УДК 517.5

ОБ n-ПОПЕРЕЧНИКАХ, ОПТИМАЛЬНЫХ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛАХ И ОПТИМАЛЬНОМ ВОССТАНОВЛЕНИИ ФУНКЦИЙ, АНАЛИТИЧЕСКИХ В ПОЛОСЕ[1]

К. Ю. ОСИПЕНКО

Аннотация. Пусть $H_\infty(D_H)$ — пространство ограниченных аналитических в полосе $D_H := \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| < H\}$ функций. Через $\widetilde{H}_\infty(D_H)$ обозначим множество 2π-периодических функций из $H_\infty(D_H)$, а через $\widetilde{H}^{\mathbb{R}}_\infty(D_H)$ — множество функций из $\widetilde{H}_\infty(D_H)$, вещественных на вещественной оси. Для линейного нормированного пространства X положим $BX := \{x \in X : \|x\| \le 1\}$. В работе найдены точные значения колмогоровских поперечников $d_{2n}(B\widetilde{H}^{\mathbb{R}}_\infty(D_H), L_q[0, 2\pi])$ при всех $1 \le q \le \infty$, построена оптимальная квадратурная формула на классе $B\widetilde{H}^{\mathbb{R}}_\infty(D_H)$, использующая значения функций, заданные с погрешностью, и доказано, что единственной с точностью до сдвига оптимальной системой узлов является равномерная сетка. Кроме того, решен ряд задач оптимального восстановления функций и их производных на классе $BH_\infty(D_H)$.

Введение

Пусть Ω — некоторая область в комплексной плоскости. Через $H_\infty(\Omega)$ будем обозначать пространство функций, аналитических в Ω и удовлетворяющих условию

$$\|f\|_{H_\infty(\Omega)} := \sup_{z \in \Omega} |f(z)| < \infty.$$

Положим

$$D_H := \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| < H\}.$$

Обозначим через $\widetilde{H}_\infty(D_H)$ множество 2π-периодических функций из $H_\infty(D_H)$, а через $\widetilde{H}^{\mathbb{R}}_\infty(D_H)$ — множество функций из $\widetilde{H}_\infty(D_H)$, вещественных на вещественной оси. Для линейного нормированного пространства X положим $BX := \{x \in X : \|x\| \le 1\}$.

В § 1 данной работы формулируется общая постановка задачи оптимального восстановления, охватывающая задачи об n-поперечниках, оптимальной интерполяции и оптимальной квадратурной формуле. Кроме того, приводится некоторый удобный прием построения оптимальных методов восстановления, основанный

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований

на представлении погрешности восстановления в специальном интегральном виде.

В § 2 находятся точные значения колмогоровских поперечников $d_{2n}(B\widetilde{H}^{\mathbb{R}}_{\infty}(D_H), L_q[0,2\pi])$ при всех $1 \le q \le \infty$. В § 3 найдена оптимальная квадратурная формула на классе $B\widetilde{H}_{\infty}(D_H)$, использующая значения функций, заданные с погрешностью, и доказано, что единственной с точностью до сдвига оптимальной системой узлов является равномерная сетка.

§ 4 посвящен задачам оптимального восстановления функций из классов $B\widetilde{H}_{\infty}(D_H)$ и $BH_{\infty}(D_H)$ по точным значениям. В частности, найден оптимальный метод восстановления функций из класса $BH_{\infty}(D_H)$ по их значениям в бесконечной равномерной сетке с произвольным шагом и доказано, что равномерная сетка является наилучшей среди некоторого класса сеток, введенного Сунь Юн-Шеном [1].

В § 5 рассмотрена задача об оптимальном восстановлении второй производной функции из класса $BH_{\infty}(D_H)$ по ее следу на вещественной оси, заданному с погрешностью δ в равномерной норме. При этом обнаружен эффект "переключения" экстремальной функции, не встречавшийся в аналогичной задаче восстановления первой производной, которая изучалась в работе [2].

§1. Общая задача оптимального восстановления

Многие задачи теории приближения могут рассматриваться с единой точки зрения как задачи об оптимальном восстановлении. Приведем одну из возможных постановок общей задачи оптимального восстановления, включающую в себя задачи об n-поперечниках, оптимальной интерполяции и оптимальной квадратурной формуле.

Пусть X и Y — линейные пространства, Z — линейное нормированное пространство, $W \subset X$ — некоторое множество и $L\colon W \to Z$ — однозначное отображение. Рассмотрим задачу оптимального восстановления отображения L по значениям информационного оператора $F\colon W \to Y$, являющегося, вообще говоря, многозначным отображением. Под методами восстановления будем понимать однозначные отображения $\varphi\colon Y \to Z$. Предположим, что нам задан некоторый класс допустимых методов восстановления $\mathcal{G}$. Положим

$$e(L,F,\mathcal{G}) := \inf_{\varphi\in\mathcal{G}} \sup_{(x,y)\in \operatorname{gr} F} \|Lx - \varphi y\|, \tag{1}$$

где $\operatorname{gr} F := \{(x,y) \in W \times X : y \in F(x)\}$. Пусть требуется восстановить семейство отображений $\mathcal{L}$ и при этом имеется возможность выбирать информационный оператор из некоторого множества $\mathcal{F}$.

В этой ситуации положим

$$e(\mathcal{L}, \mathcal{F}, \mathcal{G}) := \inf_{F\in\mathcal{F}} \sup_{L\in\mathcal{L}} e(L, F, \mathcal{G}). \tag{2}$$

Обозначим через $\mathcal{G}_n$ ($\mathcal{G}_n^\lambda$) — множество всевозможных (линейных непрерывных) операторов с областью значений в n-мерных линейны подпространствах Z. Введем следующие обозначения:

$$d_n(L, F) := e(L, F, \mathcal{G}_n), \quad \lambda_n(L, F) := e(L, F, \mathcal{G}_n^\lambda).$$

Если $F^{-1}(0) \neq \emptyset$, то имеет место оценка

$$\lambda_n(L, F) \geq \inf_{\varphi\in\mathcal{G}^\lambda} \sup_{\substack{(x,y)\in\operatorname{gr} F\\ \varphi y=0}} \|Lx\| =: \gamma_n(L, F).$$

Пусть Y — линейное нормированное пространство и $I\colon W \to Y$ — линейный оператор. Определим многозначное отображение I_δ равенством $I_\delta(x) := Ix + \delta BY$, $\delta \geq 0$. Тогда, если $F = I_\delta$ и $L = Id$ — тождественное отображение, получим величины

$$d_n(W, X, I, \delta) := d_n(Id, I_\delta), \quad \lambda_n(W, X, I, \delta) := \lambda_n(Id, I_\delta),$$
$$d^n(W, X, I, \delta) := \gamma_n(Id, I_\delta),$$

первая из которых была введена Ю.Н.Субботиным [3]. Величины

$$d_n(W, X) := d^n(W, X, Id, 0), \quad \lambda_n(W, X) := \lambda_n(W, X, Id, 0),$$
$$d^n(W, X) := d^n(W, X, Id, 0),$$

хорошо известны в теории приближения (см., например, [4, 5]) и называются *колмогоровским*, *линейным* и *гельфандовским* n-поперечниками соответственно.

Обозначим через $\mathcal{E}$ множество всевозможных методов $\varphi\colon Y \to Z$. Рассмотрим задачу (1), когда $\mathcal{G} = \mathcal{E}$, W — некоторый класс вещественных или комплекснозначных функций, определенных на каком-либо множестве G, L — линейный функционал, а $F = I_\delta$. Величину (1) будем обозначать в этом случае через $e(L, I, W, \delta)$.

Если W — выпуклый и уравновешенный класс функций, то (см. [6]) среди методов, на которых достигается нижняя грань (называемых *оптимальными*), существует линейный метод и, кроме того, справедливо равенство

$$e(L, I, W, \delta) = \sup_{\substack{x\in W\\ \|Ix\|=0}} |Lx|. \tag{3}$$

Функции, на которых достигается верхняя грань, будем называть *экстремальными*.

Пусть $t_1, \dots, t_n$ — различные точки из множества G. Положим $I_\tau x := \{x(t_1), \dots, x(t_n)\}$, где $\tau = (t_1, \dots, t_n)$. Тогда при $Lx = L_t x := x(t)$, $t \in G$, получаем задачу об оптимальном восстановлении функции x в точке t на классе W по ее значениям в системе узлов τ, заданным с погрешностью δ в норме пространства Y. Если $E \subset G$ и в задаче (2) положить

$$\mathcal{L} = \{\, L_t : t \in E \,\}, \quad \mathcal{F} = \{\, I_\tau + \delta BY : tau \in E^n \,\},$$

то получим задачу об оптимальном восстановлении значений функции из класса W на множестве E.

Если в качестве L рассмотреть интеграл от функции $x \in W$ по некоторому множеству из G, то задача (1) становится задачей о наилучшем методе интегрирования при фиксированных узлах, а задача (2) при $\mathcal{L} = \{L\}$ — задачей об оптимальном методе интегрирования (или оптимальном выборе узлов).

Можно рассматривать и другие задачи, укладывающиеся в предложенную схему, — восстановление производных, использование информационного оператора, содержащего другие линейные функционалы, например, производные или коэффициенты Фурье восстанавливаемой функции. В качестве информационного оператора можно также взять оператор, ставящий в соответствие функции ее след на некотором множестве (не обязательно конечном), заданный с погрешностью δ в какой-либо норме. Ряд сформулированных задач изучается в данной работе для классов аналитических функций.

Во многих случаях оптимальный метод восстановления удается получить с помощью единого подхода, основанного на представлении погрешности восстановления в специальном интегральном виде. Этот подход использовался в работах [7–9] и [2].

Пусть G — некоторое непустое множество, Σ — σ-алгебра подмножеств G и μ — неотрицательная σ-аддитивная мера на Σ. Через $L_p(G,\Sigma,\mu)$ (или, короче, $L_p(G,\mu)$) обозначим совокупность всех Σ-измеримых функций со значениями в $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, для которых

$$\|x\|_p := \left(\int_G |x(t)|^p \, d\mu(t)\right)^{1/p} < \infty, \quad 1 \le p < \infty,$$
$$\|x\|_\infty := \operatorname*{vraisup}_{t\in G} |x(t)| < \infty, \quad p = \infty.$$

В частности, когда $G = \{1, 2, \ldots, n\}$ и $\mu(\{j\}) = 1$, пространство $L_p(G,\mu)$ совпадает с пространством l_p^n, представляющим из себя множество векторов $x = (x_1, \ldots, x_n)$ с нормой

$$\|x\|_p := \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p\right)^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty, \quad \|x\|_\infty := \max_j |x_j|, \quad p = \infty.$$

Предположим, что X_p — некоторое линейное подпространство $L_p(G,\mu)$ (восстановление на подпространствах из $L_p(G,\mu)$ является типичной ситуацией при восстановлении аналитических функций). Рассмотрим задачу о нахождении величины $e(L, I, BX_p, \delta)$.

Положим

$$(x,y) := \int_G x(t)\overline{y(t)}\,d\mu(t), \quad x_{(p)}(t) = x(t)|x(t)|^{p-2}, \quad 1 \le p < \infty.$$

Через Y^* будем обозначать множество линейных непрерывных функционалов на Y.

