r(\text{Э}_c, T_2, p_2) < \frac{\pi\lambda}{k} < \frac{4\pi}{kc^2}c^{-2n} < 4\pi c^{-2n}.$$

Теорема доказана. □

Отметим, что при $c \to \infty$ $p_2 \to \sqrt{1-x^2}$, а квадратурные формулы (2.16) и (2.25) переходят в квадратурные формулы Гаусса для соответствующих весов.

§3. Оптимальные квадратурные формулы

Рассмотрим теперь задачу (1.3). Обозначим через P_0 множество весовых функций $p(x)$, для каждой из которых существует многочлен $s(x)$ такой, что почти всюду на $[-1,1]$ $p(x)/s(x) \ge C > 0$. В работе [2] было доказано, что при $p \in P_0$, $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$, $\nu_j \le 2$, имеют место неравенства

$$M_1 c^{-2n} \le R(\text{Э}_c, \nu, p) \le M_2 c^{-2n}, \tag{3.1}$$

где M_1 и M_2 зависят только от c и веса p.

Функция $p_1(x) = \sqrt{1-x^2} \in P_0$. Покажем, что $p_2(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\times \operatorname{sn}^2\left(\dfrac{2K}{\pi}\arccos x, k\right) \in P_0$ при всех $k \in (0,1)$. Положим

$$f(t) = \frac{1}{t}\int_0^t \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \quad t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Имеем

$$f'(t) = \frac{1}{t^2}\left(\frac{t}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}} - \int_0^t \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\right) \ge 0.$$

Из того что $f(t)$ не убывает, получаем

$$\frac{2K}{\pi} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \ge \frac{1}{t}\int_0^t \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

Таким образом, для любого $k \in (0,1)$

$$\operatorname{sn}\left(\frac{2K}{\pi}t, k\right) \ge \sin t, \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Отсюда $\operatorname{sn}^2\left(\dfrac{2K}{\pi}\arccos x, k\right) \ge 1 - x^2$ и, следовательно, $p_2 \in P_0$. В силу неравенств (3.1), оценок (2.18) и (2.26) квадратурные формулы (2.16) и (2.25) являются оптимальными по порядку для всех $c > 1$.

В работе [4] при $p(x) = 1$ было доказано существование оптимальной квадратурной формулы для произвольных кратностей.

Доказательство не меняется в случае произвольного неотрицательного веса.

Теорема 3.1 ([4]). *Пусть $-1 \le a < b \le 1$, $p(x)$ — неотрицательный на $[a,b]$ вес и $\nu_1,\dots,\nu_n$ — четные натуральные числа. Тогда существуют точки $a < z_1 < \dots < z_n < b$ такие, что квадратурная формула*

$$I(f) \approx \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{\nu_j-1} a_{jk} f^{(k)}(z_j) \tag{3.2}$$

(коэффициенты a_{jk} определены в теореме 2.1) является оптимальной для данных p и $\nu = (\nu_1,\dots,\nu_n)$. Квадратурная формула (3.2) является также оптимальной для всех $\mu = (\mu_1,\dots,\mu_n)$, $\nu_j - 1 \le \mu_j \le \nu_j$, $j = 1,\dots,n$, при этом

$$R(D,\mu,p) = \int_a^b \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{x-z_j}{1-z_j x}\right)^{\nu_j} p(x)\,dx.$$

Положим для $\overline{x} = (x_1,\dots,x_n)$

$$\Phi(x,\overline{x}) = \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{x-x_j}{1-x_j x}\right)^{\nu_j}, \quad \Phi_j(x,\overline{x}) = \Phi(x,\overline{x}) \left(\frac{1-x_j x}{x-x_j}\right)^{\nu_j},$$

$$\varphi(\overline{x}) = \int_a^b \Phi(x,\overline{x}) p(x)\,dx,$$

$$\varphi_j(\overline{x}) = \frac{\partial \varphi(\overline{x})}{\partial x_j} = -\nu_j \int_a^b \Phi(x,\overline{x}) \frac{1-x^2}{(1-x_j x)(x-x_j)} p(x)\,dx.$$

Оптимальные узлы $\overline{z} = (z_1,\dots,z_n)$ должны удовлетворять равенствам

$$\varphi_j(\overline{z}) = 0, \quad j = 1,\dots,n. \tag{3.3}$$

Из теоремы 2.1 следует, что

$$a_{j,\nu_j-1} = -\frac{(1-z_j^2)^{\nu_j}}{\nu_j!\,\Phi_j(z_j,\overline{z})} \varphi_j(\overline{z}) = 0$$

(поэтому эти коэффициенты отсутствуют в оптимальной квадратурной формуле), а

$$a_{j,\nu_j-2} = \frac{(1-z_j^2)^{\nu_j}}{(\nu_j-2)!\,\Phi_j(z_j,\overline{z})} \times \int_a^b \Phi(x,\overline{x})(1-x^2) \frac{(1-xz_j)^2 + x^2(1-z_j^2)}{(1-x_j x)^2 (x-x_j)^2} p(x)\,dx > 0,$$

если вес $p(x)$ неэквивалентен нулю.

