Математические заметки

Том 0 выпуск 0 июнь 1966

УДК 517.5

Как наилучшим образом восстановить функцию по неточно заданному спектру?

Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко

Рассматривается задача об оптимальном восстановлении функции и ее производных на прямой по преобразованию Фурье самой функции, известному приближенно на множестве конечной меры. Найден оптимальный метод восстановления и оптимальное множество, на котором надо измерять преобразование Фурье с данной погрешностью.

Библиография: 9 названий.

1. Введение. Вопрос, первоначально стимулирующий написание данной работы, звучал так: "Как наилучшим образом восстановить сигнал, имея возможность измерить фиксированное число его гармоник с фиксированной погрешностью?"

На этот вопрос мы отвечаем в следующей ситуации. Пусть про функцию $x(\cdot) \in W_2^n(\mathbb{R})$ (соболевский класс функций $x(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$, у которых $(n-1)$-ая производная локально абсолютно непрерывна и $\|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant 1$) известно ее преобразование Фурье на некотором измеримом множестве M_σ меры не больше 2σ с точность до $\delta > 0$ в метрике $L_p(M_\sigma)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Мы ставим задачу об оптимальном восстановлении функции из $W_2^n(\mathbb{R})$ и ее k-ой производной ($k \leqslant n-1$) в метрике $L_2(\mathbb{R})$ по данной информации. Суть полученного ответа состоит в том, что преобразование Фурье лучше всего измерять на множестве, которое есть симметричный относительно нуля отрезок длины $2\sigma_0$, где $\sigma_0 = \min(\sigma, \widehat{\sigma})$, а $\widehat{\sigma}$ некоторое положительное число (зависящее от n, k, p и δ). При этом за пределами отрезка $[-\sigma_0, \sigma_0]$ информация о преобразовании Фурье оказывается лишней. Оставшуюся (полезную) информацию следует определенным образом "сгладить", взять от нее обратное преобразование Фурье и k раз продифференцировать (если $k \geqslant 1$). Данная процедура вполне соответствует тому, что происходит на практике (высокие частоты отбрасывают, а оставшиеся, в силу естественных погрешностей измерения, тем или иным способом фильтруют).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №10-01-00188, №10-01-90002).

2. Постановка задачи и формулировка результата. Пусть n — натуральное, $W_2^n(\mathbb{R})$ — соболевский класс функций на $\mathbb{R}$, определенный выше, $\sigma > 0$, $\mathcal{M}_\sigma$ — совокупность измеримых подмножеств прямой, меры которых не больше 2σ. Допустим, что про функцию $x(\cdot) \in W_2^n(\mathbb{R})$ известно ее преобразование Фурье $Fx(\cdot)$ на некотором множестве $M_\sigma \in \mathcal{M}_\sigma$ с точностью до $\delta > 0$ в метрике $L_p(M_\sigma)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, т. е. известна функция $y(\cdot) \in L_p(M_\sigma)$ такая, что $\|Fx(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_p(M_\sigma)} \leqslant \delta$. Под задачей оптимального восстановления функции из класса $W_2^n(\mathbb{R})$ или ее k-ой производной ($0 \leqslant k \leqslant n-1$) в метрике $L_2(\mathbb{R})$ по данной информации понимается нахождение величины

$$E(k,\sigma,p,\delta) = \inf_{M_\sigma} \inf_{m} \sup_{\substack{x(\cdot)\in W_2^n(\mathbb{R}),\ y(\cdot)\in L_p(M_\sigma)\\ \|Fx(\cdot)-y(\cdot)\|_{L_p(M_\sigma)}\leqslant\delta}} \|x^{(k)}(\cdot) - m(y(\cdot))(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})},$$

где первая нижняя грань берется по всем множествам $M_\sigma \in \mathcal{M}_\sigma$, а вторая — по всем отображениям (методам восстановления) $m\colon L_p(M_\sigma) \to L_2(\mathbb{R})$, называемой *погрешностью оптимального восстановления* и нахождение тех $\widehat{M}_\sigma$ и $\widehat{m}$, называемых *оптимальным множеством* и *оптимальным методом*, на которых нижние грани достигаются.

