Федеральное агентство по образованию
**Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
"МАТИ" - Российский государственный
технологический университет
им. К.Э.Циолковского**

Кафедра "Высшая математика"

К. Ю. Осипенко

Сферические гармоники, собственные функции оператора Лапласа и задачи восстановления

Москва 2006 г.

1. Однородные многочлены

Однородным многочленом степени k в пространстве $\mathbb{R}^d$ называется многочлен вида

$$P(x) = \sum_{|\alpha|=k} c_\alpha x^\alpha,$$

где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ — мультииндекс, $\alpha_j \in \mathbb{Z}_+$, $j = 1, \ldots, d$, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_d$, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots x_d^{\alpha_d}$, $c_\alpha \in \mathbb{R}$. Обозначим через $\mathcal{P}_k$ множество всех однородных многочленов степени k. Очевидно, что $\mathcal{P}_k$ — линейное пространство.

Положим

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_d^{\alpha_d}}.$$

Если $P \in \mathcal{P}_k$, то

$$P(D) = \sum_{|\alpha|=k} c_\alpha D^\alpha$$

— дифференциальный оператор. В частности, если

$$P(x) = |x|^2 = |x_1|^2 + \ldots + |x_d|^2,$$

то $P(D) = \Delta$ — оператор Лапласа.

Введем в пространстве $\mathcal{P}_k$ скалярное произведение, положив

$$\langle P, Q \rangle = P(D)Q, \quad P, Q \in \mathcal{P}_k.$$

Проверим, что введенная операция действительно является скалярным произведением. Прежде всего заметим, что

$$D^\alpha x^\beta = \begin{cases} 0, & \alpha \neq \beta, \\ \alpha! = \alpha_1! \ldots \alpha_d!, & \alpha = \beta. \end{cases}$$

Тем самым $\langle P, Q \rangle$ принимает скалярные значения. Линейность функции $\langle P, Q \rangle$ очевидна, а из равенства

$$D^\alpha x^\beta = D^\beta x^\alpha$$

вытекает коммутативность. Поскольку

$$\langle P, P \rangle = \sum_{|\alpha|=k} |c_\alpha|^2 \alpha!,$$

то $\langle P, P \rangle = 0$ в том и только в том случае, если $P = 0$.

В пространстве $\mathcal{P}_k$ одночлены x^α, $|\alpha| = k$, образуют ортогональную систему и, следовательно, являются ортогональным базисом этого пространства. Число таких одночленов d_k равно числу различных мультииндексов $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ таких, что $\alpha_1 + \ldots + \alpha_d = k$. Для нахождения этого числа рассмотрим $d+k-1$ урну, выберем наудачу $d-1$ урну, а в остальные положим по одному шару. Нетрудно

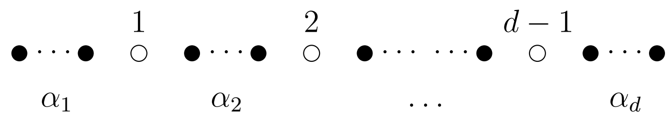

Рис. 1

убедиться. что число d_k равно числу способов выбора $d-1$ урны из $k+d-1$ урн, т.е.

$$d_k = C_{d+k-1}^{d-1} = \frac{(d+k-1)!}{(d-1)!k!}.$$

2. Однородные гармонические многочлены

Однородными гармоническими многочленами степени k называются такие многочлены $P \in \mathcal{P}_k$, что $\Delta P = 0$. Множество однородных гармонических многочленов степени k обозначим через $\mathcal{A}_k$. Ясно, что $\mathcal{A}_k \subset \mathcal{P}_k$.

Теорема 1. *Всякий многочлен* $P \in \mathcal{P}_k$ *представим в виде*

(1) $$P(x) = P_0(x) + |x|^2 P_1(x) + \ldots + |x|^{2l} P_l(x),$$

где $P_j \in \mathcal{A}_{k-2j}$, $j = 0, \ldots, l$.

Доказательство. Будем считать, что $k \geq 2$ (при $k = 0, 1$ $\mathcal{P}_k = \mathcal{A}_k$). Рассмотрим линейное подпространство

$$|x|^2 \mathcal{P}_{k-2} = \{\, P \in \mathcal{P}_k : P(x) = |x|^2 Q(x),\ Q \in \mathcal{P}_{k-2} \,\}.$$

Докажем, что его ортогональным дополнением является $\mathcal{A}_k$. Пусть $P_1 \in \mathcal{P}_k$ и для всех $Q \in \mathcal{P}_{k-2}$

(2) $$\langle R, P_1 \rangle = 0,$$

где $R(x) = |x|^2 Q(x)$. Но

(3) $$\langle R, P_1 \rangle = \Delta Q(D) P_1 = Q(D) \Delta P_1 = \langle Q, \Delta P_1 \rangle.$$

Выберем $Q \in \mathcal{P}_{k-2}$ так, чтобы $Q = \Delta P_1$. Из (3) вытекает, что

$$\langle \Delta P_1, \Delta P_1 \rangle = 0.$$

Следовательно, $\Delta P_1 = 0$ и $P_1 \in \mathcal{A}_k$. Из (3) вытекает также, что верно и обратное, т.е. если $\Delta P_1 = 0$, то для всех $Q \in \mathcal{P}_{k-2}$ выполняется равенство (2). Итак, доказано, что