Теорема 1 ([9])**.** *Пусть $g \in X_p$, $g \neq 0$, $g_0 := g/\|g\|_p$, $\|Ig_0\| \le \delta$, $y_0^* \in Y^*$, $\langle y_0^*, Ig_0\rangle = \delta\|y_0^*\|$ и при всех $\in X_p$ имеет место равенство*

$$Lx - \langle y_0^*, Ix\rangle = \begin{cases} \alpha(x, g_{(p)}), & 1 \le p < \infty, \\ (x, \varphi g), & p = \infty, \end{cases}$$

где $\alpha > 0$, $\varphi \in L_1(G,\mu)$, $\varphi(t) \ge 0$ почти всюду и при $p = \infty$ $|g(t)| = 1$ почти всюду. Тогда y_0^* — оптимальный метод восстановления, g_0 — экстремальная функция и

$$e(L, I, BX_p, \delta) = Lg_0.$$

§2. Точные значения n-поперечников

Положим

$$\Delta_h := \{\, z \in \mathbb{C} : \sqrt{h} < |z| < 1/\sqrt{h}\,\}, \quad h \in (0,1).$$

Через $BH_\infty^{\mathbb{R}}(\Delta_h)$ будем обозначать множество функций из $BH_\infty(\Delta_h)$, вещественных на единичной окружности $S := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Положим $L_q := L_q(S,\mu)$, где $d\mu(e^{i\theta}) = d\theta$. Через $\|\cdot\|_q$ обозначим норму в пространстве $L_q[0,2\pi] := L_q([0,2\pi],\mu)$ при $d\mu(t) = dt$.

В работе [10] (см. также [11]) было показано, что

$$(4) \quad d_{2n}(BH_\infty^{\mathbb{R}}(\Delta_h), L_q) = \lambda_{2n}(BH_\infty^{\mathbb{R}}(\Delta_h), L_q) = d^{2n}(BH_\infty^{\mathbb{R}}(\Delta_h), L_q) = \inf_{B \in \mathcal{B}_{2n}} \|B(e^{i\cdot})\|_q,$$

где $\mathcal{B}_{2n}$ — множество произведений Бляшке с $2n$ нулями, лежащими на единичной окружности.

Напомним, что *произведением Бляшке порядка n* для области $\Omega \subset \mathcal{C}$ называется функция вида

$$B(z) = \varepsilon \exp\biggl(-\sum_{j=1}^n P(z,\zeta_j)\biggr),$$

где $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ — точки из Ω, $|\varepsilon| = 1$, $P(z,\zeta) := u(z,\zeta) + iv(z,\zeta)$, $u(z,\zeta)$ — функция Грина области Ω с особенностью в точке ζ, а $v(z,\zeta)$ — сопряженная к $u(z,\zeta)$ функция (в общем случае многозначная).

Функция $F(z,\zeta) := \exp(-P(z,\zeta))$, называемая иногда *комплексной функцией Грина*, для кольца Δ_h представляется через тета-функции (см. [12, с. 232])

$$F(z,\zeta) = z^{-\sigma}\frac{H\left(\dfrac{K}{\pi i}(\ln z - \ln\zeta)\right)}{\Theta\left(\dfrac{K}{\pi i}(\ln z + \ln\overline{\zeta})\right)},$$

где $\sigma := \ln|\zeta|/\ln h$, K — полный эллиптический интеграл первого рода для модуля k, определяемого из условия

$$\exp(-\pi K'/K) = h,$$

в котором K' — полный эллиптический интеграл первого рода для модуля $k' = \sqrt{1-k^2}$. Модуль k выражается через h в явном виде (см. [12, с. 277]): $k = \kappa(h)$, где

$$\kappa(h) := 4h^{1/2}\left(\sum_{m=0}^{\infty} h^{m(m+1)}\right)^2\left(1 + 2\sum_{m=1}^{\infty} h^{m^2}\right)^{-2}.$$

Если $\zeta = e^{i\theta}$, $0 \le \theta < 2\pi$, а $z = e^{iu}$, то в силу равенства (см. [12, с. 277])

$$\frac{H(u)}{\Theta(u)} = \sqrt{k}\,\mathrm{sn}(u,k)$$

имеем

$$F(z,\zeta) = \sqrt{k}\,\mathrm{sn}\left(\frac{K}{\pi}(u-\theta),k\right).$$

В дальнейшем зависимость эллиптических функций от модуля будем отмечать лишь в случае, если он отличен от k.

Положим

$$\Lambda_n := \{\,\theta : \theta = (\theta_1,\dots,\theta_n), \quad 0 \le \theta_1 \le \ldots \le \theta_n < 2\pi\,\}.$$

Тогда

$$\inf_{B\in\mathcal{B}_{2n}} \|B(e^{i\cdot})\|_q = \inf_{\theta\in\Lambda_{2n}} \left\| k^n \prod_{j=1}^{2n} \mathrm{sn}\left(\frac{K}{\pi}(\cdot - \theta_j)\right)\right\|_q. \tag{5}$$

Для решения последней экстремальной задачи нам потребуется обобщение одного результата А. Пинкуса.

Обозначим через $S(f)$ число перемен знака кусочно-непрерывной, вещественной и 2π-периодической функции на периоде. Для вещественной, непрерывной и 2π-периодической функции $\mathcal{K}$ положим

$$(\mathcal{K} * f)(x) := \int_0^{2\pi} \mathcal{K}(x-t)f(t)\,dt.$$

Будем говорить, что $\mathcal{K} \in NCVD$ (nondegenerate cyclic variation diminishing), если $(\mathcal{K} * f) \le S(f)$ при всех f и

$$\dim\operatorname{span}\{\mathcal{K}(x_1 - \cdot),\dots,\mathcal{K}(x_n - \cdot)\} = n$$

при всех $0 \le x_1 < \ldots < x_n < 2\pi$ и всех n. Если при всех $0 \le x_1 < \ldots < x_{2l+1} < 2\pi$, $0 \le y_1 < \ldots < y_{2l+1} < 2\pi$ выполняется неравенство

$$\varepsilon \det(\mathcal{K}(x_j - y_m))_{j,m=1}^{2l+1} > 0,$$

где $\varepsilon = 1$ или $\varepsilon = -1$, то говорят, что $\mathcal{K} \in SSC_{2l+1}$ (strictly sign consistent).

Для $\xi \in \Lambda_{2n}$ положим

$$h_\xi(t) := (-1)^{j+1}, \quad t \in [\xi_{j-1}, \xi_j)), \quad j = 1, \ldots, 2n+1,$$

где $\xi_0 := 0$, $\xi_{2n+1} := 2\pi$. Через $h_n(t)$ обозначим функцию $h_\xi(t)$, когда $\xi_j = (j-1)\pi/n$, $j = 1, \ldots, 2n$.

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{K} \in NCVD$ и φ — неотрицательная непрерывно дифференцируемая функция, определенная на $[0, \|\mathcal{K}\|]$, такая, что φ' положительна и возрастает в интервале $(0, \|\mathcal{K}\|)$. Тогда при всех $1 \le q \le \infty$*

$$\inf_{\theta \in \Lambda_{2n}} \|\varphi(|\mathcal{K} * h_\xi|)\|_q = \|\varphi(|\mathcal{K} * h_n|)\|_q.$$

Причем, если $\mathcal{K} \in SSC_{2l+1}$, $l = 0, 1, \ldots, n$, и для $\xi^* \in \Lambda_{2n}$ достигается инфимум, то $\xi^*_{j+1} - \xi^*_j = \pi/n$, $j = 1, \ldots, 2n-1$.

Эта теорема для $\varphi(x) = x$ была доказана А. Пинкусом [13] (см. также [4, с. 174]). В общем случае доказательство проводится по той же схеме.

Теорема 3. *Пусть φ — функция, определенная на $[0, 1]$ и удовлетворяющая условиям теоремы 2. Тогда при всех $k \in (0, 1)$ и $s \in \mathbb{N}$*

$$\inf_{\theta \in \Lambda_s} \left\| \varphi\left(\frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} \left| k^{s/2} \prod_{j=1}^{s} \operatorname{sn}\left(\frac{K}{\pi}(\cdot - \theta_j) \right) \right| \right) \right\|_q$$
$$= \begin{cases} \left(\dfrac{2\pi}{\Lambda} \displaystyle\int_0^1 \frac{\varphi^q\left(\frac{4}{\pi} \operatorname{arctg}(\sqrt{\lambda} t) \right) dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-\lambda^2 t^2)}} \right)^{1/q}, & 1 \le q < \infty, \\ \varphi\left(\dfrac{4}{\pi} \operatorname{arctg} \sqrt{\lambda} \right), & q = \infty, \end{cases}$$

где $\lambda = \kappa(h^s)$, $h = \exp(-\pi K'/K)$, а Λ — полный эллиптический интеграл первого рода для модуля λ. Причем, если для $\theta^* \in \Lambda_s$ достигается инфимум, то $\theta^*_{j+1} - \theta^*_j = 2\pi/s$, $j = 1, \ldots, s-1$.

Доказательство. Обозначим через A_H класс аналитических в полосе D_H функций, вещественных на вещественной оси, 2π-периодических и удовлетворяющих условию

$$|\operatorname{Re} f(z)| \le 1, \quad z \in D_H.$$

Функции из класса A_H допускают представление

$$f(z)=\int_0^{2\pi}K_H(z-t)\operatorname{Re}f(t+iH)\,dt,$$

где

$$K_H(z)=\frac{1}{2\pi}\left(1+2\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\cos jz}{\operatorname{ch}jH}\right).$$

Известно [4, с. 128], что $K_H(t)\in NCVD$ при $t\in[0,2\pi)$. Более того, в работе [14] было доказано, что $K_H\in SSC_{2l+1}$ при всех $l=0,1,\dots$.

Рассмотрим сначала случай, когда s — четное число. Пусть $s=2n$ и $\theta\in\Lambda_{2n}$. Положим

$$f_\theta(z):=\frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}\left[k^n\prod_{j=1}^{2n}\operatorname{sn}\left(\frac{K}{\pi}(z-\theta_j)\right)\right].$$

Поскольку $\operatorname{sn}(u+2K)=-\operatorname{sn}u$ и $|\sqrt{k}\operatorname{sn}u|<1$ при $|\operatorname{Im}z|<K'/2$, то $f_\theta\in A_H$ для $H=\pi K'/(2K)$. Из равенства

$$\sqrt{k}\operatorname{sn}(u+iK'/2)=\frac{(1+k)\operatorname{sn}u+i\operatorname{cn}u\operatorname{dn}u}{1+k\operatorname{sn}^2u}\tag{6}$$

вытекает, что при $0\le u\le 2K$

$$\sqrt{k}\operatorname{sn}(u+iK'/2)=\exp(i\omega(u)),$$

где $\omega(u)$ монотонно возрастает от 0 до π. Так как для $|z|=1$ и $z\ne\pm i$

$$\operatorname{Re}\left(\frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}z\right)=\operatorname{sign}\operatorname{Re}z,$$

то при всех $t\in[0,2\pi)$

$$\operatorname{Re}f_\theta(t+iH)=\operatorname{sign}\operatorname{Re}\exp\left(i\sum_{j=1}^{2n}\omega_j(t)\right),$$

где $\displaystyle\sum_{j=1}^{2n}\omega_j(t)$ монотонно возрастает от некоторого α до $\alpha+2\pi n$. Отсюда следует существование $\xi\in\Lambda_{2n}$ такого, что

$$f_\theta(z)=\varepsilon(K_H*h_\xi)(z)$$

при $\varepsilon=1$ или $\varepsilon=-1$. Из теоремы 2 для $\mathcal{K}=K_H$ получаем

$$\inf_{\theta\in\Lambda_{2n}}\|\varphi(|f_\theta(\cdot)|)\|_q\ge\inf_{\theta\in\Lambda_{2n}}\|\varphi(|(K_H*h_\xi)(\cdot)|)\|_q=\|\varphi(|(K_H*h_n)(\cdot)|)\|_q.\tag{7}$$