Постановка вопроса о нахождении погрешности оптимального восстановления и оптимального метода на классе элементов идеологически восходит к работе А. Н. Колмогорова о поперечниках функциональных классов [1]. Формулировка задачи оптимального восстановления (но в значительно более простой ситуации, чем приведенная здесь) принадлежит С. А. Смоляку [2]. Представление о дальнейшем развитии проблематики, связанной с задачами оптимального восстановления можно получить из работ [3]–[7]. Сформулированная выше задача для случая, когда $\mathcal{M}_\sigma$ состоит из одного отрезка $[-\sigma,\sigma]$, а $p = 2$ и ∞ рассмотрена в [8]. Там же доказано, что в этой ситуации, если $1 \leqslant p < 2$, то верхняя грань в определении $E(k,\sigma,p,\delta)$ равна бесконечности, так что этот случай не представляет интереса — любой метод оптимален. Случай, когда $\mathcal{M}_\sigma$ состоит из всех отрезков длины 2σ, а $p = 2$ исследован в [9]. В данной работе рассматривается общая ситуация, когда $2 < p < \infty$. Крайние случаи $p = 2$ и ∞ могут быть получены предельным переходом, но мы на этом не останавливаемся.

Пусть $2 < p < \infty$. Положим

$$\widehat{\sigma} = \left(\frac{\sqrt{2\pi}(n-k)^{1-1/p}}{\delta\sqrt{k+1/2-1/p}\;B^{1/2-1/p}}\right)^{1/(n+1/2-1/p)},$$

где

$$B = B\left(\frac{k+1/2-1/p}{(n-k)(1-2/p)}, 2\frac{1-1/p}{1-2/p}\right) \tag{2.1}$$

— B-функция Эйлера.

Теорема 1. *Пусть k, n — целые, $0 \leqslant k \leqslant n-1$, $\sigma > 0$, $\delta > 0$, $2 < p < \infty$ и $\sigma_0 = \min(\sigma, \widehat{\sigma})$. Тогда*

$$E(k,\sigma,p,\delta) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{\delta^2}{2\pi}\left(\dfrac{B}{n-k}\right)^{1-2/p}\sigma^{2k+1-2/p} + \dfrac{1}{\sigma^{2(n-k)}}}, & \sigma \leqslant \widehat{\sigma}, \\ \sqrt{\dfrac{n+1/2-1/p}{k+1/2-1/p}}\,\widehat{\sigma}^{-(n-k)}, & \sigma \geqslant \widehat{\sigma}. \end{cases}$$

Оптимальное множество — отрезок $[-\sigma_0, \sigma_0]$.

Оптимальный метод имеет вид

$$\widehat{m}(y(\cdot))(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{|\xi|\leqslant\sigma_0} (i\xi)^k \left(1 - \left(\frac{\xi}{\sigma_0}\right)^{2(n-k)}\right) y(\xi) e^{i\xi t}\, d\xi.$$

Как видно из формулировки теоремы, знание преобразования Фурье за пределами отрезка $[-\widehat{\sigma}, \widehat{\sigma}]$ оказывается лишним — погрешность оптимального восстановления не уменьшается. Полезная же информация (та, которая на отрезке $[-\sigma_0, \sigma_0]$) подвергается сглаживанию.

3. Доказательство теоремы. Ниже мы будем иметь дело с экстремальными задачами, у которых нет решения, поэтому начнем с доказательства одного утверждения, касающегося нахождения значения задачи в такой ситуации. Пусть X — произвольное непустое множество, $f_i\colon X \to \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \ldots, N$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, N$, и A — непустое подмножество X. Рассмотрим задачу

$$f_0(x) \to \max, \quad f_i(x) \leqslant \alpha_i, \quad i = 1, \ldots, N, \quad x \in A, \tag{3.1}$$

заключающуюся в нахождении тех допустимых (т. е. удовлетворяющих ограничениям задачи) элементов, на которых f_0 достигает максимума. Верхняя грань $f_0(x)$ по всем допустимым x называется значением задачи (3.1).