(4) $$\mathcal{P}_k = \mathcal{A}_k \oplus |x|^k \mathcal{P}_{k-2}.$$

Пусть $P \in \mathcal{P}_k$. Тогда найдутся такие однородные многочлены $P_0 \in \mathcal{A}_k$ и $Q_1 \in \mathcal{P}_{k-2}$, что

$$P(x) = P_0(x) + |x|^2 Q_1(x).$$

Если $k \geq 4$, то можно в аналогичном виде представить Q_1

$$Q_1(x) = P_1(x) + |x|^2 Q_2(x), \quad P_1 \in \mathcal{A}_{k-2}, \quad Q_1 \in \mathcal{P}_{k-4}.$$

Тем самым
$$P(x) = P_0(x) + |x|^2 P_1(x) + |x|^4 Q_1(x).$$
Продолжая этот процесс, приходим к представлению (1). $\square$

Следствие 1. *При всех* $k \geq 2$

$$a_k = \dim \mathcal{A}_k = d_k - d_{k-2} = (d+2k-2)\frac{(d+k-3)!}{(d-2)!k!}. \tag{5}$$

Доказательство. Из (4) имеем
$$d_k = \dim \mathcal{P}_k = \dim \mathcal{A}_k + \dim |x|^k \mathcal{P}_{k-2} = \dim \mathcal{A}_k + d_{k-2}.$$
Отсюда следует (5). $\square$

В силу того, что $\mathcal{A}_k = \mathcal{P}_k$ при $k = 0, 1$, имеем
$$a_0 = \dim \mathcal{A}_0 = 1, \quad a_1 = \dim \mathcal{A}_1 = d.$$

3. Сферические гармоники

Множество многочленов из $\mathcal{A}_k$, суженное на сферу
$$\mathbb{S}^{d-1} = \{\, x \in \mathbb{R}^d : |x| = 1 \,\}$$
называется *сферическими гармониками порядка* k и обозначается через $\mathcal{H}_k$. Рассмотрим сужение Y многочлена $P \in \mathcal{A}_k$ (при $x' \in \mathbb{S}^{d-1}$ $Y(x') = P(x')$). В силу однородности $P(x) = |x|^k Y(x/|x|)$ при $x \neq 0$. Тем самым рассматриваемое сужение является изоморфизмом. Поэтому
$$\dim \mathcal{H}_k = \dim \mathcal{A}_k = a_k.$$

Теорема 2. *Множество всех конечных линейных комбинаций из* $\cup_{k=0}^{\infty} \mathcal{H}_k$ *плотно в* $L_2(\mathbb{S}^{d-1})$.

Доказательство. Так как пространство непрерывных функций плотно в $L_2(\mathbb{S}^{d-1})$, достаточно доказать, что любая непрерывная функция может быть приближена конечными линейными комбинациями из $\cup_{k=0}^{\infty} \mathcal{H}_k$. По теореме Вейерштрасса любая непрерывная функция может быть приближена в норме $L_\infty(\mathbb{S}^{d-1})$ (а значит, и в норме $L_2(\mathbb{S}^{d-1})$) многочленами, суженными на $\mathbb{S}^{d-1}$. В силу теоремы 1 эти сужения являются конечными линейными комбинациями элементов из $\cup_{k=0}^{\infty} \mathcal{H}_k$. $\square$

Теорема 3. *Пусть* $Y^{(k)} \in \mathcal{H}_k$ *и* $Y^{(l)} \in \mathcal{H}_l$. *Тогда*
$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} Y^{(k)}(x') Y^{(l)}(x') dx' = 0.$$

Доказательство. Положим при $x \neq 0$
$$u(x) = |x|^k Y^{(k)}\left(\frac{x}{|x|}\right), \quad v(x) = |x|^l Y^{(l)}\left(\frac{x}{|x|}\right).$$

Если $x = 0$ и $k \neq 0$, положим $u(0) = 0$. При $k = 0$ $Y^{(k)} \equiv C$, поэтому в этом случае полагаем $u(0) = C$. Аналогично доопределяется значение v в нуле. Вектор $n = (x_1, \dots, x_d)$ при $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{S}^{d-1}$ является единичным вектором внешней нормали к $\mathbb{S}^{d-1}$ в точке x. При всех $x \in \mathbb{S}^{d-1}$

$$(\operatorname{grad} u(x), n) = \sum_{j=1}^{d} x_j \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} = k u(x) \tag{6}$$

(здесь $(\cdot, \cdot)$ — стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^d$). Аналогично получаем, что для всех $x \in \mathbb{S}^{d-1}$

$$(\operatorname{grad} v(x), n) = l v(x).$$

Пользуясь формулой Гаусса

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} (F(x'), n)\, dx' = \int_{\mathbb{B}^d} \operatorname{div} F(x)\, dx,$$

где

$$\mathbb{B}^d = \{\, x \in \mathbb{R}^d : |x| < 1 \,\},$$

получаем

$$\begin{aligned}
(k - l) &\int_{\mathbb{S}^{d-1}} u(x')v(x')\, dx' \\
&= \int_{\mathbb{S}^{d-1}} (v(x') \operatorname{grad} u(x') - u(x') \operatorname{grad} v(x'), n)\, dx' \\
&= \int_{\mathbb{B}^d} \operatorname{div}((v(x') \operatorname{grad} u(x') - u(x') \operatorname{grad} v(x'))\, dx \\
&= \int_{\mathbb{B}^d} \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(v(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} - u(x) \frac{\partial v(x)}{\partial x_j} \right) dx \\
&= \int_{\mathbb{B}^d} (v(x)\Delta u(x) - u(x)\Delta v(x))\, dx = 0.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} Y^{(k)}(x')Y^{(l)}(x')dx' = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} u(x')v(x')\, dx' = 0.$$

□

Будем рассматривать $\mathcal{H}_k$ как подпространство $L_2(\mathbb{S}^{d-1})$ со скалярным произведением

$$(f, g)_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} f(x')g(x')\, dx'.$$