Оказывается, что в общем случае система (3.3) может иметь неединственное решение. Более того, оптимальные узлы могут быть также неединственными. Тем не менее, будет показано, что для $[a,b]=[-\sqrt{k},\sqrt{k}]$ при некоторых условиях, которые фактически означают достаточную малость k (или, если рассматривать задачу на классе A_c, — достаточно большую область аналитичности), единственность есть. В дальнейшем в качестве весов $p(x)$ будем рассматривать неотрицательные и неэквивалентные нулю весовые функции.

Положим

$$I(x_1,\dots,x_n,p,k)=\frac{D(\varphi_1,\dots,\varphi_n)}{D(x_1,\dots,x_n)},$$
$$\gamma_m(p,k)=\inf_{t_j}\int_{-1}^{1}\prod_{j=1}^{m}(t-t_j)^2p^*(\sqrt{k}t)\,dt,$$

где $p^*(\sqrt{k}t)$ — нормированный вес:

$$p^*(\sqrt{k}t)=\frac{p(\sqrt{k}t)}{\displaystyle\int_{-1}^{1}p(\sqrt{k}t)\,dt}.$$

Лемма 3.1. *Пусть $\nu_1,\dots,\nu_n$ — четные натуральные числа, $N=\sum_{j=1}^{n}\nu_j$, $\nu=\min_{1\le j\le n}\nu_j$. Если выполнено условие*

$$k\le\frac{\nu-1}{9\nu-7+N2^{N-1}\gamma^{-1}_{\frac{N}{2}-1}(p,k)},\tag{3.4}$$

то для всех точек $-\sqrt{k}<z_1<\ldots<z_n<\sqrt{k}$, удовлетворяющих равенствам (3.3), *$I(z_1,\dots,z_n,p,k)>0$.*

Доказательство. Обозначим элементы якобиана $I(z_1,\dots,z_n,p,k)$ через a_{jl}. Имеем

$$a_{jj}=\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_j}\bigg|_{\overline{x}=\overline{z}}$$
$$=\nu_j\int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}}\Phi(x,\overline{z})\frac{\nu_j(1-x^2)-1+2z_jx-x^2}{(1-z_jx)^2(x-z_j)^2}(1-x^2)p(x)\,dx.$$

В силу равенств (3.3) получаем

$$a_{jj}=a_{jj}+\frac{2z_j}{1+z_j^2}\varphi_j(\overline{z})=\nu_j\int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}}\Phi(x,\overline{z})$$
$$\times\left[\nu_j(1-x^2)-\frac{1-z_j^2}{1+z_j^2}(1+x^2)\right]\frac{(1-x^2)p(x)}{(1-z_jx)^2(x-z_j)^2}\,dx.$$

Поскольку $\nu_j \geq \nu$, то

$$\nu_j(1-x^2) - \frac{1-z_j^2}{1+z_j^2}(1+x^2) \geq \nu - 1 - (\nu+1)x^2. \tag{3.5}$$

Из условия (3.4) и очевидного неравенства $\gamma_m(p,k) \leq 1$ следует, что $k \leq (\nu-1)/(9\nu-3) < (\nu-1)/(\nu+1)$. Отсюда вытекает утверждение леммы при $n=1$. Пусть $n>1$. Тогда

$$a_{jj} > \nu_j \frac{[\nu - 1 - (\nu+1)k](1-k)}{(1+k)^{N+2}} \int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} (x-z_j)^{\nu_j-2} \prod_{l\neq j}(x-z_l)^{\nu_l} p(x)\,dx.$$

После замены $x=\sqrt{k}t$ будем иметь

$$a_{jj} > \nu_j \frac{[\nu - 1 - (\nu+1)k](1-k)}{(1+k)^{N+2}} k^{\frac{N-1}{2}} \gamma_{\frac{N}{2}-1}(p,k) \int_{-1}^{1} p(\sqrt{k}t)\,dt. \tag{3.6}$$

При $l \neq j$

$$\begin{aligned} a_{jl} &= \left.\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_l}\right|_{\overline{x}=\overline{z}} \\ &= \nu_j\nu_l \int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} \Phi(x,\overline{z}) \frac{(1-x^2)^2 p(x)}{(1-z_jx)(x-z_j)(1-z_lx)(x-z_l)}\,dx. \end{aligned}$$