Свяжем с задачей (3.1) следующую функцию Лагранжа

$$\mathcal{L}(x,\lambda) = -f_0(x) + \sum_{i=1}^{N} \lambda_i f_i(x),$$

где $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$ — набор множителей Лагранжа.

Лемма 1. *Пусть существуют набор $\widehat{\lambda} = (\widehat{\lambda}_1, \ldots, \widehat{\lambda}_N)$ неотрицательных множителей Лагранжа, число $\widehat{\mathcal{L}}$ и последовательность допустимых элементов $\{x_m\}$ в (3.1) такие, что*

$$\begin{aligned} &(a) \quad \mathcal{L}(x,\widehat{\lambda}) \geqslant \widehat{\mathcal{L}} \ \text{ для всех } x \in A, \\ &(b) \quad \lim_{m\to\infty} \mathcal{L}(x_m, \widehat{\lambda}) = \widehat{\mathcal{L}}, \\ &(c) \quad \lim_{m\to\infty} \widehat{\lambda}_i (f_i(x_m) - \alpha_i) = 0, \ \ i = 1, \ldots, N. \end{aligned}$$

Тогда $\sum_{i=1}^{N} \widehat{\lambda}_i \alpha_i - \widehat{\mathcal{L}}$ — значение задачи (3.1).

Доказательство леммы. Обозначим через S значение задачи (3.1). Для любого допустимого элемента x в (3.1) в силу неотрицательности $\widehat{\lambda}_i$, $i=1,\dots,N$, и условия (a) имеем

$$-f_0(x)\geqslant -f_0(x)+\sum_{i=1}^N\widehat{\lambda}_i(f_i(x)-\alpha_i)=\mathcal{L}(x,\widehat{\lambda})-\sum_{i=1}^N\widehat{\lambda}_i\alpha_i\geqslant\widehat{\mathcal{L}}-\sum_{i=1}^N\widehat{\lambda}_i\alpha_i,$$

т. е. $S\leqslant\sum_{i=1}^N\widehat{\lambda}_i\alpha_i-\widehat{\mathcal{L}}$. С другой стороны, в силу условий (b) и (c) получаем, что

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{L}}=\lim_{m\to\infty}\mathcal{L}(x_m,\widehat{\lambda})&=-\lim_{m\to\infty}f_0(x_m)+\sum_{i=1}^N\lim_{m\to\infty}\widehat{\lambda}_if_i(x_m)\\&=-\lim_{m\to\infty}f_0(x_m)+\sum_{i=1}^N\lim_{m\to\infty}\widehat{\lambda}_i(f_i(x_m)-\alpha_i)+\sum_{i=1}^N\widehat{\lambda}_i\alpha_i\geqslant -S+\sum_{i=1}^N\widehat{\lambda}_i\alpha_i\end{aligned}$$

и значит, $S\geqslant\sum_{i=1}^N\widehat{\lambda}_i\alpha_i-\widehat{\mathcal{L}}$. Лемма доказана.

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы.

1. Оценка снизу величины $E(k,\sigma,p,\delta)$. Фиксируем $M_\sigma\in\mathcal{M}_\sigma$ и обозначим для данного M_σ через $E(k,M_\sigma,p,\delta)$ величину, стоящую под первой нижней гранью в определении $E(k,\sigma,p,\delta)$. Покажем, что $E(k,M_\sigma,p,\delta)$ не меньше значения задачи

$$\|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}\to\max,\quad \|Fx(\cdot)\|_{L_p(M_\sigma)}\leqslant\delta,\quad \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}\leqslant 1. \tag{3.2}$$

Действительно, пусть $x(\cdot)$ — допустимая функция в (3.2) (т. е. $x(\cdot)$ удовлетворяет ограничениям задачи), тогда, очевидно, функция $-x(\cdot)$ также допустима и мы имеем для любого $m\colon L_p(M_\sigma)\to L_2(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}2\|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}&\leqslant\|x^{(k)}(\cdot)-m(0)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}+\|-x^{(k)}(\cdot)-m(0)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}\\&\leqslant 2\sup_{x(\cdot)\in W_2^n(\mathbb{R}),\ \|Fx(\cdot)\|_{L_p(M_\sigma)}\leqslant\delta}\|x^{(k)}(\cdot)-m(0)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}\\&\leqslant 2\sup_{\substack{x(\cdot)\in W_2^n(\mathbb{R}),\ y(\cdot)\in L_p(M_\sigma)\\ \|Fx(\cdot)-y(\cdot)\|_{L_p(M_\sigma)}\leqslant\delta}}\|x^{(k)}(\cdot)-m(y(\cdot))(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}.\end{aligned}$$

Переходя слева к верхней грани по всем допустимым функциям в (3.2), а справа к нижней грани по всем методам m, получаем требуемое.