Пусть $Y_1^{(k)}, \dots, Y_{a_k}^{(k)}$ — ортонормированный базис в $\mathcal{H}_k$. Тогда из теоремы 2 вытекает, что система однородных сферических гармоник $Y_j^{(k)}$, $k = 0, 1, \dots$, $j = 1, \dots, a_k$, является ортонормированным базисом в $L_2(\mathbb{S}^{d-1})$. Тем самым для любой функции $f \in L_2(\mathbb{S}^{d-1})$ имеет место равенство

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)},$$

где

$$c_{kj} = (f, Y_j^{(k)})_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} f(x') Y_j^{(k)}(x')\, dx'.$$

4. Зональные гармоники

Пусть $Y_1^{(k)}, \ldots, Y_{a_k}^{(k)}$ — ортонормированный базис в $\mathcal{H}_k$. Зафиксируем $x' \in \mathbb{S}^{d-1}$. Сферическая гармоника

$$Z_{x'}^{(k)}(t') = \sum_{j=1}^{a_k} Y_j^{(k)}(x') Y_j^{(k)}(t')$$

называется *зональной гармоникой степени k с полюсом в точке x'*.

Лемма 1. *Для любых $Y \in \mathcal{H}_k$*

$$Y(x') = (Y, Z_{x'}^{(k)})_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}.$$

Доказательство. Имеем

$$(Y, Z_{x'}^{(k)})_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} = \sum_{j=1}^{a_k} Y_j^{(k)}(x') (Y, Y_j^{(k)})_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} = Y(x').$$

$\square$

Вращением называется линейное преобразование $\rho\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ такое, что

(1) для всех $x, y \in \mathbb{R}^d$ $\;(\rho x, \rho y) = (x, y)$;
(2) $\det \rho = 1$.

Лемма 2. *Если ρ — вращение, то*

$$Z_{\rho x'}^{(k)}(\rho t') = Z_{x'}^{(k)}(t').$$

Доказательство. Сделав замену переменных $w' = \rho t'$, для всех $Y \in \mathcal{H}_k$ будем иметь

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} Z_{\rho x'}^{(k)}(\rho t') Y(t')\, dt' = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} Z_{\rho x'}^{(k)}(w') Y(\rho^{-1} w')\, dw'$$
$$= Y(\rho^{-1}(\rho x')) = Y(x') = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} Z_{x'}^{(k)}(t') Y(t')\, dt'.$$

Отсюда следует, что функции $Z_{\rho x'}^{(k)}(\rho t')$ и $Z_{x'}^{(k)}(t')$ совпадают. $\square$

Лемма 3. *Для всех* $x' \in \mathbb{S}^{d-1}$

$$\sum_{j=1}^{a_k} |Y_j^{(k)}(x')|^2 = \frac{a_k}{\omega_{d-1}},$$

где

$$\omega_{d-1} = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}$$

— площадь сферы $\mathbb{S}^{d-1}$.

Доказательство. Пусть x_1 и x_2 — произвольные точки на $\mathbb{S}^{d-1}$. Существует вращение ρ такое, что $x_2 = \rho x_1$. Тогда из леммы 2

$$Z_{x_2}^{(k)}(x_2) = Z_{\rho x_1}^{(k)}(\rho x_1) = Z_{x_1}^{(k)}(x_1).$$

Следовательно, при всех $x' \in \mathbb{S}^{d-1}$

$$Z_{x'}^{(k)}(x') = c.$$

Из определения зональных гармоник

$$\sum_{j=1}^{a_k} |Y_j^{(k)}(x')|^2 = Z_{x'}^{(k)}(x') = c.$$

В силу ортонормированности системы $Y_1^{(k)}, \dots, Y_{a_k}^{(k)}$ имеем

$$c\omega_{d-1} = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \sum_{j=1}^{a_k} |Y_j^{(k)}(x')|^2 \, dx' = a_k.$$

Отсюда

$$c = \frac{a_k}{\omega_{d-1}}.$$

□

5. Задача Дирихле

Классическая задача Дирихле для единичного шара в $\mathbb{R}^d$ состоит в нахождении функции, непрерывной при $|x| \le 1$ и гармонической при $|x| < 1$, совпадающей на границе с заданной непрерывной функцией $f(x)$. Хорошо известно, что решение этой задачи существует, единственно и дается *интегралом Пуассона*

$$u(x) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} p(s,x) f(s) \, ds,$$

где

$$p(s,x) = \frac{1}{\omega_{d-1}} \frac{1 - |x|^2}{|x - s|^d}$$

— ядро Пуассона для единичного шара.

Пусть $f \in L_2(\mathbb{S}^{d-1})$. Рассмотрим следующую задачу Дирихле: найти функцию u, гармоническую внутри единичного шара, для которой

$$\lim_{r\to 1-0}\int_{\mathbb{S}^{d-1}} |u(rx') - f(x')|^2\,dx' = 0.$$

Пусть $Y_j^{(k)}$, $k = 0, 1, \ldots$, $j = 1, \ldots, a_k$, — ортонормированный базис в $L_2(\mathbb{S}^{d-1})$. Тогда

$$f(x') = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)}(x')$$

и

$$\|f\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{a_k} |c_{kj}|^2.$$

Докажем, что функция

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} |x|^k \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)}\left(\frac{x}{|x|}\right) \tag{7}$$

(доопределенная в нуле по непрерывности) является решением поставленной задачи.