В силу равенств (3.3)

$$\begin{aligned} a_{jl} &= a_{jl} + \frac{\nu_l(1+z_j^2)\varphi_j(\overline{z}) - \nu_j(1+z_l^2)\varphi_l(\overline{z})}{(z_j-z_l)(1-z_lz_j)} \\ &= -2\nu_j\nu_l \int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} \Phi(x,\overline{z}) \frac{x^2(1-x^2)p(x)}{(1-z_jx)(x-z_j)(1-z_lx)(x-z_l)}\,dx. \end{aligned}$$

Нетрудно убедиться, что при всех $x, z \in [-\sqrt{k}, \sqrt{k}]$ справедливы неравенста

$$\left|\frac{x-z}{1-zx}\right| \leq \frac{2\sqrt{k}}{1+k}, \quad \frac{1}{1-zx} \leq \frac{1}{1-k}, \quad \frac{1-x^2}{(1-zx)^2} \leq \frac{1}{1-k}.$$

Отсюда

$$|a_{jl}| \leq 2\nu_j\nu_l \left(\frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right)^{N-2} \frac{k}{(1-k)^3} \int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} p(x)\,dx.$$

Поэтому

$$\sum_{l\neq j} |a_{jl}| < \nu_j N 2^{N-1} \frac{k^{(N+1)/2}}{(1+k)^{N-2}(1-k)^3} \int_{-1}^{1} p(\sqrt{k}t)\,dt. \tag{3.7}$$

Для положительности якобиана $I(z_1,\dots,z_n,p,k)$ достаточно выполнения неравенств

$$a_{jj} > \sum_{l\neq j} |a_{jl}|, \quad j=1,\dots,n$$

(см., например, [14, с. 415]). Из (3.6), (3.7) вытекает, что для этого достаточно, чтобы было выполнено неравенство

$$N2^{N-1}\gamma^{-1}_{\frac{N}{2}-1}(p,k) \le f(k), \tag{3.8}$$

где $f(k)=[\nu-1-(\nu+1)k](1-k)^4(1+k)^{-4}$. Можно показать, что при $0\le k\le(\nu-1)(\nu+1)^{-1}$ $f''(k)>0$, а поскольку $f'(0)=7-9\nu$, то $f(k)\ge\nu-1-(9\nu-7)k$. Таким образом, неравенство (3.8) будет выполнено, если

$$N2^{N-1}\gamma^{-1}_{\frac{N}{2}-1}(p,k)k \le \nu-1-(9\nu-7)k,$$

что совпадает с условием (3.4). Лемма доказана. □

Лемма 3.2. *При $n=1$ оптимальный узел с кратностью μ единственен для любой весовой функции тогда и только тогда, когда*

$$k\le(\nu-1)/(\nu+1), \tag{3.9}$$

где $\nu=2[(\mu+1)/2]$.

Доказательство. Из теоремы 3.1 следует существование оптимального узла для любой кратности μ и совпадение его с оптимальным узлом для кратности ν. Для любого оптимального узла z_1 должно выполняться равенство $\varphi_1(z_1)=0$. Из доказательства леммы 3.1 (см. неравенство (3.5)) следует, что при выполнении условия (3.9) для всех точек z_1 в которых $\varphi_1(z_1)=0$, $\varphi_1'(z_1)>0$. Отсюда следует единственность оптимального узла для любой весовой функции.

Пусть теперь $(\nu-1)(\nu+1)^{-1}<k\le1$. Положим $p(x)=|x|^\alpha$, $\alpha>0$. Функция

$$\varphi(z)=\int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}}\left(\frac{x-z}{1-zx}\right)|x|^\alpha\,dx$$

является четной, поэтому оптимальный узел может быть единственным лишь при условии, что он равен нулю. Непосредственным вычислением находим

$$\varphi''(0)=2\nu k^{\frac{\alpha+\nu-1}{2}} \times\frac{(1-k)[\nu-1-(\nu+1)k]\alpha^2+2[\nu(\nu+1)(1-k)^2-2]\alpha+c(k,\nu)}{(\alpha+\nu-1)(\alpha+\nu+1)(\alpha+\nu+3)}$$

(величина $c(k,\nu)$ для нас несущественна). При достаточно больших α $\varphi''(0)<0$ и точка $z=0$ не является минимумом функции φ. Лемма доказана. □

Построенный в лемме 3.2 пример неединственности оптимального узла показывает, что гипотеза о единственности в задаче минимизации нормы произведения Бляшке, высказанная в работе [13], в общем случае неверна.