Обозначим через f_n функцию f_θ при $\theta_j=(j-1)\pi/n$, $j=1,\dots,2n$. Пользуясь равенствами

$$\operatorname{sn}(u-2K)=-\operatorname{sn}u,\quad \operatorname{sn}(u+v)\operatorname{sn}(u-v)=\frac{\operatorname{sn}^2u-\operatorname{sn}^2v}{1-k^2\operatorname{sn}^2u\operatorname{sn}^2v},$$

а также первым главным преобразованием эллиптических функций $2n$-ой степени (см. [12]), находим

$$
\begin{aligned}
&f_n\left(z-\frac{\pi}{2n}\right)\\
&=\frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}\left[(-1)^n k^n\prod_{j=1}^{n}\operatorname{sn}\left(\frac{K}{\pi}z-\frac{2j-1}{2n}K\right)\operatorname{sn}\left(\frac{K}{\pi}z+\frac{2j-1}{2n}K\right)\right]\\
&\qquad=\frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}\left[k^n\prod_{j=1}^{n}\frac{\operatorname{sn}^2\dfrac{2j-1}{2n}K-\operatorname{sn}^2\dfrac{K}{\pi}z}{1-k^2\operatorname{sn}^2\dfrac{2j-1}{2n}K\operatorname{sn}^2\dfrac{K}{\pi}z}\right]\\
&\qquad\qquad=\frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}\left[\sqrt{\lambda}\operatorname{sn}\left(\frac{2n\Lambda}{\pi}z+\Lambda,\lambda\right)\right],
\end{aligned}
$$

где $\Lambda'/\Lambda=2nK'/K$, $\lambda=\kappa(h^{2n})$. Таким образом,

$$
f_n(z)=-\frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}\left[\sqrt{\lambda}\operatorname{sn}\left(\frac{2n\Lambda}{\pi}z,\lambda\right)\right].
$$

Поскольку $f_n\in A_H$ и, кроме того, в силу (6)

$$
\operatorname{Re}f_n(t+iH)=-\operatorname{sign}\operatorname{sn}\left(\frac{2n\Lambda}{\pi}z,\lambda\right)=h_n(t),
$$

то $f_n(z)=(K_H*h_n)(z)$. Тем самым, учитывая (7), имеем

$$
\begin{aligned}
&\inf_{\theta\in\Lambda_{2n}}\|\varphi(|f_\theta(\cdot)|)\|_q=\|\varphi(|f_n(\cdot)|)\|_q\\
&\qquad=\left\|\varphi\left(\frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}\sqrt{\lambda}\left|\operatorname{sn}\left(\frac{2n\Lambda}{\pi}\cdot,\lambda\right)\right|\right)\right\|_q.
\end{aligned}
$$

Отсюда непосредственно вытекает утверждение теоремы в рассматриваемом случае, если $q=\infty$. При $1\le q<\infty$ после замен $x=\dfrac{2n\Lambda}{\pi}z$ и $t=\operatorname{sn}(x,\lambda)$, пользуясь свойствами эллиптического синуса, получаем

$$
\begin{aligned}
&\left\|\varphi\left(\frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}\sqrt{\lambda}\left|\operatorname{sn}\left(\frac{2n\Lambda}{\pi}\cdot,\lambda\right)\right|\right)\right\|_q=\\
&\qquad\left(\frac{2\pi}{\Lambda}\int_0^{\Lambda}\varphi^q\left(\frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\lambda}\operatorname{sn}(x,\lambda)\right)\right)dx\right)^{1/q}\\
&\qquad\qquad=\left(\frac{2\pi}{\Lambda}\int_0^1\frac{\varphi^q\left(\dfrac{4}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\lambda}t\right)\right)dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-\lambda^2t^2)}}\right)^{1/q}.
\end{aligned}
$$

Если для $\theta\in\Lambda_{2n}$ достигается инфимум в левой части (7), то в силу теоремы 2 с точностью до сдвига функция f_θ совпадает с K_H*h_n и, следовательно, нули функции f_θ распределены равномерно с шагом π/n.

Пусть теперь s — нечетное число. С помощью преобразования Ландена [12, с. 283] находим

$$\sqrt{k}\,\operatorname{sn}\left(\frac{2K}{\pi}u\right) = -l\,\operatorname{sn}\left(\frac{L}{\pi}u, l\right)\operatorname{sn}\left(\frac{L}{\pi}(u-\pi), l\right), \tag{8}$$

где

$$l = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}, \quad \frac{L'}{L} = \frac{K'}{2K},$$

а L и L' — полные эллиптические интегралы первого рода для модулей l и $l' = \sqrt{1-l^2}$ соответственно. Из равенства (8) имеем

$$k^{s/2}\prod_{j=1}^{s}\operatorname{sn}\left(\frac{K}{\pi}(t-\theta_j)\right) = (-1)^s l^s \prod_{j=1}^{2s}\operatorname{sn}\left(\frac{L}{\pi}\left(\frac{t}{2}-\frac{\theta_j}{2}\right), l\right),$$

где $\theta_{n+j} = 2\pi + \theta_j$, $j = 1, \ldots, n$. Теперь утверждение теоремы вытекает из соответствующего утверждения для четного случая. Теорема доказана. □

Положим

$$J_q(\lambda) := \int_0^1 \frac{t^q\,dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-\lambda^2 t^2)}}.$$

Из хорошо известных соотношений

$$\int_0^1 x^q(1-x^2)^{-1/2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\dfrac{q+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{q}{2}+1\right)},$$

$$\Lambda = \frac{\pi}{2}\left(1 + 2\sum_{m=1}^{\infty} h_1^{m^2}\right)^2, \quad h_1 = \exp\left(-\pi\frac{\Lambda'}{\Lambda}\right) = h^s,$$

следует асимптотическое равенство

$$\sqrt{\lambda}\left(\frac{2\pi}{\Lambda}J_q(\lambda)\right)^{1/q} = 2\left(2\sqrt{\pi}\frac{\Gamma\left(\dfrac{q+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{q}{2}+1\right)}\right)^{1/q} h^{s/4} + O\left(h^{5s/4}\right). \tag{9}$$

С помощью отображения $z = e^{iw}$ можно свести задачу о вычислении поперечников класса $B\widetilde{H}_\infty^{\mathbb{R}}(D_H)$ к соответствующей задаче для класса $BH_\infty^{\mathbb{R}}(\Delta_h)$, где $h = e^{-2H}$. Таким образом, из (4), (5), теоремы 3 и (9) получаем

Теорема 4. *Для* $L_q := L_q[0,2\pi]$ *при всех* $n \in \mathbb{N}$ *имеют место равенства*

$$d_{2n}\left(B\widetilde{H}^{\mathbb{R}}_{\infty}(D_H), L_q\right) = \lambda_{2n}\left(B\widetilde{H}^{\mathbb{R}}_{\infty}(D_H), L_q\right) = d^{2n}\left(B\widetilde{H}^{\mathbb{R}}_{\infty}(D_H), L_q\right)$$

$$= \begin{cases} \sqrt{\lambda}\left(\dfrac{2\pi}{\Lambda}J_q(\lambda)\right)^{1/q} = 2\left(2\sqrt{\pi}\dfrac{\Gamma\left(\dfrac{q+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{q}{2}+1\right)}\right)^{1/q} e^{-Hn} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad +O\left(e^{-5Hn}\right), & 1 \le q < \infty, \\ \sqrt{\lambda}, & q = \infty, \end{cases}$$

где $\lambda = \kappa\left(e^{-4Hn}\right)$.

§3. Оптимальные квадратурные формулы

Рассмотрим величину $e(L, I_\tau, W, \delta)$, когда $W \subset BH_\infty(\Omega)$,

$$Lx = \int_G x(t)\,d\mu(t),$$

$G \in \Omega$, μ — неотрицательная мера на G, $\tau = (t_1, \dots, t_n)$, t_j — различные точки из множества G, а $Y = l_p^n$, $1 \le p \le \infty$. Положим в этом случае

$$e_{np}((W,\delta) := \inf_{t_j \in G} e(L, I_\tau, W, \delta). \tag{10}$$

Узлы, на которых достигается нижняя грань, будем называть оптимальными. Таким образом, задача (10) является задачей о нахождении оптимального метода интегрирования функции $x \in W$, использующего n приближенных значений $\widetilde{x}(t_1), \dots, \widetilde{x}(t_n)$ таких, что

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \widetilde{x}(t_j) - x(t_j)|^p\right)^{1/p} \le \delta \quad \text{при} \quad 1 \le p < \infty$$

или

$$\max_{1 \le j \le n} |\widetilde{x}(t_j) - x(t_j)| \le \delta \quad \text{при} \quad p = \infty.$$

Рассмотрим задачу (10) для $W = B\widetilde{H}_\infty(D_H)$ и

$$Lx = \int_0^{2\pi} x(t)\,dt.$$

В тривиальном случае, когда $\delta \ge n^{1/p}$ (в дальнейшем все выражения с p при $p = \infty$ понимаются как предельные значения при $p \to \infty$), из равенства (3) вытекает, что для любой системы узлов $e(L, I_\tau, B\widetilde{H}_\infty(D_H), \delta) = 2\pi$, $x(t) \equiv 1$ — экстремальная функция, а $Lx \approx 0$ — оптимальный метод (тем самым любой набор узлов оптимальный).

Положим

$$J_q(\lambda,\Delta):=\int_0^1\left(\frac{\lambda t^2+\Delta}{1+\Delta\lambda t^2}\right)^{q/2}\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-\lambda^2t^2)}}.$$

Теорема 5. *Пусть $1\le p\le\infty$ и $0\le\delta<n^{1/p}$. Тогда*

1) *квадратурная формула*

$$\int_0^{2\pi}x(t)\,dt\approx\frac{2\pi}{n}(1-\Delta^2)^{-1}(1-\Lambda^{-1}J_4(\lambda,\Delta))\sum_{j=0}^{n-1}\widetilde{x}\left(j\frac{2\pi}{n}\right), \tag{11}$$

в которой $\Delta=\delta n^{-1/p}$, а $\lambda=\kappa(e^{-2Hn})$, является оптимальным методом интегрирования на классе $B\widetilde{H}_\infty(D_H)$ по значениям, заданным с погрешностью δ в норме $Y=l_p^n$;

2) *имеет место равенство*

$$\begin{gathered}e_{np}(B\widetilde{H}_\infty(D_H),\delta)=2\pi\Lambda^{-1}J_2(\lambda,\delta n^{-1/p})=2\pi\delta n^{-1/p}\\+4\pi(1-\delta^2n^{-2/p})e^{-Hn}+4\pi\delta(4-3\delta^2n^{-2/p})n^{-1/p}e^{-2Hn}+O\left(e^{-3Hn}\right);\end{gathered}$$

3) *узлы $t_j^*=(j-1)\dfrac{2\pi}{n}$, $j=1,\dots,n$, — единственные с точностью до сдвига оптимальные узлы.*

Доказательство. Пусть $0\le t_1<\ldots<t_n<2\pi$. Положим для k, определенного из условия $\dfrac{\pi K'}{2K}=H$,

$$W(z):=k^{n/2}\prod_{j=1}^n\operatorname{sn}\left(\frac{K}{\pi}(z-t_j)\right).$$