Из леммы 3 вытекает, что при всех x

$$\left|Y_j^{(k)}\left(\frac{x}{|x|}\right)\right| \le \sqrt{\frac{a_k}{\omega_{d-1}}}.$$

Тем самым при всех x таких, что $|x| \le r$, $0 < r < 1$,

$$|x|^k \left|Y_j^{(k)}\left(\frac{x}{|x|}\right)\right| \le r^k \sqrt{\frac{a_k}{\omega_{d-1}}}.$$

Из того, что ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k a_k \sqrt{\frac{a_k}{\omega_{d-1}}}$$

сходится вытекает равномерная сходимость ряда (7) на множестве $|x| \le r$ при всех $0 < r < 1$. Тем самым $u(x)$ — гармоническая функция при $|x| < 1$.

При всех $0 < r < 1$

$$u(rx') - f(x') = \sum_{k=0}^{\infty}(r^k - 1)\sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)}(x').$$

Поэтому

$$a(r) = \|u(rx') - f(x')\|^2_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} = \sum_{k=0}^{\infty}(r^k - 1)^2 \sum_{j=1}^{a_k} |c_{kj}|^2.$$

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Выберем N так, чтобы

$$\sum_{k=N}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} |c_{kj}|^2 < \varepsilon.$$

Тогда

$$a(r) < \sum_{k=0}^{N} (r^k - 1)^2 \sum_{j=1}^{a_k} |c_{kj}|^2 + \varepsilon.$$

Из того, что

$$\lim_{r \to 1-0} \sum_{k=0}^{N} (r^k - 1)^2 \sum_{j=1}^{a_k} |c_{kj}|^2 = 0,$$

вытекает существование $r_\varepsilon \in (0, 1)$ такого, что для всех $r \in (r_\varepsilon, 1)$

$$\sum_{k=0}^{N} (r^k - 1)^2 \sum_{j=1}^{a_k} |c_{kj}|^2 < \varepsilon.$$

Тем самым $a(r) < 2\varepsilon$. Отсюда следует, что

$$\lim_{r \to 1-0} \|u(rx') - f(x')\|^2_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} = \lim_{r \to 1-0} a(r) = 0.$$

Докажем единственность решения поставленной задачи Дирихле. Для этого достаточно доказать, что гармонической внутри единичного шара функция u при выполнении условия

$$\lim_{r \to 1-0} \|u(rx')\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} = 0 \tag{8}$$

тождественно равна нулю.

Если $|x| = r < 1$, то

$$p(s, x) \le \frac{1}{\omega_{d-1}(1 - r)^{d-1}}.$$

Зафиксируем x_0, $|x_0| = r_0 < 1$. Функция $u(rx)$ при всех $r < 1$ является гармонической в единичном шаре и непрерывной при $|x| \le r$. Поэтому ее можно представить в виде

$$u(rx) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} p(s, x) u(rs)\, ds.$$

Тем самым

$$u(x_0) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} p\left(s, \frac{x_0}{r}\right) u(rs)\, ds.$$

Отсюда

$$|u(x_0)| \le \frac{1}{\omega_{d-1}} \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^{1-d} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} |u(rs)|\, ds.$$

Для r достаточно близких к единице, пользуясь неравенством Коши–Буняковского, получаем

$$|u(x_0)| \le \frac{2}{\sqrt{\omega_{d-1}}(1 - r_0)^{d-1}} \|u(rs\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}.$$

Из условия (8) вытекает, что $u(x_0) = 0$.

6. Собственные функции оператора Лапласа–Бельтрами

Сферический лапласиан или *оператор Лапласа–Бельтрами* Δ_S определяется для функций, заданных на единичной сфере, следующим образом

$$\Delta_S Y(x') = \Delta Y\left(\frac{x}{|x|}\right)\Big|_{x=x'}.$$

Предложение 1. *Пусть $Y^{(k)} \in \mathcal{H}_k$. Тогда*

$$\Delta_S Y^{(k)} = -\Lambda_k Y^{(k)},$$

где

$$\Lambda_k = k(k+d-2).$$

Доказательство. Имеем

$$\Delta_S Y^{(k)} = \Delta(|x|^{-k} Y^{(k)}(x)) = Y^{(k)}\Delta(|x|^{-k}) + |x|^{-k}\Delta Y^{(k)}$$
$$+ 2\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_j}|x|^{-k}\frac{\partial}{\partial x_j}Y^{(k)} = Y^{(k)}\Delta(|x|^{-k}) - \frac{2k}{|x|^{k+2}}\sum_{j=1}^{d} x_j \frac{\partial}{\partial x_j}Y^{(k)}$$
$$= (\Delta(|x|^{-k}) - 2k^2|x|^{-k-2})Y^{(k)}.$$

Остается воспользоваться легко проверяемым равенством

$$\Delta(|x|^{-k}) = (k^2 + 2k - dk)|x|^{-k-2}.$$

□

Пусть $Y_j^{(k)}$, $k = 0, 1, \ldots$, $j = 1, \ldots, a_k$, — ортонормированный базисом в $L_2(\mathbb{S}^{d-1})$. Для $\alpha > 0$ оператор $(-\Delta_S)^{\alpha/2}$ определяется равенством

$$(-\Delta_S)^{\alpha/2} Y = \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k^{\alpha/2} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)},$$

где

$$Y = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)}.$$

Пусть $f \in L_2(\mathbb{S}^{d-1})$. Рассмотрим следующую задачу: найти функцию $u(x', t)$, $x' \in \mathbb{S}^{d-1}$, удовлетворяющую при $t > 0$ уравнению

$$u_t + (-\Delta_S)^{\alpha/2} u = 0, \tag{9}$$

для которой

$$\lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} |u(x', t) - f(x')|^2\, dx' = 0. \tag{10}$$

Отметим, что при $\alpha = 2$ уравнение (9) переходит в уравнение теплопроводности.