Переведя рассматриваемую задачу из класса B в класс A_c так, чтобы отрезок интегрирования $[-\sqrt{k},\sqrt{k}]$ перешел в отрезок $[-1,1]$, получаем

Следствие 3.1. *При $n=1$ оптимальный узел с кратностью μ единственен на классе A_c для любой весовой функции тогда и только тогда, когда*

$$c \geq \exp\left(\frac{\pi K_0'}{4K_0}\right), \tag{3.10}$$

где K_0 и K_0' — полные эллиптические интегралы первого рода для модулей $k_0=(\nu-1)(\nu+1)^{-1}$, $k_0'=\sqrt{1-k_0^2}$, соответственно, а ν определено в лемме 3.2.

Например, при $\mu=1,2$ $k_0=1/3$, а условие (3.4) означает, что $c\geq 3.41402\ldots$

Теорема 3.2. *При выполнении условия* (3.4) *существует единственная система точек $-\sqrt{k}<z_1<\ldots<z_n<\sqrt{k}$, удовлетворяющая равенствам* (3.3).

Доказательство. Воспользуемся схемой доказательства теоремы 2 из работы [15]. Существование системы точек $-\sqrt{k}<z_1<\ldots<z_n<\sqrt{k}$, удовлетворяющей равенствам (3.3), следует из теоремы 3.1. Единственность будем доказывать индукцией по n. При $n=1$ утверждение теоремы следует из леммы 3.2. Будем считать, что утверждение доказано для $n-1$. Положим

$$p_\xi(x)=\left(\frac{x-\xi}{1-\xi x}\right)^{\nu_n}p(x).$$

При любом $\xi\in[-\sqrt{k},\sqrt{k}]$ справедливы неравенства

$$\int_{-1}^{1}p_\xi(\sqrt{k}t)\,dt\leq\left(\frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right)^{\nu_n}\int_{-1}^{1}p(\sqrt{k}t)\,dt,$$

$$\inf_{t_j}\int_{-1}^{1}\prod_{j=1}^{m}(t-t_j)^2p_\xi(\sqrt{k}t)\,dt$$
$$\geq\left(\frac{\sqrt{k}}{1+k}\right)^{\nu_n}\inf_{t_j}\int_{-1}^{1}\prod_{j=1}^{m+\nu_n/2}(t-t_j)^2p(\sqrt{k}t)\,dt.$$

Тем самым

$$\gamma_m(p_\xi,k)\geq 2^{-\nu_n}\gamma_{m+\nu_n/2}(p,k). \tag{3.11}$$

Положим $\nu' = \min\limits_{1\le j\le n-1} \nu_j$. Из неравенства (3.11) и того, что $\nu' \ge \nu$, имеем

$$\frac{\nu'-1}{9\nu'-7+(N-\nu_n)2^{N-\nu_n-1}\gamma^{-1}_{\frac{N-\nu_n}{2}-1}(p_\xi,k)} > \frac{\nu-1}{9\nu-7+N2^{N-1}\gamma^{-1}_{\frac{N}{2}-1}(p,k)}.$$

Отсюда вследствие условия (3.4) и предположения индукции вытекает, что в задаче с кратностями $\nu_1,\dots,\nu_{n-1}$ и весом $p_\xi(x)$ при всех $\xi \in [-\sqrt{k},\sqrt{k}]$ существует единственная система точек $-\sqrt{k} < z_1(\xi) < \ldots < z_{n-1}(\xi) < \sqrt{k}$, удовлетворяющая равенствам (3.3) для $j = 1,\dots,n-1$. Из леммы 3.1 следует, что $I(z_1(\xi),\dots,z_{n-1}(\xi),p_\xi,k) > 0$ для всех $\xi \in [-\sqrt{k},\sqrt{k}]$. По теореме о неявных функциях $z_{n-1}(\xi)$ — непрерывна. Кроме того, $-\sqrt{k} < z_{n-1}(-\sqrt{k})$, $z_{n-1}(\sqrt{k}) < \sqrt{k}$. Следовательно, существует точка ξ_0, в которой $z_{n-1}(\xi_0) = \xi_0$. Эта точка единственна, так как в противном случае нашлась бы точка $\xi_1 \ne \xi_0$ такая, что $z_{n-1}(\xi_1) = \xi_1$, и задача с кратностями $\nu_1,\dots,\nu_{n-2},\nu_{n-1}+\nu_n$ и весом p имела бы два различных решения $z_1(\xi_0),\dots,z_{n-1}(\xi_0)$ и $z_1(\xi_1),\dots,z_{n-1}(\xi_1)$. Таким образом, неравенство $z_{n-1}(\xi) < \xi$ имеет место на $[-\sqrt{k},\sqrt{k}]$ только для $\xi \in (\xi_0,\sqrt{k}]$.