Нетрудно убедиться, что $W^2(z)\in B\widetilde{H}_\infty(D_H)$, причем при всех $s\in\mathbb{R}$ $|W(s\pm iH)|=1$. Для $t\in[0,2\pi)$ и $x\in B\widetilde{H}_\infty(D_H)$ рассмотрим интеграл

$$Jx:=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{K}{\pi}\cdot\frac{W^2(t)(1+\Delta W^2(\xi))^2}{W^2(\xi)(1+\Delta W^2(t))^2}\operatorname{ctn}\left(\frac{K}{\pi}(\xi-t)\right)x(\xi)\,d\xi,$$

где $\operatorname{ctn}z:=\operatorname{cn}z\operatorname{dn}z/\operatorname{sn}z$, а Γ — граница прямоугольника: $-\varepsilon\le\operatorname{Re}z\le2\pi-\varepsilon$, $|\operatorname{Im}z|\le H$, в котором $\varepsilon>0$ выбрано из условия, чтобы точки $t,t_1,\dots,t_n$ лежали внутри этого прямоугольника. По теореме о вычетах будем иметь

$$Jx=x(t)-\sum_{j=1}^n(a_{j0}(t)x(t_j)+a_{j1}(t)x'(t_j)), \tag{12}$$

где

$$a_{j1}(t) = \frac{K}{\pi} \cdot \frac{W^2(t)}{W'^2(t_j)(1+\Delta W^2(t))^2} \operatorname{ctn}\left(\frac{K}{\pi}(t-t_j)\right),$$

$$a_{j0}(t) = \frac{K^2}{\pi^2} \cdot \frac{W^2(t)}{W'^2(t_j)(1+\Delta W^2(t))^2} \cdot \frac{1-k^2 \operatorname{sn}^4\left(\frac{K}{\pi}(t-t_j)\right)}{\operatorname{sn}^2\left(\frac{K}{\pi}(t-t_j)\right)} - \frac{W''(t_j)}{W'(t_j)} a_{j1}(t).$$

Рассмотрим при фиксированном $t \in [0, 2\pi)$ функцию

$$f(\xi) := \frac{K}{\pi} \cdot \frac{W^2(t)}{W^2(\xi)(1+\Delta W^2(t))^2} \operatorname{ctn}\left(\frac{K}{\pi}(\xi - t)\right).$$

Функция f является эллиптической функцией с периодами 2π и $i2\pi K'/K$. С точностью до периодов все полюсы f находятся в точках $t, t_1, \dots, t_n$ и $t + i\pi K'/K$. Пользуясь тем, что сумма вычетов эллиптической функции относительно всех полюсов, лежащих внутри параллелограмма периодов равна нулю (см. [12, с. 16]), получаем

$$(13) \qquad (1+\Delta W^2(t))^{-2} - \sum_{j=1}^{n} a_{j0}(t) - W^4(t)(1+\Delta W^2(t))^{-2} = 0.$$

В силу 2π-периодичности функций $W^2(z)$ и $\operatorname{ctn}\left(\frac{K}{\pi} z\right)$ в интеграле Jx Γ можно заменить на $\Gamma_0 := [2\pi + iH, iH] \cup [-iH, 2\pi - iH]$. Из свойств эллиптических функций вытекают равенства

$$\operatorname{ctn}\left(\frac{K}{\pi}(s \pm iH)\right) = \operatorname{ctn}\left(\frac{K}{\pi}s \pm i\frac{K'}{2}\right) = \mp i(1+k)\frac{1-k\operatorname{sn}^2\left(\frac{K}{\pi}s\right)}{1+k\operatorname{sn}^2\left(\frac{K}{\pi}s\right)}.$$

Тем самым интеграл Jx может быть записан в виде

$$(14) \qquad Jx = \alpha \int_{\Gamma_1} \overline{g(\xi)} \chi(\xi, t) x(\xi)\, d\mu(\xi),$$

где

$$\alpha := \frac{K(1+k)W^2(t)}{2\pi^2(1+\Delta W^2(t))^2}, \qquad g(\xi) := \frac{W^2(\xi)+\Delta}{1+\Delta W^2(\xi)},$$

$$\chi(\xi, t) := \frac{(1+\Delta W^2(\xi))(W^2(\xi)+\Delta)}{W^2(\xi)} \cdot \frac{1-k\operatorname{sn}^2\left(\frac{K}{\pi}(\operatorname{Re}\xi - t)\right)}{1+k\operatorname{sn}^2\left(\frac{K}{\pi}(\operatorname{Re}\xi - t)\right)},$$

а $\Gamma_1 := [iH, 2\pi + iH] \cup [-iH, 2\pi - iH]$ с мерой $d\mu(s \pm iH) = ds$. Поскольку $|W(\xi)| = 1$ при $\xi \in \Gamma_1$, то $|g(\xi)| = 1$ и $\chi(\xi, t) > 0$ при всех $\xi \in \Gamma_1$ и $t \in [0, 2\pi)$. Из равенств (12) и (14) получаем представление

$$\int_0^{2\pi} x(t)\,dt - \sum_{j=1}^{n} (A_{j0}x(t_j) + A_{j1}x'(t_j)) = \alpha \int_{\Gamma_1} \overline{g(\xi)}\Psi(\xi)x(\xi)\,d\mu(\xi),$$

в котором

$$\Psi(\xi) := \int_0^{2\pi} \chi(\xi, t)\,dt, \quad A_{jm} := \int_0^{2\pi} a_{jm}(t)\,dt, \quad m = 0, 1.$$

Обозначим через $W_0(t)$ функцию $W(t)$ для узлов t_j^* (соответствующую функцию g в этом случае обозначим через g_0). С помощью первого главного преобразования эллиптических функций n-ой степени можно показать, что

$$W_0(t) = (-1)^{n+1}\sqrt{\lambda}\,\mathrm{sn}\left(\frac{n\Lambda}{\pi}t, \lambda\right), \tag{15}$$

где $\lambda = \kappa\left(e^{-2Hn}\right)$. Следовательно, $W_0^2(t + t_j^*) = W_0^2(t)$ и в силу нечетности $\mathrm{ctn}\, z$ имеем

$$\int_0^{2\pi} \frac{W_0^2(t)}{(1 + \Delta W_0^2(t))^2}\,\mathrm{ctn}\left(\frac{K}{\pi}(t - t_j^*)\right)dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{W_0^2(t)}{(1 + \Delta W_0^2(t))^2}\,\mathrm{ctn}\left(\frac{K}{\pi}t\right)dt = 0.$$

Тем самым $A_{j1} = 0$, $j = 1, \ldots, n$. Используя аналогичные соображения, находим

$$A_{j0} = \frac{K^2}{\pi^2 W_0'^2(t_j)} \int_0^{2\pi} \frac{W_0^2(t)}{(1 + \Delta W_0^2(t))^2} \cdot \frac{1 - k^2\,\mathrm{sn}^4\left(\dfrac{K}{\pi}t\right)}{\mathrm{sn}^2\left(\dfrac{K}{\pi}t\right)}\,dt.$$

Из (15) можно найти $W_0'(t_j)$ и убедиться, что $A_{10} = \ldots = A_{n0} =: A$.

Для нахождения величины A воспользуемся равенством (13), интегрируя которое, получаем

$$nA = \sum_{j=1}^{n} A_{j0} = \int_0^{2\pi} \frac{1 - W_0^4(t)}{(1 + \Delta W_0^2(t))^2}\,dt = (1 - \Delta^2)^{-1}\int_0^{2\pi} (1 - g_0^2(t))\,dt.$$

Делая в последнем интеграле замены переменных $\dfrac{n\Lambda}{\pi}t = z$, $x = \mathrm{sn}(\lambda, t)$, находим

$$A = \frac{2\pi}{n}(1 - \Delta^2)^{-1}(1 - \Lambda^{-1}J_4(\lambda, \Delta)).$$

Итак, доказано равенство

$$\int_0^{2\pi} x(t)\,dt - A\sum_{j=1}^n x(t_j^*) = \alpha\int_{\Gamma_1}\overline{g_0(\xi)}\Psi(\xi)x(\xi)\,d\mu(\xi).$$

Положим для $z=(z_1,\dots,z_n)\in l_p^n$ $\langle y_0^*, z\rangle := A\sum_{j=1}^n z_j$. Тогда для $\tau^* := (t_1^*,\dots,t_n^*)$

$$\langle y_0^*, I_{\tau^*}g_0\rangle = A\sum_{j=1}^n g_0(t_j^*) = A\delta n^{1-1/p} = \delta\|y_0^*\|.$$

Кроме того, $\|I_{\tau^*}g_0\|_p=\delta$. Применяя теорему 1, получаем, что квадратурная формула (11) является наилучшим методом интегрирования на классе $B\widetilde{H}_\infty(D_H)$ по значениям в системе узлов τ^*, заданным с погрешностью δ в норме l_p^n, причем функция g_0 экстремальная. Следовательно,

$$e_{np}(B\widetilde{H}_\infty(D_H),\delta)\le\int_0^{2\pi} g_0(t)\,dt. \tag{16}$$

С другой стороны, так как для любой системы узлов τ функция $g\in B\widetilde{H}_\infty(D_H)$ и $\|I_\tau g\|_p=\delta$, то из равенства (3) и теоремы 3, положив

$$\varphi(x) := \varphi_1\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}x\right),\quad \varphi_1(y) := \frac{y^2+\Delta}{1+\Delta y^2},$$

имеем

$$e_{np}(B\widetilde{H}_\infty(D_H),\delta)\ge\inf_{\tau\in\Lambda_n}\int_0^{2\pi} g(t)\,dt = \int_0^{2\pi}\varphi_1(|W_0(t)|)\,dt. \tag{17}$$

Поскольку $\varphi_1(|W_0(t)|)=g_0(t)$, то из (16) и (17) получаем

$$e_{np}(B\widetilde{H}_\infty(D_H),\delta)=\int_0^{2\pi} g_0(t)\,dt.$$

Выражение для этой величины через функцию J_2 получается аналогично нахождению значения A, а асимптотическое равенство — аналогично равенству (9).

Утверждение 3) вытекает из того, что инфимум в (17) достигается только для системы точек, равномерно распределенных с шагом $2\pi/n$. Теорема доказана. $\square$

Обозначим через $\mathbf{Э}_c$ внутренность эллипса с фокусами в точках ±1 и суммой полуосей $c>1$. Рассмотрим задачу (10) для $W=BH_\infty(\mathbf{Э}_c)$ и

$$Lx=\int_{-1}^1 x(t)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

При $\delta \geq n^{1/p}$ решение этой задачи тривиально и может быть получено из тех же соображений, которые использовались ранее для класса $B\widetilde{H}_\infty(D_H)$.