Пусть $Y_j^{(k)}$, $k = 0,1,\dots$, $j = 1,\dots,a_k$, — ортонормированный базис в $L_2(\mathbb{S}^{d-1})$ и

$$f(x') = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)}(x').$$

Тогда, используя метод Фурье и рассуждения аналогичные тем, которые приводились для задачи Дирихле, можно показать, что решением поставленной задачи является функция

$$u(x',t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\Lambda_k^{\alpha/2} t} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)}(x').$$

Пусть теперь заданы две функции $f_0, f_1 \in L_2(\mathbb{S}^{d-1})$. Можно рассмотреть задачу о нахождении функции $u(x',t)$, $x' \in \mathbb{S}^{d-1}$, удовлетворяющую при $t > 0$ уравнению

$$u_{tt} + (-\Delta_S)^{\alpha/2} u = 0, \tag{11}$$

для которой

$$u\Big|_{t=0} = f_0,$$
$$u_t\Big|_{t=0} = f_1.$$

Начальные условия здесь также следует понимать в смысле равенства (10). При $\alpha = 2$ уравнение (11) переходит в волновое уравнение. Применение метода Фурье дает решение этой задачи в виде

$$u(x',t) = c_{00}^{(0)} + c_{00}^{(1)} t + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} \left(c_{kj}^{(0)} \cos \Lambda_k^{\alpha/4} t + \frac{c_{kj}^{(1)}}{\Lambda_k^{\alpha/4}} \sin \Lambda_k^{\alpha/4} t \right) Y_j^{(k)}(x'),$$

где

$$f_i(x') = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj}^{(i)} Y_j^{(k)}(x'), \quad i = 0,1.$$

Рассмотрим еще одну задачу. Пусть $f \in L_2(\mathbb{S}^{d-1})$. Требуется найти решение уравнения

$$(-\Delta_S)^{\alpha/2} u = f.$$

Решение этой задачи может быть записано в виде

$$u(x') = \sum_{k=0}^{\infty} \Lambda_k^{-\alpha/2} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)}(x'),$$

где c_{kj} — коэффициенты Фурье функции f.

7. Собственные функции оператора Лапласа в шаре

Пусть $Y \in \mathcal{A}_k$. Будем искать собственные функции оператора Лапласа в виде

$$u(x) = F(r)Y(x), \quad r = |x|.$$

Имеем

$$\Delta u = Y\Delta F + 2\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial F}{\partial x_j}\frac{\partial Y}{\partial x_j}.$$

В силу того, что

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} = F'(r)\frac{x_j}{r},$$

используя однородность Y (см. (6)), получаем

$$\Delta u = Y\Delta F + 2kY\frac{F'(r)}{r}.$$

Из того, что функция u должна быть собственной, т.е. при некотором λ должно иметь место равенство

$$\Delta u = -\lambda u,$$

получаем уравнение на F

$$\Delta F + 2k\frac{F'(r)}{r} + \lambda F(r) = 0. \tag{12}$$

Имеем

$$\Delta F = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(F'(r)\frac{x_j}{r}\right) = \sum_{j=1}^{d}\left(\left(\frac{F'(r)}{r}\right)'\frac{x_j^2}{r} + \frac{F'(r)}{r}\right)$$
$$= \left(\frac{F'(r)}{r}\right)' r + \frac{d}{r}F'(r) = F''(r) + \frac{d-1}{r}F'(r).$$

Тем самым уравнение (12) принимает вид

$$F''(r) + \frac{2k+d-1}{r}F'(r) + \lambda F(r) = 0.$$

Положим

$$F(r) = f(r)r^{-p}, \quad p = k + \frac{d-2}{2}.$$

Тогда для функции f получим уравнение

$$r^2 f''(r) + rf'(r) + (\lambda r^2 - p^2)f(r) = 0.$$

Положив $y(t) = f(t/\sqrt{\lambda})$, для функции y получим уравнение

$$t^2 y''(t) + ty'(t) + (t^2 - p^2)y(t) = 0,$$

которое является уравнением Бесселя p-го порядка. Пусть $J_p(x)$ — функция Бесселя первого рода p-го порядка (являющаяся решением этого уравнения).

Тогда функции

$$\frac{J_p(r)}{r^{d/2-1}} Y(x'), \quad p = k + d/2 - 1, \quad x' = \frac{x}{r},$$

где $\mu_s^{(p)}$ — s-й корень функции Бесселя J_p, при всех $Y \in \mathcal{H}_k$ являются собственными функциями оператора Лапласа, равными нулю на $\mathbb{S}^{d-1}$, отвечающие собственным значениям $-(\mu_s^{(p)})^2$. Выбрав ортонормированный базис в $L_2(\mathbb{S}^{d-1})$ $Y_j^{(k)}$, $k = 0, 1, \ldots$, $j = 1, \ldots, a_k$, получаем ортогональную систему собственных функций

$$Z_{ksj}(x) = \frac{J_p(\mu_s^{(p)} r)}{r^{d/2-1}} Y_j^{(k)}(x'),$$
$$k = 0, 1, \ldots, \ s = 1, 2, \ldots, \ j = 1, \ldots, a_k.$$

Эта система является базисом в $L_2(\mathbb{B}^d)$. Ее можно ортонормировать, положив

$$Y_{ksj}(x) = \frac{1}{\|Z_{ksj}\|_{L_2(\mathbb{B}^d)}} Z_{ksj}(x).$$

Нетрудно убедиться, что

$$\|Z_{ksj}\|^2_{L_2(\mathbb{B}^d)} = \int_0^1 J_p^2(\mu_s^{(p)} r) r \, dr.$$

Пусть $f \in L_2(\mathbb{B}^d)$ и

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} c_{ksj} Y_{ksj}(x).$$

Определим оператор $(-\Delta)^{\alpha/2}$ следующим образом:

$$(-\Delta)^{\alpha/2} f = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} (\mu_s^{(p)})^{\alpha} \sum_{j=1}^{a_k} c_{ksj} Y_{ksj}(x).$$

Рассмотрим ряд задач, аналогичных тем, которые были рассмотрены для сферического лапласиана.