Положим $\varphi(\xi) = \varphi_n(z_1(\xi),\dots,z_{n-1}(\xi),\xi)$. Тогда

$$\varphi'(\xi) = \frac{I(z_1(\xi),\dots,z_{n-1}(\xi),\xi,p,k)}{I(z_1(\xi),\dots,z_{n-1}(\xi),p_\xi,k)}.$$

Точки $-\sqrt{k} < z_1(\xi) < \ldots < z_{n-1}(\xi) < \xi < \sqrt{k}$ удовлетворяют равенствам (3.3) в том и только в том случае, если $\xi \in (\xi_0,\sqrt{k})$ и $\varphi(\xi) = 0$. При этом из леммы 3.1 следует, что $I(z_1(\xi),\dots,z_{n-1}(\xi),\xi,p,k) > 0$. Тем самым $\varphi'(\xi) > 0$ для всех $\xi \in (\xi_0,\sqrt{k})$ таких, что $\varphi(\xi) = 0$. Отсюда вытекает существование не более чем одной такой точки, а с учетом теоремы 3.1, — ровно одной. Теорема доказана. □

Следствие 3.2. *Пусть $\mu_1,\dots,\mu_n$ — произвольные натуральные числа, $\nu_j = 2\left[\dfrac{\mu_j+1}{2}\right]$, $N = \sum\limits_{j=1}^{n}\nu_j$, $\nu = \min\limits_{1\le j\le n}\nu_j$. Тогда, если весовая функция p и k удовлетворяют условию* (3.4), *то оптимальные узлы в задаче с кратностями $\mu_1,\dots,\mu_n$ и весом p единственны. Они являются также оптимальными для любых кратностей $\rho_1,\dots,\rho_n$ таких, что $\nu_j - 1 \le \rho_j \le \nu_j$, $j = 1,\dots,n$.*

Теорема 3.3. *При*

$$c \ge \sqrt{44+n2^{4n-1}} \tag{3.12}$$

квадратурная формула (2.16)*, а при*

$$c \geq \sqrt{44 + n2^{4n+1}} \tag{3.13}$$

квадратурная формула (2.25) *являются оптимальными на классе* A_c *для соответствующих весов, определенных в теоремах* 2.3 *и* 2.4*, и* $\nu_j \leq 2$*,* $j = 1, \ldots, n$*.*

Доказательство. В силу теоремы 3.1 достаточно доказать оптимальность квадратурных формул (2.16) и (2.25) для $\nu_1 = \ldots = \nu_n = 2$. Отобразим конформно область $Э_c$ на единичный круг так, чтобы отрезок $[-1, 1]$ перешел в $[-\sqrt{k}, \sqrt{k}]$. Веса p_1 и p_2, определенные в теоремах 2.3 и 2.4, перейдут в веса

$$\widetilde{q}_1(x) = \frac{\pi}{2K} \frac{1}{\sqrt{(k - x^2)(1 - kx^2)}}, \quad \widetilde{q}_2(x) = \frac{\pi}{2kK(1 - kx^2)} \sqrt{\frac{k - x^2}{1 - kx^2}}.$$

Имеем

$$\int_{-1}^{1} \widetilde{q}_2(\sqrt{k}t)\, dt \leq \int_{-1}^{1} \widetilde{q}_1(\sqrt{k}t)\, dt = \frac{\pi}{\sqrt{k}}.$$

Для нормированных весов получаем

$$\widetilde{q}_1^*(\sqrt{k}t) = \frac{1}{2K\sqrt{(1 - t^2)(1 - k^2t^2)}} \geq \frac{1}{2K\sqrt{1 - t^2}},$$

$$\widetilde{q}_2^*(\sqrt{k}t) \geq \frac{\sqrt{1 - t^2}}{2K(1 - k^2t^2)\sqrt{1 - k^2t^2}} \geq \frac{1}{2K}\sqrt{1 - t^2}.$$

Величины γ_m для весов $\dfrac{1}{\sqrt{1 - t^2}}$ и $\sqrt{1 - t^2}$ хорошо известны, поэтому

$$\gamma_m(\widetilde{q}_1, k) \geq \frac{1}{2K} \cdot \frac{\pi}{2^{2m-1}}, \quad \gamma_m(\widetilde{q}_2, k) \geq \frac{1}{2K} \cdot \frac{\pi}{2^{2m+1}}.$$

Из разложения полного эллиптического интеграла K по степеням модуля k [11, с. 152] легко получить, что

$$K \leq \frac{\pi}{2} \sum_{r=0}^{\infty} k^{2r} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{1 - k^2}.$$