Теорема 6. *Пусть* $1 \leq p \leq \infty$ *и* $0 \leq \delta < n^{1/p}$. *Тогда*

1) *квадратурная формула*

$$\int_{-1}^{1} x(t)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \approx \frac{\pi}{n}(1-\Delta^2)^{-1}(1-\Lambda^{-1}J_4(\lambda,\Delta))\sum_{j=1}^{n}\widetilde{x}\left(\cos\frac{2j-1}{2n}\pi\right), \tag{18}$$

в которой $\Delta = \delta n^{-1/p}$, *а* $\lambda = \kappa(c^{-4n})$, *является оптимальным методом интегрирования на классе* $BH_\infty(\text{Э}_c)$ *по значениям, заданным с погрешностью* δ *в норме* $Y = l_p^n$;

2) *имеет место равенство*

$$\begin{aligned} e_{np}(BH_\infty(\text{Э}_c),\delta) &= \pi\Lambda^{-1}J_2(\lambda,\delta n^{-1/p}) = \pi\delta n^{-1/p} \\ &+ 2\pi(1-\delta^2 n^{-2/p})c^{-2n} + 2\pi\delta(4-3\delta^2 n^{-2/p})n^{-1/p}c^{-4n} + O\left(c^{-6n}\right); \end{aligned}$$

3) *узлы* $\left\{\cos\frac{2j-1}{2n}\pi\right\}_{j=1}^{n}$ *являются единственными оптимальными узлами.*

Доказательство. Если $x(t) \in BH_\infty(\text{Э}_c)$, то $x(\cos t) \in B\widetilde{H}_\infty(D_H)$ при $H = \ln c$. Применяя теорему 5, получим, что погрешность квадратурной формулы (18), а следовательно, и оптимального метода интегрирования не превосходит величины

$$\frac{1}{2}e_{2n,p}(B\widetilde{H}_\infty(D_H), 2^{1/p}\delta) = \frac{1}{2}e_{n,p}(B\widetilde{H}_\infty(D_H),\delta) = \pi\Lambda^{-1}J_2(\lambda,\delta n^{-1/p}).$$

Для оценки снизу воспользуемся равенством (3). Функция

$$z = k\,\mathrm{sn}^2\left(\frac{K}{\pi}\arccos t\right) \tag{19}$$

конформно отображает область Э_c на единичный диск $D := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ и переводит отрезок $[-1,1]$ в отрезок $[0,k]$, где k удовлетворяет равенству $\pi K'/K = 2\ln c$. Положив $H_\infty := H_\infty(D)$, с помощью замены переменной (19) из (3) находим

$$e_{np}(BH_\infty(\text{Э}_c),\delta) = \inf_{0\leq z_1<\ldots<z_n\leq k}\ \sup_{\substack{f\in BH_\infty \\ \|I_\tau f\|_p\leq\delta}}\left|\int_0^k f(z)q(z)\,dz\right|,$$

где $\tau = (z_1,\ldots,z_n)$, а $q(z) = \frac{\pi}{2K}(z(k-z)(1-kz))^{-1/2}$. Положим

$$W_\tau(z) := \prod_{j=1}^{n}\frac{z-z_j}{1-z_j z},\quad g_\tau(z) := \varphi_1(W_\tau(z)),$$

где $\varphi_1(y) = (y^2 + \Delta)/(1 + \Delta y^2)$. Легко видеть, что $g_\tau \in BH_\infty$ и $\|I_\tau g_\tau\|_p = \delta$. Таким образом,

$$e_{np}(BH_\infty(\mathbf{Э}_c), \delta) \geq \inf_{\tau \in [0,k]^n} \int_0^k g_\tau(z) q(z)\, dz.$$

Сделав в последнем интеграле замену $z = k \operatorname{sn}^2\left(\frac{K}{\pi} t\right)$, получаем неравенство

$$e_{np}(BH_\infty(\mathbf{Э}_c), \delta) \geq \inf_{\theta \in \Lambda_n} \int_0^\pi \varphi\left(\frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} |f_\theta(t)|\right) dt, \tag{20}$$

в котором φ определено в теореме 5, а

$$f_\theta(t) := k^n \prod_{j=1}^n \frac{\operatorname{sn}^2\left(\frac{K}{\pi} t\right) - \operatorname{sn}^2\left(\frac{K}{\pi} \theta_j\right)}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2\left(\frac{K}{\pi} \theta_j\right) \operatorname{sn}^2\left(\frac{K}{\pi} t\right)}$$
$$= k^n \prod_{j=1}^n \operatorname{sn}\left(\frac{K}{\pi}(t - \theta_j)\right) \operatorname{sn}\left(\frac{K}{\pi}(t + \theta_j)\right).$$

Применяя к правой части неравенства (20) теорему 3, будем иметь

$$e_{np}(BH_\infty(\mathbf{Э}_c), \delta) \geq \frac{1}{2} \int_0^\pi \varphi\left(\frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} |f_0(t)|\right) dt,$$

где через f_0 обозначена функция f для $\theta_j = \frac{2j-1}{2n}\pi$, $j = 1, \ldots, n$. Нетрудно убедиться (с помощью первого главного преобразования эллиптических функций $2n$-ой степени), что

$$f_0(t) = (-1)^{n+1} \sqrt{\lambda} \operatorname{sn}\left(\frac{2n\Lambda}{\pi} t + \Lambda, \lambda\right), \quad \lambda = \kappa\left(e^{-2n\pi K'/K}\right)$$
$$= \kappa\left(c^{-4n}\right).$$

Тем самым

$$e_{np}(BH_\infty(\mathbf{Э}_c), \delta) \geq \pi \Lambda^{-1} J_2(\lambda, \delta n^{-1/p}).$$

Единственность оптимальных узлов следует из единственности равномерной системы узлов с шагом π/n, симметричной относительно нуля. Теорема доказана. $\square$

§4. Оптимальное восстановление аналитических функций

Рассмотрим задачу оптимального восстановления функции $x \in W$ по точным значениям в системе узлов $\tau = (t_1, \dots, t_n)$. Положим

$$e(t, I_\tau, W) := e(L_t, I_\tau, W, 0) \tag{21}$$

$$e(E, \mathcal{T}, W) := \inf_{\tau \in \mathcal{T}} \sup_{t \in E} e(t, I_\tau, W), \tag{22}$$

где E — некоторое множество из области определения функций класса W, а $\mathcal{T}$ — заданное множество систем τ. Системы, на которых достигается нижняя грань в (22), будем называть *оптимальными.*

Пусть $W = B\widetilde{H}_\infty(D_H)$, $E = [0, 2\pi)$ и $\mathcal{T} = \{\tau = (t_1, \dots, t_n) : 0 \le t_1 < \dots < t_n < 2\pi\}$. Величину (22) в этом случае обозначим через $e_n(B\widetilde{H}_\infty(D_H))$.

Теорема 7. *Имеет место равенство*

$$e_{2n}(B\widetilde{H}_\infty(D_H)) = \left(\kappa(e^{-4Hn})\right),$$

причем единственными с точностью до сдвига оптимальными узлами являются узлы $t_j^* = (j-1)\pi/n$, $j = 1, \dots, 2n$. Метод

$$x(t) \approx \frac{K}{2n\Lambda} \operatorname{sn}\left(\frac{2n\Lambda}{\pi} t, \lambda\right) \sum_{j=0}^{2n-1} (-1)^j \operatorname{ctn}\left(\frac{K}{\pi} t - j\frac{K}{n}\right) x\left(j\frac{\pi}{n}\right),$$

в котором $k = \kappa(e^{-2H})$, а $\lambda = \kappa(e^{-4Hn})$, является оптимальным методом восстановления на классе $B\widetilde{H}_\infty(D_H)$ при всех $t \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Пусть $0 \le t_1 < \dots < t_{2n} < 2\pi$. Положим

$$W(t) := k^n \prod_{j=1}^{2n} \operatorname{sn}\left(\frac{K}{\pi}(t - t_j)\right),$$

где k выбрано из условия $\pi K'/K = 2H$ (тем самым $k = \kappa(e^{-2H})$). Нетрудно убедиться, что $W \in B\widetilde{H}_\infty(D_H)$. Рассматривая для $t \in [0, 2\pi)$ и $x \in B\widetilde{H}_\infty(D_H)$ интеграл

$$Jx := \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{KW(t)}{\pi W(\xi)} \operatorname{ctn}\left(\frac{K}{\pi}(\xi - t)\right) x(\xi)\, d\xi,$$

аналогично доказательству теоремы 5 можно показать, что имеет место равенство

$$x(t) - \frac{K}{\pi} W(t) \sum_{j=1}^{2n} \frac{1}{W'(t_j)} \operatorname{ctn}\left(\frac{K}{\pi}(t - t_j)\right) x(t_j) = \int_{\Gamma_1} \overline{W(\xi)} \varphi_1(\xi) x(\xi)\, d\mu(\xi),$$

где

$$\varphi_1(\xi) := \frac{K(1+k)W^2(t)}{2\pi^2} \cdot \frac{1 - k\,\mathrm{sn}^2\left(\dfrac{K}{\pi}(\mathrm{Re}\,\xi - t)\right)}{1 + k\,\mathrm{sn}^2\left(\dfrac{K}{\pi}(\mathrm{Re}\,\xi - t)\right)}$$

(за Γ, Γ_1 и μ сохранены те же обозначения, что и в доказательстве теоремы 5). Поскольку $\varphi_1(\xi) > 0$ при всех $\xi \in \Gamma_1$, то из теоремы 1 следует оптимальность метода восстановления

$$x(t) \approx \frac{K}{\pi} W(t) \sum_{j=1}^{2n} \frac{1}{W'(t_j)} \operatorname{ctn}\left(\frac{K}{\pi}(t - t_j)\right) x(t_j) \tag{23}$$

для любой системы узлов $\tau = (t_1, \dots, t_{2n})$, а также равенство

$$e(L_t, I_\tau, B\widetilde{H}_\infty(D_H), 0) = |W(t)|.$$

Теперь доказываемое утверждение вытекает из теоремы 3 и вида функции W для системы узлов $t_j^* = (j-1)\pi/n$, $j = 1, \dots, 2n$, найденного в доказательстве теоремы 3. $\square$

Отметим, что построенный нами оптимальный метод восстановления (23) может быть также получен из работы [15], пользуясь связью между классами $B\widetilde{H}_\infty(D_H)$ и $BH_\infty(\Delta_h)$ при $h = e^{-2H}$.

Рассмотрим задачу (22), когда τ — бесконечная система узлов. В этом случае для получения интегрального представления, используемого при построении оптимального метода восстановления, нам потребуется один вспомогательный результат.

Напомним, что *бесконечным произведением Бляшке для единичного диска D* называется функция вида

$$B(z) = \prod_{n=1}^{\infty} -\frac{\overline{z}_n}{|z_n|} \cdot \frac{z - z_n}{1 - \overline{z}_n z}, \tag{24}$$

где $z_n \in D$ (для $z_n = 0$ частное $-\overline{z}_n/|z_n|$ заменяется на единицу и в соответствии с этим будем считать, что $\mathrm{sign}\,0 = 1$). Известно (см., например, [16, с. 61]), что если $z_n \in D$ удовлетворяют условию Бляшке

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |z_n|) < \infty,$$

то произведение (24) сходится в D, $B(z) \in BH_\infty$ и $|B(e^{i\theta})| = 1$ почти всюду.