1. Обобщенная задача Пуассона. Пусть $f \in L_2(\mathbb{B}^d)$. Требуется найти функцию $u(x)$, удовлетворяющую уравнению

$$(-\Delta)^{\alpha/2} u = f$$

и граничному условию

$$u\Big|_{x \in \mathbb{S}^{d-1}} = 0.$$

Решение этой задачи дается равенством

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} (\mu_s^{(p)})^{-\alpha} \sum_{j=1}^{a_k} c_{ksj} Y_{ksj}(x),$$

где c_{ksj} — коэффициенты Фурье функции f.

2. Обобщенное уравнение теплопроводности. Пусть $f \in L_2(\mathbb{B}^d)$. Требуется найти функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую уравнению

$$u_t + (-\Delta)^{\alpha/2} u = 0$$

с начальным условием

$$u\Big|_{t=0} = f$$

Решение этой задачи дается равенством

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} e^{-(\mu_s^{(p)})^\alpha} \sum_{j=1}^{a_k} c_{ksj} Y_{ksj}(x),$$

где c_{ksj} — коэффициенты Фурье функции f.

3. Обобщенное волновое уравнение. Пусть $f_0, f_1 \in L_2(\mathbb{B}^d)$. Требуется найти функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую уравнению

$$u_{tt} + (-\Delta)^{\alpha/2} u = 0$$

с начальными условиями

$$u\Big|_{t=0} = f_0,$$
$$u_t\Big|_{t=0} = f_1,$$

и граничным условием

$$u\Big|_{x \in \mathbb{S}^{d-1}} = 0.$$

Решение этой задачи дается равенством

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} \left(c_{ksj}^{(0)} \cos(\mu_s^{(p)})^{\alpha/2} t + \frac{c_{ksj}^{(1)}}{(\mu_s^{(p)})^{\alpha/2}} \sin(\mu_s^{(p)})^{\alpha/2} t \right) Y_{ksj}(x),$$

где $c_{ksj}^{(i)}$ — коэффициенты Фурье функции f_i, $i = 0, 1$.

8. Задачи восстановления на сфере

Соболевским классом $W_2^\alpha(\mathbb{S}^{d-1})$ называется множество функций $f \in L_2(\mathbb{S}^{d-1})$, для которых

$$\|(-\Delta_S)^{\alpha/2} f\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \le 1.$$

1. Восстановить решение уравнения

$$(-\Delta_S)^{\alpha/2} u = f$$

по неточно заданному конечному набору коэффициентов Фурье функции f на классе $W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1})$. Более точно, найти величину

$$E_{Np}^{(1)}(\alpha, W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), \delta) = \inf_{\varphi\colon l_p^N \to L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \sup_{\substack{f \in W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}),\ y \in l_p^N \\ \|I_N f - y\|_{l_p^N} \le \delta}} \|u - \varphi(y)\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}$$

и метод, на котором достигается нижняя грань (здесь $I_N f = \{c_{kj}\}$, $k = 0, 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, a_k$, $N = a_0 + \ldots + a_n$, c_{kj} — коэффициенты Фурье f, $p = 2, \infty$).

2. Восстановить решение задачи

$$u_t + (-\Delta_S)^{\alpha/2} u = 0,$$
$$u\big|_{t=0} = f,$$

в момент времени τ по неточно заданному конечному набору коэффициентов Фурье функции f на классе $W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1})$, т.е. найти величину

$$E_{Np}^{(2)}(\tau, \alpha, W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), \delta) = \inf_{\varphi\colon l_p^N \to L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \sup_{\substack{f \in W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}),\ y \in l_p^N \\ \|I_N f - y\|_{l_p^N} \le \delta}} \|u(\cdot, \tau) - \varphi(y)\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}$$

и соответствующий оптимальный метод восстановления ($p = 2, \infty$).

3. Восстановить решение задачи

$$u_t + (-\Delta_S)^{\alpha/2} u = 0,$$
$$u\big|_{t=0} = f,$$

в момент времени τ по неточно заданным решениям в моменты времени $t = 0$ и $t = T$, т.е. найти величину

$$E_T^{(3)}(\alpha, L_2(\mathbb{S}^{d-1}), \delta_0, \delta_T) = \inf_{\varphi} \sup_{\substack{f, y_0, y_T \in L_2(\mathbb{S}^{d-1}) \\ \|f - y_0\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \le \delta_0 \\ \|u(\cdot, T) - y_T\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \le \delta_T}} \|u(\cdot, \tau) - \varphi(y_0, y_T)\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})},$$

где $\varphi\colon L_2(\mathbb{S}^{d-1}) \times L_2(\mathbb{S}^{d-1}) \to L_2(\mathbb{S}^{d-1})$, и соответствующий оптимальный метод восстановления.