Учитывая последнее неравенство, имеем

$$\gamma_m^{-1}(\widetilde{q}_1, k) \leq \frac{2^{2m-1}}{1 - k^2}, \quad \gamma_m^{-1}(\widetilde{q}_2, k) \leq \frac{2^{2m+1}}{1 - k^2}. \tag{3.14}$$

Из доказательства теоремы 3.2 и леммы 3.1 следует, что решение системы (3.3) для весов $\widetilde{q}_1$ и $\widetilde{q}_2$ будет единственно при выполнении неравенства (3.8). В силу соотношений (3.14) и того, что $\nu = 2$, $N = 2n$, неравенство (3.8) будет иметь место, если

$$n2^{4n-3}k \leq g(k), \quad n2^{4n-1}k \leq g(k), \tag{3.15}$$

где $g(k) = (1-3k)(1-k)^5(1+k)^{-3}$, для весов $\widetilde{q}_1$ и $\widetilde{q}_2$, соответственно. Нетрудно показать, что $g''(k) > 0$ при $k \in [0, 1/3]$, а поскольку

$g'(0) = -11$, то $g(k) \geq 1 - 11k$. Таким образом, неравенства (3.15) будут выполнены, если

$$n2^{4n-3}k \leq 1 - 11k, \quad n2^{4n-1}k \leq 1 - 11k. \tag{3.16}$$

Из соотношений (2.23) следует, что $\sqrt{k} < 2c^{-1}$, поэтому неравенства (3.16) имеют место, если выполнены неравенства (3.12) и (3.13).

В случае когда $\nu_1 = \ldots = \nu_n = 2$,

$$\varphi_j(z) = -\frac{2}{1-z_j^2}\int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} W^2(x)\frac{1-W_j^2(x)}{W_j(x)}p(x)\,dx.$$

Следовательно, система (3.3) эквивалентна системе (2.9). Узлы систем Z_1 и Z_2, появляющиеся при доказательстве теорем 2.3 и 2.4, удовлетворяют системе (2.9) для отрезка $[-l, 0]$, $l = \dfrac{2\sqrt{k}}{1+k}$. При конформном преобразовании круга, переводящем отрезок $[-l, 0]$ в $[-\sqrt{k}, \sqrt{k}]$, эти узлы перейдут в узлы, удовлетворяющие системе (2.9) для весов $\widetilde{q}_1$ и $\widetilde{q}_2$. Если выполнены условия (3.12), (3.13), то эти узлы в силу единственности являются оптимальными. Теорема доказана. □

Задача построения оптимальных узлов на классе B для отрезка $[-\sqrt{k}, \sqrt{k}]$ и $\nu_j \leq 2$, $j = 1, \ldots, n$, с помощью замены $x = \sqrt{k}$ сводится к задаче нахождения нулей рациональной функции, минимизирующей величину

$$\inf_{q_n}\int_{-1}^{1} q_n^2(t,k)p(t,k)\,dt, \tag{3.17}$$

где нижняя грань берется по рациональным функциям вида

$$q_n(t,k) = \prod_{j=1}^{n}\frac{t-t_j}{1-kt_jt}, \quad -1 \leq t_1 < \ldots < t_n \leq 1. \tag{3.18}$$

При $k = 0$ рациональные функции переходят в многочлены и задача (3.17) сводится к нахождению корней ортогональных с весом $p(t, 0)$ многочленов, которые являются узлами квадратурной формулы Гаусса для этого веса.

Из доказательства теоремы 3.3 следует, что решением задачи (3.17) при достаточно малом k для веса

$$p_1(t,k) = \frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

являются узлы

$$t_j^1 = \operatorname{sn}\left[\left(\frac{2j-1}{n} - 1\right)K, k\right], \quad j = 1, \ldots, n, \tag{3.19}$$

а для веса

$$p_2(t,k) = \frac{1}{1-k^2t^2}\sqrt{\frac{1-t^2}{1-k^2t^2}}$$

узлы

$$t_j^2 = \operatorname{sn}\left[\left(\frac{2j}{n+1} - 1\right) K, k\right], \quad j = 1, \dots, n \tag{3.20}$$

(вопрос о справедливости этого утверждения при любом $k \in (0,1)$ остается открытым).