Через H_p, $1 \le p < \infty$, будем обозначать множество аналитических в единичном диске D функций, для которых

$$\|f\|_{H_p} := \sup_{0<r<1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^p \, d\theta\right)^{1/p} < \infty.$$

Лемма 1. *Пусть последовательности* $\{z_j\}_{-\infty}^{\infty}$, $\{\nu_j\}_{-\infty}^{\infty}$ *таковы, что* $-1 < z_j < z_{j+1} < 1$, $\nu_j \in \mathbb{N}$, $j = 0, \pm 1, \ldots$,

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \nu_j (1 - |z_j|) < \infty,$$

и для

$$B(z) := \prod_{j=-\infty}^{\infty} \left(-\operatorname{sign} z_j \frac{z - z_j}{1 - z_j z} \right)^{\nu_j}$$

существуют такие $\alpha_j \in (z_j, z_{j+1})$, $j = 0, \pm 1, \ldots$, *что*

$$|B(\alpha_j)| \geq c > 0.$$

Тогда для любой функции $f \in H_p$, $1 \leq p \leq \infty$, *имеет место равенство*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{f(z)}{B(z)}\, dz = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{(-\operatorname{sign} z_j)^{\nu_j}}{(\nu_j - 1)!} \left[\frac{f(z)(1 - z_j z)^{\nu_j}}{\omega_j(z)} \right]^{(\nu_j - 1)}_{\Big| z = z_j},$$

где

$$\omega_j(z) := \prod_{k \neq j} \left(-\operatorname{sign} z_k \frac{z - z_k}{1 - z_k z} \right)^{\nu_k}.$$

Доказательство. Поскольку $H_p \subset H_1$ для всех $1 < p \leq \infty$, то достаточно рассмотреть случай $p = 1$. Без ограничения общности будем считать, что $z_j \neq 0$, $j = 0, \pm 1, \ldots$ (в противном случае с помощью конформного преобразования единичного круга можно прийти к рассматриваемой ситуации). Из неравенства Фейера–Рисса (см. [17, с. 46])

$$\int_{-1}^{1} |f(x)|\, dx \leq \pi \|f\|_{H_1}$$

и того, что при всех $x \in (0, 1)$

$$\left| \frac{ix - z_j}{1 - z_j ix} \right| \geq |z_j|,$$

а следовательно, $|B(ix)| \geq |B(0)|$, вытекает существование интегралов

$$I_k := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_k} \frac{f(z)}{B(z)}\, dz, \quad k = 0, 1,$$

где $D_k := \{z \in D : (-1)^k \operatorname{Re} z > 0\}$. Таким образом,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{f(z)}{B(z)}\, dz = I_0 + I_1.$$

Пусть для определенности $z_0 < 0 < z_1$. Докажем, что

$$I_0 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu_j}}{(\nu_j - 1)!} \left[\frac{f(z)(1 - z_j z)^{\nu_j}}{\omega_j(z)} \right]^{(\nu_j - 1)}_{\Big| z = z_j} \tag{25}$$

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и выберем $\varphi \in (0, \pi/2)$ так, чтобы

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\varphi}^{\varphi} |f(e^{i\theta})| \, d\theta < \varepsilon.$$

Тогда в силу хорошо известного равенства (см., например, [18, с. 390])

$$\lim_{r \to 1} \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} |f(re^{i\theta}) - f(e^{i\theta})| \, d\theta = 0$$

существует такое $r_1 \in (0,1)$, для которого при всех $r \in (r_1, 1)$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} |f(re^{i\theta}) - f(e^{i\theta})| \, d\theta < \varepsilon.$$

Тем самым при всех $r \in (r_1, 1)$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\varphi}^{\varphi} |f(re^{i\theta})| \, d\theta &\le \frac{1}{2\pi} \int_{-\varphi}^{\varphi} |f(e^{i\theta})| \, d\theta \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-\varphi}^{\varphi} |f(re^{i\theta}) - f(e^{i\theta})| \, d\theta < 2\varepsilon. \end{aligned} \tag{26}$$

Из неравенства Фейера–Рисса следует существование $r_2 \in (0,1)$, для которого

$$\frac{1}{2\pi} \int_{r_2}^{1} |f(xe^{i\theta})| \, dx < \varepsilon \tag{27}$$

при $\theta = \pm\varphi$. Пусть

$$r_0 := \max\{r_1, r_2, (1 - \sin\varphi)/(1 + \sin\varphi)\}, \quad N := \max\{n : \alpha_n \le r_0\}.$$

Тогда, положив

$$\begin{aligned} S_n &:= \{\, z \in D : |z| > \alpha_n, \ |\arg z| < \varphi \,\}, \quad \Omega_n := D_0 \setminus S_n, \\ \Gamma_n &:= \partial D \cap \partial S_n, \quad \gamma_n := D \cap \partial S_n, \end{aligned}$$

будем иметь для всех $n > N$

$$\begin{aligned} R_n &:= \left| I_0 - \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{\nu_j}}{(\nu_j - 1)!} \left[\frac{f(z)(1 - z_j z)^{\nu_j}}{\omega_j(z)} \right]^{(\nu_j - 1)}_{\Big|z = z_j} \right| \\ &= \left| I_0 - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega_n} \frac{f(z)}{B(z)} \, dz \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n} \frac{f(z)}{B(z)} \, dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} \frac{f(z)}{B(z)} \, dz \right| \\ &\le \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_n} |f(z)| \, |dz| + \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_n} \left| \frac{f(z)}{B(z)} \right| |dz| < \varepsilon + \frac{b_n}{2\pi} \int_{\gamma_n} |f(z)| \, |dz|, \end{aligned}$$

где

$$b_n := \sup_{z \in \gamma_n} |B(z)|^{-1}.$$

Нетрудно убедиться, что множество точек z, для которых

$$\left| \frac{z - z_j}{1 - z_j z} \right| < \left| \frac{\alpha_n - z_j}{1 - z_j \alpha_n} \right|,$$

при всех $j \geq n+1$ является кругом, лежащим внутри области S_n, а при всех $1 \leq j \leq n$ — кругом, лежащим вне области S_n. Отсюда следует, что при всех $z \in \gamma_n$ и $j \geq 0$

$$\left|\frac{z-z_j}{1-z_jz}\right| \geq \left|\frac{\alpha_n-z_j}{1-z_j\alpha_n}\right|.$$

Следовательно, для любого $z \in \gamma_n$ имеем

$$|B(z)| \geq \prod_{j=0}^{-\infty}\left|\frac{z-z_j}{1-z_jz}\right|\prod_{j=1}^{\infty}\left|\frac{\alpha_n-z_j}{1-z_j\alpha_n}\right| \geq |B(\alpha_n)|\prod_{j=0}^{-\infty}|z_j|$$
$$\geq c\prod_{j=0}^{-\infty}|z_j| =: c_1.$$

Таким образом, $b_n \leq c_1^{-1}$ и в силу неравенств (26), (27)

$$R_n < \varepsilon+\frac{1}{2\pi c_1}\left(\int_{-\varphi}^{\varphi}|f(\alpha_ne^{i\theta})|\,d\theta+\int_{r_0}^{1}|f(xe^{i\theta})|\,dx+\int_{r_0}^{1}|f(xe^{-i\theta})|\,dx\right)$$
$$< \varepsilon(1+4c_1^{-1}).$$

Тем самым равенство (25) доказано. Аналогично доказывается равенство

$$I_1 = \sum_{j=0}^{-\infty}\frac{1}{(\nu_j-1)!}\left[\frac{f(z)(1-z_jz)^{\nu_j}}{\omega_j(z)}\right]^{(\nu_j-1)}_{\Big|z=z_j}.$$

Лемма доказана. □

Теорема 8. *Пусть система $\{z_j\}_{-\infty}^{\infty}$ удовлетворяет условию леммы 1 при $\nu_j \equiv 1$. Тогда для любого $\xi \in D$ метод*

$$f(\xi) \approx W(\xi)\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{1}{W'(z_j)(\xi-z_j)}\left(\frac{1-|\xi|^2}{1-\bar{\xi}z_j}\right)^{(p-2)/p}f(z_j),$$

где

$$W(z) := \prod_{j=-\infty}^{\infty} -\operatorname{sign} z_j\frac{z-z_j}{1-z_jz},$$

является оптимальным методом восстановления на классе BH_p, $1 \leq p \leq \infty$, по информации $I_\tau f := \{f(z_j)\}_{-\infty}^{\infty}$, а для его погрешности справедливо равенство

$$e(\xi, I_\tau, BH_p) = \frac{|W(\xi)|}{(1-|\xi|^2)^{1/p}}.$$

Доказательство. Для $\xi \in D$ и $f \in BH_p$ положим

$$Jf := \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{W(\xi)}{W(z)(z-\xi)}\left(\frac{1-|\xi|^2}{1-\bar{\xi}z}\right)^{(p-2)/p}f(z)\,dz. \tag{28}$$

Рассмотрим функцию $g(z) := e^{i\arg W(\xi)} W(z)(1-\overline{\xi}z)^{-2/p}$. Имеем

$$Jf = \frac{\alpha}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{g(e^{i\theta})}|g(e^{i\theta})|^{p-2} f(e^{i\theta})\,d\theta, \quad 1 \le p < \infty,$$

где $\alpha := |W(\xi)|(1-|\xi|^2)^{(p-2)/p}$, и при $p=\infty$

$$Jf = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{g(e^{i\theta})}\varphi(e^{i\theta}) f(e^{i\theta})\,d\theta,$$

где $\varphi(z) := |W(\xi)|(1-|\xi|^2)/|1-\overline{\xi}z|^2 > 0$ при всех $|z|=1$. С другой стороны, применяя к (28) лемму 1, получаем

$$f(\xi) - W(\xi)\sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{W'(z_j)(\xi - z_j)}\left(\frac{1-|\xi|^2}{1-\overline{\xi}z_j}\right)^{(p-2)/p} f(z_j) = Jf.$$

Остается воспользоваться теоремой 1. Теорема доказана. $\square$

Рассмотрим некоторые конкретные системы узлов. Пусть $k \in (0,1)$,

$$a_j := \operatorname{th}\left(j\frac{\pi K}{K'}\right), \quad j = 0, \pm1, \ldots, \tag{29}$$

и

$$B_0(z,k) := z\prod_{j=1}^{\infty}\frac{a_j^2 - z^2}{1 - a_j^2 z^2}.$$

С помощью разложения эллиптических функций в произведения (см. [12]) можно показать, что

$$B_0(z,k) = \sqrt{k}\,\operatorname{sn}\left(\frac{2K'}{\pi}\operatorname{arth} z\right).$$

Положим

$$\alpha_j := \operatorname{th}\left[(2j-1)\frac{\pi K}{2K'}\right], \quad j = 0, \pm1, \ldots \tag{30}$$

Тогда $B_0(\alpha_j, k) = (-1)^{j+1}\sqrt{k}$. Следовательно, система $\{a_j\}_{-\infty}^{\infty}$ удовлетворяет условиям леммы 1 и к ней применима теорема 8.

При конформном отображении полосы D_H на единичный диск D, задаваемом функцией

$$z = \operatorname{th}\left(\frac{\pi}{4H}t\right), \tag{31}$$

система узлов $\{jh\}_{-\infty}^{\infty}$, $h > 0$, переходит в систему $\{a_j\}_{-\infty}^{\infty}$, если k выбрано из условия $K'/K = 4H/h$, т.е. $k = \kappa(exp(-4\pi H/h))$. Пользуясь конформной эквивалентностью рассматриваемых задач восстановления для классов $BH_\infty(D_H)$ и BH_∞, получаем из теоремы 8

Следствие 1. *При всех* $h > 0$ *и* $t \in \mathbb{R}$ *метод*

$$x(t) \approx \frac{\pi}{K'} \operatorname{sn}\left(\frac{K'}{2H}t\right) \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j \frac{x(jh)}{\operatorname{sh}\left[\dfrac{\pi}{2H}(t-jh)\right]},$$

в котором $k = \kappa(\exp(-4\pi H/h))$, *является оптимальным методом восстановления на классе* $BH_\infty(D_H)$. *Для его погрешности справедливо равенство*

$$e(t, I_\tau, BH_\infty(D_H)) = \sqrt{k}\left|\operatorname{sn}\left(\frac{K'}{2H}t\right)\right|.$$

Обозначим через $\widetilde{\Theta}_h$, $h > 0$, системы узлов $\{t_j\}_{-\infty}^{\infty}$, для каждой из которых

1) существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что

$$-nh \le t_{-n} < t_{-n+1} < \ldots < t_{n-1} < nh;$$

2) $t_{j+2n} = 2nh + t_j$ при всех $j \in \mathbb{Z}$.