4. Восстановления решения задачи

$$u_{tt} + (-\Delta_S)^{\alpha/2} u = 0,$$
$$u\big|_{t=0} = f_0,$$
$$u_t\big|_{t=0} = f_1,$$

в момент времени τ по неточно заданному конечному набору коэффициентов Фурье функций f_0 и f_1 на классах $W_2^{\beta_1}(\mathbb{S}^{d-1})$, $W_2^{\beta_2}(\mathbb{S}^{d-1})$

соответственно, т.е. найти величину

$$E_{Np}^{(4)}(\tau,\alpha,W_2^{\beta_1}(\mathbb{S}^{d-1}),W_2^{\beta_2}(\mathbb{S}^{d-1}),\delta_0,\delta_1) = \inf_{\varphi\colon l_p^N\times l_p^N\to L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \sup_{\substack{f_i\in W_2^{\beta_i}(\mathbb{S}^{d-1}),\ y_i\in l_p^N,\ i=1,2\\ \|I_Nf_i-y_i\|_{l_p^N}\le\delta_i,\ i=1,2}} \|u(\cdot,\tau)-\varphi(y_0,y_1)\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}$$

и соответствующий оптимальный метод восстановления ($p=2,\infty$). Частные случаи этой задачи, когда одна из функций f_0 или f_1 фиксирована, в частности, равна нулю.

5. Аналог постановки в п.3 для задачи

$$u_{tt}+(-\Delta_S)^{\alpha/2}u=0,$$
$$u\big|_{t=0}=f_0,$$
$$u_t\big|_{t=0}=f_1.$$

Здесь много вариантов постановок. Например (не самый общий), следующий: восстановить решение задачи в момент времени τ по неточно заданным решениям в моменты времени $t=0$ и $t=T$, если известно, что $f_1=0$, т.е. найти величину

$$E_T^{(5)}(\alpha,L_2(\mathbb{S}^{d-1}),\delta_0,\delta_T) = \inf_{\varphi} \sup_{\substack{f_0,y_0,y_T\in L_2(\mathbb{S}^{d-1})\\ \|f_0-y_0\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}\le\delta_0\\ \|u(\cdot,T)-y_T\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}\le\delta_T}} \|u(\cdot,\tau)-\varphi(y_0,y_T)\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})},$$

где $\varphi\colon L_2(\mathbb{S}^{d-1})\times L_2(\mathbb{S}^{d-1})\to L_2(\mathbb{S}^{d-1})$, и соответствующий оптимальный метод восстановления.

9. Задачи восстановления в шаре

Соболевским классом $W_2^\alpha(\mathbb{B}^d)$ называется множество функций $f\in L_2(\mathbb{B}^d)$, для которых

$$\|(-\Delta)^{\alpha/2}f\|_{L_2(\mathbb{B}^d)}\le 1.$$

6. Восстановить решение задачи

$$\Delta u=0,$$
$$u\big|_{\mathbb{S}^{d-1}}=f$$

по неточно заданному конечному набору коэффициентов Фурье функции f на классе $W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1})$. Более точно, найти величину

$$E_{Np}^{(6)}(\alpha,W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}),\delta) = \inf_{\varphi\colon l_p^N\to L_2(\mathbb{B}^d)} \sup_{\substack{f\in W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}),\ y\in l_p^N\\ \|I_Nf-y\|_{l_p^N}\le\delta}} \|u-\varphi(y)\|_{L_2(\mathbb{B}^d)}$$

и метод, на котором достигается нижняя грань ($p=2,\infty$).

7. Теорема о трех сферах. Восстановить решение задачи

$$\Delta u = 0,$$
$$u\big|_{\mathbb{S}^{d-1}} = f$$

на сфере радиуса r по неточно заданным решениям на сферах радиусов r_1 и r_2, $r_1 < r < r_2$. Здесь требуется найти величину

$$E^{(7)}_{r_1,r_2}(r, L_2(\mathbb{S}^{d-1}), \delta_1, \delta_2) = \inf_{\varphi} \sup_{\substack{f, y_1, y_2 \in L_2(\mathbb{S}^{d-1}) \\ \|u|_{|x|=r_i} - y_i\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \le \delta_i,\ i=1,2}} \|u\big|_{|x|=r} - \varphi(y_1, y_2)\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})},$$

где $\varphi\colon L_2(\mathbb{S}^{d-1}) \times L_2(\mathbb{S}^{d-1}) \to L_2(\mathbb{S}^{d-1})$, и соответствующий оптимальный метод восстановления.

8. Восстановить решение задачи

$$(-\Delta)^{\alpha/2} u = f,$$
$$u\big|_{\mathbb{S}^{d-1}} = 0,$$

по неточно заданному конечному набору коэффициентов Фурье функции f на классе $W_2^\beta(\mathbb{B}^d)$. Более точно, найти величину

$$E^{(8)}_{Np}(\alpha, W_2^\beta(\mathbb{B}^d), \delta) = \inf_{\varphi\colon l_p^N \to L_2(\mathbb{B}^d)} \sup_{\substack{f \in W_2^\beta(\mathbb{B}^d),\ y \in l_p^N \\ \|I_N f - y\|_{l_p^N} \le \delta}} \|u - \varphi(y)\|_{L_2(\mathbb{B}^d)}$$

и метод, на котором достигается нижняя грань (здесь $I_N f = \{c_{ksj}\}$, $k = 0, 1, \ldots, n$, $s = 1, \ldots, s_0$, $j = 1, \ldots, a_k$, $N = (a_0 + \ldots + a_n)s_0$, c_{ksj} — коэффициенты Фурье f, $p = 2, \infty$).