В образах Фурье, обозначая $u(\cdot)=(2\pi)^{-1/2}|Fx(\cdot)|$, квадрат значения задачи (3.2), согласно теореме Планшереля, равен значению такой задачи

$$\int_{\mathbb{R}}\xi^{2k}u^2(\xi)\,d\xi\to\max,\quad \int_{M_\sigma}u^p(\xi)\,d\xi\leqslant\frac{\delta^p}{(2\pi)^{p/2}},\quad \int_{\mathbb{R}}\xi^{2n}u^2(\xi)\,d\xi\leqslant 1,\quad u(\cdot)\geqslant 0. \tag{3.3}$$

Положим

$$\widehat{a}=\sup\{\,a\geqslant 0:\operatorname{mes}\{M_\sigma\cap[-a,a]\,\}=2a\}.$$

Ясно, что ноль принадлежит множеству в фигурных скобках. Покажем, что если $\widehat{a}=0$, то значение задачи (3.3) (а значит, и (3.2)) равно бесконечности. Действительно, в этом случае $\operatorname{mes}\{M_\sigma\cap[-\varepsilon,\varepsilon]\}<2\varepsilon$ для любого $\varepsilon>0$ и значит,

$\operatorname{mes}\Omega_\varepsilon = \{(\mathbb{R}\setminus M_\sigma)\cap[-\varepsilon,\varepsilon]\} > 0$. Положим

$$u_\varepsilon(\xi) = \begin{cases} \left(\int_{\Omega_\varepsilon} \tau^{2n}\,d\tau\right)^{-1/2}, & \xi\in\Omega_\varepsilon \\ 0, & \xi\notin\Omega_\varepsilon. \end{cases}$$

Эта функция допустима в задаче (3.3) и

$$\int_{\mathbb{R}} \xi^{2k}u_\varepsilon^2(\xi)\,d\xi = \frac{\int_{\Omega_\varepsilon}\xi^{2k}\,d\xi}{\int_{\Omega_\varepsilon}\tau^{2n}\,d\tau} = \frac{\int_{\Omega_\varepsilon}\xi^{2n}\xi^{-2(n-k)}\,d\xi}{\int_{\Omega_\varepsilon}\tau^{2n}\,d\tau} \geqslant \varepsilon^{-2(n-k)},$$

откуда, в силу произвольности ε, следует, что значение максимизируемого функционала в (3.3) может быть сделано сколь угодно большим.

Пусть теперь $\widehat{a}>0$. Найдем значение задачи (3.3) в этой ситуации, опираясь на доказанную выше лемму. Задача (3.3) имеет вид задачи (3.1) (X — совокупность всех измеримых функций $u(\cdot)$ на $\mathbb{R}$, A — подмножество неотрицательных функций). Функцию Лагранжа (3.3) запишем в виде

$$\mathcal{L}(u(\cdot),\lambda_1,\lambda_2) = \int_{M_\sigma}(-\xi^{2k}u^2(\xi)+\lambda_1u^p(\xi)+\lambda_2\xi^{2n}u^2(\xi))\,d\xi \\ + \int_{\mathbb{R}\setminus M_\sigma}(-\xi^{2k}+\lambda_2\xi^{2n})u^2(\xi)\,d\xi. \quad (3.4)$$

Положим $a_0=\min(\widehat{\sigma},\widehat{a})$, $\widehat{\lambda}_2 = a_0^{-2(n-k)}$. Тогда для любого $\lambda_1>0$ при $\xi\in[-a_0,a_0]$ функция $u\mapsto f(u) = -\xi^{2k}u^2+\lambda_1u^p+a_0^{-2(n-k)}\xi^{2n}u^2$ на $[0,\infty)$ достигает абсолютного минимума в точке

$$\widetilde{u}(\xi) = \left(\frac{2}{\lambda_1p}\right)^{\frac{1}{p-2}}\xi^{\frac{2k}{p-2}}\left(1-\left(\frac{\xi}{a_0}\right)^{2(n-k)}\right)^{\frac{1}{p-2}},$$

а при $|\xi|>a_0$ — в нуле.