Рассмотрим задачу (23) для $E = \mathbb{R}$, $\mathcal{T} = \widetilde{\Theta}$ и $W = BH_\infty(D_H)$.

Теорема 9. *Для всех* $h > 0$

$$e(\mathbb{R}, \widetilde{\Theta}_h, BH_\infty(D_H)) = (\kappa(\exp(-4\pi H/h)))^{1/2},$$

при этом система $\{jh\}_{-\infty}^{\infty}$ *является оптимальной.*

Доказательство. Пусть $\tau \in \widetilde{\Theta}_h$ и имеет период $2nh$. Тогда

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} e(t, I_\tau, BH_\infty(D_H)) \ge \sup_{t\in[0,2\pi)} e(t, I_{\tau_1}, B\widetilde{H}_\infty(D_{H_1})),$$

где $\tau_1 = \left\{j\dfrac{\pi}{n}\right\}_{j=0}^{2n-1}$, $H_1 = \dfrac{\pi H}{nh}$. Отсюда, учитывая теорему 7, получаем

$$\begin{aligned} e(\mathbb{R}, \widetilde{\Theta}_h, BH_\infty(D_H)) \ge e_{2n}(B\widetilde{H}_\infty(D_{H_1})) &= (\kappa(\exp(-4H_1 n)))^{1/2} \\ &= (\kappa(\exp(-4\pi H/h)))^{1/2}. \end{aligned}$$

С другой стороны, из следствия 1 для $\tau = \{jh\}_{-\infty}^{\infty}$ имеем

$$\begin{aligned} e(\mathbb{R}, \widetilde{\Theta}_h, BH_\infty(D_H)) &\le \sup_{t\in\mathbb{R}} e(t, I_\tau, BH_\infty(D_H)) \\ &= (\kappa(\exp(-4\pi H/h)))^{1/2}. \end{aligned}$$

Теорема доказана. □

Задача (22) для $\mathcal{T} = \widetilde{\Theta}_h$ была поставлена Сунь Юн-Шеном [1]. Им же [19] доказана оптимальность равномерной сетки для классов функций, представимых сверткой с ядрами, не повышающими осцилляции. В частности, в [19] доказано равенство

$$e(\mathbb{R}, \widetilde{\Theta}_h, Bh_\infty(D_H)) = \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch}\left[(2m+1)\dfrac{\pi H}{h}\right]},$$

где $h_\infty(D_H)$ — пространство ограниченных гармонических в D функций, и найден оптимальный метод восстановления для оптимальной системы $\{jh\}_{-\infty}^{\infty}$.

Этот метод (в более простом виде) может быть получен, если с помощью леммы 1 перенести схему построения оптимальных методов восстановления на классах гармонических функций, использующих значения в конечном числе узлов (см. [8]), на случай бесконечных систем. Тогда (во многом аналогично предыдущему) можно доказать, что при всех $t \in \mathbb{R}$ и $h > 0$ метод

$$x(t) \approx \frac{\pi}{K'} \cdot \frac{\operatorname{sn}\left(\dfrac{K'}{2H}t\right)}{1 + k \operatorname{sn}^2\left(\dfrac{K'}{2H}t\right)} \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j \frac{x(jh)}{\operatorname{sh}\left[\dfrac{\pi}{2H}(t - jh)\right]},$$

в котором $k = \kappa(\exp(-4\pi H/h))$, является оптимальным методом восстановления на классе $Bh_\infty(D_H)$.

§5. Оптимальное восстановление производных

Пусть I_E — оператор, сопоставляющий функции $x \in BH_\infty(\Omega)$ ее след на множестве $E \subset \Omega$. Положим для $t \in \Omega$

$$e^{(k)}(t, E, \Omega, \delta) := e(L, I_E, BH_\infty(\Omega), \delta),$$

где $Lx = x^{(k)}(t)$, $k \in \mathbb{N}$, а $Y = C(E)$. Тем самым рассматривается задача об оптимальном восстановлении производной порядка k функции x из класса $BH_\infty(\Omega)$ по функции $\widetilde{x} \in C(E)$, удовлетворяющей условию

$$\sup_{t \in E} |\widetilde{x}(t) - x(t)| \leq \delta.$$

Будем считать, что $0 < \delta < 1$ (при $\delta \geq 1$ задача тривиальна). Случай $k = 1$ был рассмотрен в работе [2]. Здесь мы рассматриваем восстановление второй производной на классе $BH_\infty(D_H)$ для $E = \mathbb{R}$. Оказывается, что в отличие от случая $k = 1$ при $k = 2$ наблюдается эффект "переключения", заключающийся в существовании такого $\delta_0 \in (0, 1)$, что при $0 < \delta \leq \delta_0$ и $\delta_0 < \delta < 1$ экстремальные функции и методы восстановления качественно отличаются.

Положим

$$C(\delta) := \frac{8}{3}\left[\frac{1 - 5\delta^4}{2}\left(\frac{K'}{\pi}\right)^2 - 1\right].$$

Через K и K' в дальнейшем обозначаются полные эллиптические интегралы первого рода для модулей δ^2 и $\sqrt{1-\delta^4}$ соответственно, а все встречающиеся эллиптические функции, если не указана их зависимость от модуля, имеют модуль δ^2. Из монотонного убывания K' при $\delta \in (0,1)$ следует, что уравнение $C(\delta)=0$ имеет единственное решение $\delta_0 \in (0,1)$ (вычисления показывают, что $\delta_0 = 0,2145\ldots$), причем $C(\delta) > 0$ при $\delta \in (0,\delta_0)$ и $C(\delta) < 0$ при $\delta \in (\delta_0, 1)$.

Рассмотрим функцию

$$F(x) := \frac{4}{\operatorname{sh}^2\left(\frac{\pi}{K'}x\right)}\left[1 - \frac{K'}{2\pi}\operatorname{sh}\left(\frac{2\pi}{K'}x\right)\frac{\operatorname{cn} x(1+\delta^4\operatorname{sn}^2 x)}{\operatorname{sn} x \operatorname{dn} x}\right].$$

Пользуясь разложениями

$$\begin{aligned}\operatorname{sh} x &= x + \frac{x^3}{6} + O(x^5), \quad \operatorname{sn} x = x - \frac{1+\delta^4}{6}x^3 + O(x^5),\\ \operatorname{cn} x &= 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4), \quad \operatorname{dn} x = 1 - \delta^4\frac{x^2}{2} + O(x^4),\end{aligned}$$

получаем

$$F(x) = C(\delta) + O(x^2).$$

Таким образом, при $\delta \in (\delta_0, 1)$ $F(0) < 0$. Поскольку $F(K) = 4\operatorname{sh}^{-2}\left(\frac{\pi K}{K'}\right) > 0$, то при любом $\delta \in (\delta_0,1)$ существует $\gamma \in (0,K)$, для которого $F(\gamma)=0$.

Положим

$$B_1(z,\delta^2) := \prod_{j=1}^{\infty}\frac{z+\alpha_j^2}{1+\alpha_j^2 z},$$

где α_j определены равенством (30).

Теорема 10. *Для всех $t \in \mathbb{R}$ методы*

$$x''(t) \approx -\frac{\pi^2}{16H^2}C(\delta)\widetilde{x}(t) + \frac{\pi^2}{2H^2}\sum{}'\frac{(-1)^{j+1}}{\operatorname{sh}^2\left(2j\frac{\pi K}{K'}\right)}\widetilde{x}\left(t + j\frac{4HK}{K'}\right)$$

при $0 < \delta \le \delta_0$ *и*

$$x''(t) \approx \frac{\pi^3}{4H^2K'}\frac{\operatorname{ch}^3\left(\gamma\frac{\pi}{K'}\right)\operatorname{sn}\gamma}{\operatorname{th}\left(\gamma\frac{\pi}{2K'}\right)\operatorname{dn}^2\gamma}$$
$$\times\sum{}'\frac{(-1)^{j+1}\operatorname{sh}^2\left(2j\frac{\pi K}{K'}\right)}{\operatorname{sh}^2\left((2jK-\gamma)\frac{\pi}{K'}\right)\operatorname{sh}^2\left((2jK+\gamma)\frac{\pi}{K'}\right)}\widetilde{x}(t+t_j)$$

при $\delta_0 < \delta < 1$, *где*

$$t_j := \frac{4H}{\pi} \operatorname{arth} \left[\operatorname{th} \left((2jK - \gamma) \frac{\pi}{K'} \right) \operatorname{th} \left((2jK + \gamma) \frac{\pi}{K'} \right) \right]^{1/2} \operatorname{sign} j,$$

а $\sum'$ *— сумма по всем* $j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, *являются оптимальными методами восстановления на классе* $BH_\infty(D_H)$ *по значениям на* $\mathbb{R}$, *заданным с погрешностью* δ. *Функция* $-B_1\left(-\dfrac{\xi^2 + a^2}{1 + a^2\xi^2}, \delta^2\right)$, *где* $\xi := \operatorname{th}\left(\dfrac{\pi}{4H}(z - t)\right)$,

$$a := \begin{cases} 0, & 0 < \delta \le \delta_0, \\ \operatorname{th}\left(\gamma \dfrac{\pi}{2K'}\right), & \delta_0 < \delta < 1, \end{cases}$$

является экстремальной и

$$e''(t, \mathbb{R}, D_H, \delta) = \begin{cases} \dfrac{K'^2}{4H^2} \delta(1 - \delta^4), & 0 < \delta \le \delta_0, \\ \dfrac{\pi K'}{4H^2} \cdot \dfrac{\delta(1 - \delta^4) \operatorname{sn} \gamma}{\operatorname{th}\left(\gamma \dfrac{\pi}{K'}\right) \operatorname{dn} \gamma}, & \delta_0 < \delta < 1. \end{cases}$$

Доказательство. В силу инвариантности относительно сдвига достаточно доказать утверждение теоремы для $t = 0$. С помощью конформного отображения (31) рассматриваемая задача восстановления может быть сведена к задаче восстановления значения $\dfrac{\pi^2}{16H^2} f''(0)$ на классе BH_∞ по значениям на множестве $(-1, 1)$, заданным с погрешностью δ. Для $f \in H_\infty$ положим

$$Jf := \frac{\alpha}{2\pi i} \int_{|z|=1} \Psi(z) f(z) \frac{dz}{z^3}, \tag{32}$$

где

$$\alpha := \begin{cases} \delta \dfrac{4K'}{\pi}, & 0 < \delta \le \delta_0, \\ \delta \dfrac{4 \operatorname{sn} \gamma}{\operatorname{sh}\left(\gamma \dfrac{\pi}{K'}\right) \operatorname{dn}^2 \gamma}, & \delta_0 < \delta < 1, \end{cases}$$

$$\Psi(z) := (1 - z^2)^2 h_0 \left(-\frac{z^2 + a^2}{1 + a^2 z^2}, \delta^2 \right) B_2^{-1} \left(-\frac{z^2 + a^2}{1 + a^2 z^2}, \delta^2 \right),$$

$$h_0(z, \delta^2) := \prod_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1 + \alpha_j^2 z}{1 + a_j^2 z} \right)^2, \quad B_2(z, \delta^2) := \prod_{j=1}^{\infty} \frac{z + a_j^2}{1 + a_j^2 z},$$