9. Теорема о трех сферах для неоднородного уравнения. Восстановить решение задачи

$$(-\Delta)^{\alpha/2} u = f,$$
$$u\big|_{\mathbb{S}^{d-1}} = 0$$

на сфере радиуса r по неточно заданным решениям на сферах радиусов r_1 и r_2, $r_1 < r < r_2$. Здесь требуется найти величину

$$E^{(9)}_{r_1,r_2}(r, L_2(\mathbb{S}^{d-1}), \delta_1, \delta_2) = \inf_{\varphi} \sup_{\substack{f \in L_2(\mathbb{B}^d),\ y_1, y_2 \in L_2(\mathbb{S}^{d-1}) \\ \|u|_{|x|=r_i} - y_i\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \le \delta_i,\ i=1,2}} \|u\big|_{|x|=r} - \varphi(y_1, y_2)\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})},$$

где $\varphi\colon L_2(\mathbb{S}^{d-1}) \times L_2(\mathbb{S}^{d-1}) \to L_2(\mathbb{S}^{d-1})$, и соответствующий оптимальный метод восстановления.

10. Восстановить решение задачи

$$u_t + (-\Delta)^{\alpha/2} u = 0,$$
$$u\big|_{t=0} = f,$$
$$u\big|_{\mathbb{S}^{d-1}} = 0,$$

в момент времени τ по неточно заданному конечному набору коэффициентов Фурье функции f на классе $W_2^\beta(\mathbb{B}^d)$, т.е. найти величину

$$E_{Np}^{(10)}(\tau, \alpha, W_2^\beta(\mathbb{B}^d), \delta) = \inf_{\varphi\colon l_p^N \to L_2(\mathbb{B}^d)} \sup_{\substack{f \in W_2^\beta(\mathbb{B}^d),\ y \in l_p^N \\ \|I_N f - y\|_{l_p^N} \le \delta}} \|u(\cdot, \tau) - \varphi(y)\|_{L_2(\mathbb{B}^d)}$$

и соответствующий оптимальный метод восстановления ($p = 2, \infty$).

11. Восстановить решение задачи

$$u_t + (-\Delta)^{\alpha/2} u = 0,$$
$$u\big|_{t=0} = f,$$
$$u\big|_{\mathbb{S}^{d-1}} = 0,$$

в момент времени τ по неточно заданным решениям в моменты времени $t = 0$ и $t = T$, т.е. найти величину

$$E_T^{(11)}(\alpha, L_2(\mathbb{B}^d), \delta_0, \delta_T) = \inf_{\varphi} \sup_{\substack{f, y_0, y_T \in L_2(\mathbb{B}^d) \\ \|f - y_0\|_{L_2(\mathbb{B}^d)} \le \delta_0 \\ \|u(\cdot, T) - y_T\|_{L_2(\mathbb{B}^d)} \le \delta_T}} \|u(\cdot, \tau) - \varphi(y_0, y_T)\|_{L_2(\mathbb{B}^d)},$$

где $\varphi\colon L_2(\mathbb{B}^d) \times L_2(\mathbb{B}^d) \to L_2(\mathbb{B}^d)$, и соответствующий оптимальный метод восстановления.

12. Восстановления решения задачи

$$u_{tt} + (-\Delta_S)^{\alpha/2} u = 0,$$
$$u\big|_{t=0} = f_0,$$
$$u_t\big|_{t=0} = f_1,$$
$$u\big|_{\mathbb{S}^{d-1}} = 0,$$

в момент времени τ по неточно заданному конечному набору коэффициентов Фурье функций f_0 и f_1 на классах $W_2^{\beta_1}(\mathbb{B}^d)$, $W_2^{\beta_2}(\mathbb{B}^d)$

соответственно, т.е. найти величину

$$E_{Np}^{(12)}(\tau,\alpha,W_2^{\beta_1}(\mathbb{B}^d),W_2^{\beta_2}(\mathbb{B}^d),\delta_0,\delta_1) = \inf_{\varphi\colon l_p^N\times l_p^N\to L_2(\mathbb{B}^d)} \sup_{\substack{f_i\in W_2^{\beta_i}(\mathbb{B}^d),\ y_i\in l_p^N,\ i=1,2\\ \|I_N f_i-y_i\|_{l_p^N}\le\delta_i,\ i=1,2}} \|u(\cdot,\tau)-\varphi(y_0,y_1)\|_{L_2(\mathbb{B}^d)}$$

и соответствующий оптимальный метод восстановления ($p=2,\infty$). Частные случаи этой задачи, когда одна из функций f_0 или f_1 фиксирована, в частности, равна нулю.

13. Аналог постановки в п.5 для задачи

$$\begin{gathered} u_{tt}+(-\Delta)^{\alpha/2}u=0,\\ u\big|_{t=0}=f_0,\\ u_t\big|_{t=0}=f_1,\\ u\big|_{\mathbb{S}^{d-1}}=0. \end{gathered}$$

Один из вариантов (не самый общий) следующий: восстановить решение задачи в момент времени τ по неточно заданным решениям в моменты времени $t=0$ и $t=T$, если известно, что $f_1=0$, т.е. найти величину

$$E_T^{(13)}(\alpha,L_2(\mathbb{B}^d),\delta_0,\delta_T) = \inf_{\varphi} \sup_{\substack{f_0,y_0,y_T\in L_2(\mathbb{B}^d)\\ \|f_0-y_0\|_{L_2(\mathbb{B}^d)}\le\delta_0\\ \|u(\cdot,T)-y_T\|_{L_2(\mathbb{B}^d)}\le\delta_T}} \|u(\cdot,\tau)-\varphi(y_0,y_T)\|_{L_2(\mathbb{B}^d)},$$

где $\varphi\colon L_2(\mathbb{B}^d)\times L_2(\mathbb{B}^d)\to L_2(\mathbb{B}^d)$, и соответствующий оптимальный метод восстановления.

10. Дальнейшие задачи

14. Аналоги задач предыдущего раздела для шарового пояса.
15. Неоднородные эволюционные уравнения.
16. Краевые условия других типов.