Обозначим рациональные функции (3.18) для узлов (3.19) через $\widetilde{r}_n$, а для узлов (3.20) через $\widetilde{s}_n$. Используя первое главное преобразование эллиптических функций, можно получить, что

$$\widetilde{r}_n(t,k) = a_n \operatorname{sn}\left[n\frac{L_n}{K}x + L_n, \lambda_n\right],$$

$$\widetilde{s}_n(t,k) = a_{n+1} \operatorname{sn}\left[(n+1)\frac{L_{n+1}}{K}x, \lambda_{n+1}\right]\sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}},$$

где $t = \operatorname{sn}(x + K, k)$, $a_n = \prod_{j=1}^{[n/2]} \operatorname{sn}^2\left(\frac{2j-1}{n}K, k\right)$, а L_n и L_n' — полные эллиптические интегралы первого рода для модулей λ_n и λ_n', соответственно; при этом модуль λ_n определяется из уравнения

$$\frac{L_n'}{L_n} = n\frac{K'}{K}.$$

Положим $r_n(t,k) = a_n^{-1}\widetilde{r}_n(t,k)$, $s_n(t,k) = a_{n+1}^{-1}\widetilde{s}_n(t,k)$. Рациональные функции r_n и s_n являются аналогами многочленов Чебышева T_n и U_n первого и второго рода. Имеем $r_n(t,0) = T_n(t)$, $s_n(t,0) = U_n(t)$. Кроме того, функция $r_n(t,k)$ (как функция t) удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned}(1-t^2)(1-k^2t^2)y'' - t(1-2k^2t^2+k^2)y' \\ + n^2\frac{L_n^2}{K^2}y(1-2\lambda_n^2y^2+\lambda_n^2) = 0,\end{aligned} \tag{3.21}$$

а функция $s_n(t,k)$ — уравнению

$$\begin{aligned}(1-t^2)(1-k^2t^2)y'' - t(3-2k^2t^2-k^2)y' \\ + y\left[(n+1)^2\frac{L_{n+1}^2}{K^2}\left(1-2\lambda_{n+1}^2y^2\frac{1-t^2}{1-k^2t^2}+\lambda_{n+1}^2\right)\right. \\ \left. -(1-k^2)\frac{1+k^2t^2}{1-k^2t^2}\right] = 0,\end{aligned} \tag{3.22}$$

Уравнения (3.21) и (3.22) при $k = 0$ переходят в известные уравнения, которым удовлетворяют многочлены Чебышева T_n и U_n.

Отметим тесную связь задач построения оптимальных квадратурных формул с задачами нахождения n-поперечников. Значение

n-поперечника по Колмогорову множества A из линейного нормированного пространства X определяется следующим образом:

$$d_n(A, X) = \inf_{X_n} \sup_{x \in A} \inf_{y \in X_n} \|x - y\|,$$

где X_n — всевозможные подпространства X размерности n. Обозначим через $L_2(p)$ пространство комплекснозначных функций, определенных на отрезке $[-1, 1]$, с нормой

$$\|f\| = \left(\int_{-1}^{1} |f(x)|^2 p(x)\, dx \right)^{1/2}.$$

Используя результаты работы [13], можно показать, что

$$d_n(A_c, L_2(p)) = \sqrt{R(Э_c, \nu, p)}, \tag{3.23}$$

где $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$, $\nu_j \le 2$. Из теоремы 3.3 находятся точные значения величин (3.23) при достаточно больших c для весов, определенных в теоремах 2.3, 2.4.

§4. Наилучшие квадратурные формулы, использующие приближенные значения функций

Будем рассматривать задачу о нахождении величины (1.4) для квадратурных формул (2.10), а также задачу об оценке величины (1.5) для соответствующих узлов и весов.

Теорема 4.1. *Пусть для системы $Z = (z_1, \dots, z_n)$ различных узлов из интервала $(-1, 1)$ выполнены равенства* (2.9)*. Тогда для погрешности квадратурной формулы S, определенной равенствами* (2.10), (2.11) *и использующей приближенные значения функций с погрешностью δ, имеет место равенство*

$$\rho(B, Z, p, \delta, S) = \int_a^b W^2(x) p(x)\, dx + \delta \int_a^b [1 - W^4(x)] p(x)\, dx. \tag{4.1}$$

Для погрешности наилучшей квадратурной формулы справедливы неравенства

$$0 \le \rho(B, Z, p, \delta, S) - r(B, Z, p, \delta) \le \delta^2 \int_a^b W^2(x)[1 - W^4(x)] p(x)\, dx. \tag{4.2}$$

Доказательство. В силу определения величины (1.4) и положительности коэффициентов квадратурной формулы S имеем

$$\rho(B, Z, p, \delta, S) \le \int_a^b W^2(x) p(x)\, dx + \delta \sum_{j=1}^{n} a_j.$$

С другой стороны, положив $f(x) = W^2(x)$ и $f_j = -\delta$, $j = 1, \dots, n$, из равенства (1.4) получаем

$$\rho(B, Z, p, \delta, S) \geq \int_a^b W^2(x) p(x)\, dx + \delta \sum_{j=1}^{n} a_j.$$

Для доказательства равенства (4.1) остается воспользоваться формулой (2.12).