а a_j определены равенством (29). Пользуясь разложением в произведения эллиптических функций, можно показать, что имеют место представления

(33)

$$
\begin{aligned}
B_1(z,\delta^2) =&\delta \operatorname{sn}\left(\frac{2K'}{\pi}\upsilon + K\right), \quad B_2(z,\delta^2) = \delta \operatorname{cth}\upsilon \operatorname{sn}\left(\frac{2K'}{\pi}\upsilon\right),\\
h_0(z,\delta^2) =& \operatorname{ch}^2\upsilon \operatorname{dn}^2\left(\frac{2K'}{\pi}\upsilon\right), \quad z = -\operatorname{th}^2\upsilon.
\end{aligned}
$$

Применяя к интегралу (32) лемму 1, будем иметь

$$
Jf = \frac{\alpha}{2}(\Psi(0)f''(0) + 2\Psi'(0)f'(0)) - S(\delta)f,
$$

где

$$
S(\delta)f := -\frac{\alpha}{2}\Psi''(0)f(0) + \frac{\alpha}{2}{\sum}' \frac{(1-x_j^2)^2(1+a^2x_j^2)^2 h_0(-a_j^2,\delta^2)}{x_j^4(1-a^4)B_2'(-a_j^2,\delta^2)} f(x_j),
$$
$$
x_j := \left(\frac{a_j^2 - a^2}{1 - a^2a_j^2}\right)^{1/2} \operatorname{sign} j.
$$

Легко убедиться, что при $\delta_0 < \delta < 1$ $\ x_j = \operatorname{th}\left(\dfrac{\pi}{4H}t_j\right)$, а при $0 < \delta \le \delta_0$ $\ x_j = a_j$.

Из представлений (33) имеем

$$
\begin{gathered}
h_0(-a_j^2,\delta^2) = \frac{1}{1-a_j^2}, \quad B_2'(-a_j^2,\delta^2) = (-1)^{j+1}\delta\frac{K'}{\pi}\frac{1}{a_j^2(1-a_j^2)},\\
\Psi(z) = \frac{(1-z^2)(1+a^2z^2)\operatorname{dn}^2\left(\dfrac{2K'}{\pi}\upsilon\right)\operatorname{th}\upsilon}{\delta(1-a^2)\operatorname{sn}\left(\dfrac{2K'}{\pi}\upsilon\right)}, \quad \frac{z^2+a^2}{1+a^2z^2} = \operatorname{th}^2\upsilon.
\end{gathered}
$$

Отсюда $\Psi(0) = 2\alpha^{-1}$, $\Psi'(0) = 0$, $\dfrac{\alpha}{2}\Psi''(0) = C(\delta)$ при $0 < \delta \le \delta_0$ и $\dfrac{\alpha}{2}\Psi''(0) = F(\gamma) = 0$ при $\delta_0 < \delta < 1$. Тем самым имеет место равенство

$$
Jf = f''(0) - S(\delta)f.
$$

После преобразований для $S(\delta)f$ получаем следующие равенства:

$$
S(\delta)f = -C(\delta)f(0) + 8{\sum}' \frac{(-1)^{j+1}}{\operatorname{sh}^2\left(2j\dfrac{\pi K}{K'}\right)} f(a_j),
$$

если $0 < \delta \le \delta_0$ и

$$S(\delta)f = \frac{4\pi}{K'}\frac{\operatorname{ch}^3\left(\gamma\dfrac{\pi}{K'}\right)\operatorname{sn}\gamma}{\operatorname{th}\left(\gamma\dfrac{\pi}{2K'}\right)\operatorname{dn}^2\gamma} \times {\sum}' \frac{(-1)^{j+1}\operatorname{sh}^2\left(2j\dfrac{\pi K}{K'}\right)}{\operatorname{sh}^2\left((2jK-\gamma)\dfrac{\pi}{K'}\right)\operatorname{sh}^2\left((2jK+\gamma)\dfrac{\pi}{K'}\right)}f(x_j),$$

если $\delta_0 < \delta < 1$.

Интеграл (32) может быть записан в виде

$$Jf = \frac{\alpha}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\overline{g(e^{i\theta})}\varphi(e^{i\theta})f(e^{i\theta})\,d\theta,$$

где

$$g(z) := -B_1\left(-\frac{z^2+a^2}{1+a^2z^2},\delta^2\right), \quad \varphi(z) := \frac{\Psi(z)g(z)}{z^2}.$$

Докажем, что $\varphi(e^{i\theta}) \in L_1[0,2\pi]$ и почти всюду $\varphi(e^{i\theta}) > 0$. В силу легко проверяемого равенства

$$\varphi(z) = \frac{(z^2+a^2)(1+a^2z^2)}{(1-a^2)^2z^2}\varphi_0\left(-\frac{z^2+a^2}{1+a^2z^2}\right),$$

в котором

$$\varphi_0(z) := \frac{(1+z)^2}{z}\cdot\frac{B_1(z,\delta^2)h_0(z,\delta^2)}{B_2(z,\delta^2)},$$

достаточно доказать, что этим свойством обладает φ_0. Из (33), используя преобразование Гаусса (см. [12, с. 283]), находим

$$\varphi_0(z) = -\frac{2}{\operatorname{sh}2\upsilon}\frac{\operatorname{cn}\left(\dfrac{2K'}{\pi}\upsilon\right)\operatorname{dn}\left(\dfrac{2K'}{\pi}\upsilon\right)}{\operatorname{sn}\left(\dfrac{2K'}{\pi}\upsilon\right)}$$

$$= -\frac{2(1+\delta^2)}{\operatorname{sh}2\upsilon}\frac{\operatorname{cn}\left(\dfrac{4\Lambda'}{\pi}\upsilon,\lambda\right)}{\operatorname{sn}\left(\dfrac{4\Lambda'}{\pi}\upsilon,\lambda\right)} = -i\frac{2(1+\delta^2)}{\operatorname{sh}2\upsilon}\operatorname{dn}\left(\frac{4\Lambda'}{\pi}\upsilon+i\Lambda',\lambda\right),$$

где $\lambda = 2\delta/(1+\delta^2)$. Пусть $z = e^{i\theta}$, $\theta \in (-\pi,\pi)$. Тогда υ можно выбрать из условия $\operatorname{th}\upsilon = e^{i(\theta+\pi)/2}$. Отсюда $\upsilon = x + i\pi/4$, где $x = \dfrac{1}{2}\log\left|\operatorname{ctg}\dfrac{\theta+\pi}{4}\right|$. Следовательно,

$$\varphi_0(e^{i\theta}) = \frac{2(1+\delta^2)}{\operatorname{ch}2x}\operatorname{dn}\left(\frac{4\Lambda'}{\pi}x,\lambda\right).$$

Из последнего равенства видно, что при $\theta \in (-\pi, \pi)$

$$0 < \varphi_0(e^{i\theta}) \le 2(1+\delta^2).$$

Чтобы воспользоваться теоремой 1, остается проверить равенство $S(\delta)g = \delta\|S(\delta)\|$, которое следует из того, что

$$B_1(-a_j^2, \delta^2) = (-1)^j \delta.$$

В силу той же теоремы

$$e''(0, (-1,1), D, \delta) = g''(0).$$

Выражение для $g''(0)$ легко найти, пользуясь представлениями (33).

Переходя от класса BH_∞ к классу $BH_\infty(D_H)$, получим, что оптимальный метод восстановления имеет вид

$$x''(0) \approx \frac{\pi^2}{16H^2} S(\delta)\widetilde{f},$$

где $\widetilde{f}(z) = \widetilde{x}\left(\dfrac{4H}{\pi}\operatorname{arth} z\right)$, и

$$e''(0, \mathbb{R}, D_H, \delta) = \frac{\pi^2}{16H^2} e''(0, (-1,1), D, \delta).$$

Теорема доказана. $\square$

Отметим, что вследствие равенства (3) нами найдено решение экстремальной задачи

$$\sup_{\substack{\|x\|_{H_\infty(D_H)} \le 1 \\ \|x\|_{C(\mathbb{R})} \le \delta}} \|x''\|_{C(\mathbb{R})} = e''(0, \mathbb{R}, D_H, \delta),$$

которую можно рассматривать как колмогоровскую задачу о неравенстве для производных на классе $BH_\infty(D_H)$.

Список литературы

[1] *Sun Yongsheng.* On optimal interpolation for differentiable function class (1) // Approxim. Theory and Appl. 1986. V. 2, № 4. P. 49–54.

[2] *Осипенко К.Ю., Стесин М.И.* Оптимальное восстановление производных ограниченных аналитических и гармонических функций по неточным данным // Матем. заметки. 1993. Т. 53, № 5. С. 87–97.

[3] *Субботин Ю.Н.* Экстремальные задачи теории приближения функций при неполной информации // Тр. Матем. ин-та АН СССР. 1980. Т. 145. С. 152–168.

[4] *Pinkus A.* n-widths in approximation theory. Berlin: Springer, 1985.

[5] *Тихомиров В.М.* Теория приближений // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 14. Итоги науки и техн. М.: ВИНИТИ АН СССР, 1987. С. 103–260.

[6] *Магарил-Ильяев Г.Г., Осипенко К.Ю.* Об оптимальном восстановлении функционалов по неточным данным // Матем. заметки. 1991. Т. 50, № 6. С. 85–93.

[7] *Осипенко К.Ю., Стесин М.И.* О задачах восстановления в пространствах Харди и Бергмана // Матем. заметки. 1991. Т. 49, № 4. С. 95–104.

[8] *Осипенко К.Ю.* Наилучшие и оптимальные методы восстановления на классах гармонических функций // Матем. сб. 1991. Т. 182, № 5. С. 723–745.

[9] *Осипенко К.Ю., Стесин М.И.* О некоторых задачах оптимального восстановления аналитических и гармонических функций по неточным данным // Сиб. матем. журн. 1993. Т. 34, № 3. С. 144–160.

[10] *Wilderotter K.* Optimale Algorithmen zur Approximation analytischer Functionen. Dissertation. Bonn. 1990.

[11] *Fisher S.D., Micchelli C.A.* The n-width of sets of analytic functions // Duke Math. J. 1980. V. 47, № 4. P. 789–801.

[12] *Ахиезер Н.И.* Элементы теории эллиптических функций. М.: Наука, 1970.

[13] *Pinkus A.* On n-widths of periodic functions // J. Analyse Math. 1979. V. 35. P. 209–235.

[14] *Forst W.* Über die Brite von Klassen holomorpher periodisher Funktionen // J. Approx. Theory. 1977. V. 19. P. 325–331.

[15] *Овчинцев М.П.* Наилучший метод приближения регулярных ограниченных функций в кольце по их значениям в заданных точках // Изв. ВУЗов. Математика. 1989. № 5. С. 32–39.

[16] *Гарнетт Дж.* Ограниченные аналитические функции. М.: Мир, 1984.

[17] *Duren P.L.* Theory of H^p spaces. N.Y.: Acad. Press, 1970.

[18] *Голузин Г.М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966.

[19] *Sun Yongsheng.* Optimal interpolation on a convolution class of functions // Chinese Sci Bull. 1989. V. 34, № 14. P. 1148-1152.

Поступило в редакцию
23.II.1993