Докажем неравенство (4.2). Левое неравенство в (4.2) следует из определения величины (1.5). Для доказательства правого рассмотрим функцию

$$f(z) = \frac{W^2(z) + \delta}{1 + \delta W^2(z)}.$$

Поскольку $f \in B$ и $f(z_j) = \delta$, $j = 1, \dots, n$, то из равенства (1.6) следует, что

$$\begin{aligned} r(B, Z, p, \delta) &\geq \int_a^b \frac{W^2(x) + \delta}{1 + \delta W^2(x)} p(x)\, dx \\ &= \int_a^b \left[W^2(x) + \delta(1 - W^4(x)) - \delta^2 W^2(x) \frac{1 - W^4(x)}{1 + \delta W^2(x)} \right] p(x)\, dx. \end{aligned}$$

Отсюда

$$r(B, Z, p, \delta) \geq \rho(B, Z, p, \delta, S) - \delta^2 \int_a^b W^2(x)[1 - W^4(x)] p(x)\, dx.$$

Теорема доказана. □

Из неравенства (4.2) следует, что погрешность квадратурной формулы S при использовании приближенных значений функций отличается от погрешности наилучшей квадратурной формулы на величину $O(\delta^2)$.

Применяя теорему 4.1 к квадратурным формулам (2.16) и (2.25), использующим приближенные значения функций (обозначим эти формулы через S_1 и S_2), получаем выражения для погрешностей этих формул, а также оценки погрешностей наилучших квадратурных формул для соответствующих узлов и весов. В частности, для S_1 имеем

$$\rho(\mathfrak{Э}_c, T_1, p_1, \delta, S_1) = \pi \frac{\Lambda - E}{\lambda \Lambda} + \pi(1 - d_n(c))\delta \leq 4\pi c^{-2n} + \pi\delta,$$

$$0 \leq \rho(\mathfrak{Э}_c, T_1, p_1, \delta, S_1) - r(\mathfrak{Э}_c, T_1, p_1, \delta) \leq \pi \frac{\Lambda - E}{\lambda \Lambda} \delta^2 \leq 4\pi c^{-2n} \delta^2,$$

где λ, Λ, E и $d_n(c)$ определены в теореме 2.3.

Список литературы

1. *Осипенко К. Ю.* Наилучшее приближение аналитических функций по информации об их значениях в конечном числе точек//Матем. заметки. 1976. Т. 19, № 1. С. 29–40.
2. *Бахвалов Н. С.* Об оптимальной скорости интегрирования аналитических функций//Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1967. Т. 7, № 5. С. 1011–1020.
3. *Loeb H. L.* A note on optimal integration in H_∞//C. R. Acad. Bulgare Sci. 1974. V. 27, № 5. P. 615–619.
4. *Bojanov B. D.* On the existence of optimal quadrature formulae for smooth functions//Calcolo. 1979. V. 16, № 1. P. 61–70.
5. *Andersson J.-E., Bojanov B. D.* A note on the optimal quadrature in H_p//Numer. Math. 1984. V. 44, № 2. P. 301–308.
6. *Осипенко К. Ю.* Наилучшие методы приближения аналитических функций, заданных с погрешностью//Матем. сб. 1982. Т. 118. (160). С. 350–370.
7. *Micchelli C. A., Rivlin T. J.* A survey of optimal recovery, Optimal estimation in approximation theory. N. Y.: Plenum Press, 1977. P. 1–54.
8. *Rivlin T. J.* The optimal recovery of funetions//Contemp. Math. 1982. V. 9. P. 121–151.
9. *Осипенко К. Ю.* Оптимальная интерполяция аналитических функций//Матем. заметки. 1972. Т. 12, № 4. С. 465–476.
10. *Bojanov B. D.* Best quadrature formula for a certain class of analytic functions//Zastos. Math. 1974. V. 14. P. 441–447.
11. *Ахиезер Н. И.* Элементы теории эллиптических функций. М.: Наука, 1970.
12. *Журавский А. И.* Справочник по эллиптическим функциям. М.: Изд-во АН СССР, 1941.
13. *Fisher S. D., Micchelli C. A.* The n-widths of sets of analytic functions//Duke Math. J. 1980. V. 47, № 4. P. 789–801.
14. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1967.
15. *Bojanov B. D.* Extremal problems in a set of polynomials with fixed multiplicities of zeros//C. R. Acad. Bulgare Sci. 1978. V. 31, № 4. P. 377–380.

Московский авиационный
технологический институт

Поступила в редакцию
16.VI.1986