Выберем теперь λ_1, которое обозначим $\widehat{\lambda}_1$, из условия

$$\int_{-a_0}^{a_0}\widetilde{u}^p(\xi)\,d\xi = \left(\frac{2}{\widehat{\lambda}_1p}\right)^{\frac{p}{p-2}}\int_{-a_0}^{a_0}\xi^{\frac{2pk}{p-2}}\left(1-\left(\frac{\xi}{a_0}\right)^{2(n-k)}\right)^{\frac{p}{p-2}}d\xi = \frac{\delta^p}{(2\pi)^{p/2}}. \quad (3.5)$$

Делая в интеграле замену $\eta=(\xi/a_0)^{2(n-k)}$, после несложных вычислений получаем, что

$$\widehat{\lambda}_1 = \left(\frac{\sqrt{2\pi}}{\delta}\right)^{p-2}\frac{2B^{1-2/p}}{p(n-k)^{1-2/p}}a_0^{2(k+1/2-1/p)},$$

где B определено равенством (2.1). Очевидно, что $\widehat{\lambda}_1>0$.

Поскольку $\operatorname{mes}\{M_\sigma\cap[-\widehat{a},\widehat{a}]\} = 2\widehat{a}$ и за пределами отрезка $[-a_0,a_0]$ функция f неотрицательна, то для всех $u(\cdot)\geqslant0$ имеем

$$\int_{M_\sigma}f(u(\xi))\,d\xi \geqslant \int_{M_\sigma\cap[-\widehat{a},\widehat{a}]}f(u(\xi))\,d\xi = \int_{-\widehat{a}}^{\widehat{a}}f(u(\xi))\,d\xi \\ \geqslant \int_{-a_0}^{a_0}f(u(\xi))\,d\xi \geqslant \int_{-a_0}^{a_0}f(\widetilde{u}(\xi))\,d\xi.$$

Далее, так как $\mathbb{R}\setminus M_\sigma\subset\mathbb{R}\setminus[-\widehat{a},\widehat{a}]$ с точностью до множества нулевой меры, а функция $\xi\mapsto -\xi^{2k}+a_0^{-2(n-k)}\xi^{2n}$ положительна при $|\xi|>a_0$, то для всех $u(\cdot)$

$$\int_{\mathbb{R}\setminus M_\sigma}(-\xi^{2k}+a_0^{-2(n-k)}\xi^{2n})u^2(\xi)\,d\xi\geqslant 0.$$

Из этих соотношений вытекает, что для всех $u(\cdot)\geqslant 0$ справедливо неравенство

$$\mathcal{L}(u(\cdot),\widehat{\lambda}_1,\widehat{\lambda}_2)\geqslant\int_{-a_0}^{a_0}f(\widetilde{u}(\xi))\,d\xi. \tag{3.6}$$

Рассмотрим отдельно два случая, когда $\widehat{a}<\widehat{\sigma}$ и когда $\widehat{a}\geqslant\widehat{\sigma}$.

Пусть $\widehat{a}<\widehat{\sigma}$. Тогда $a_0=\widehat{a}$. Для каждого $m\in\mathbb{N}$ положим $\Omega_m=(\mathbb{R}\setminus M_\sigma)\cap((-\widehat{a}-1/m,\widehat{a})\cup(\widehat{a},\widehat{a}+1/m))$. Из определения $\widehat{a}$ вытекает, что $\operatorname{mes}\Omega_m>0$ при всех m. Положим

$$u_m(\xi)=\begin{cases}\widetilde{u}(\xi), & \xi\in[-\widehat{a},\widehat{a}],\\ \gamma_m, & \xi\in\Omega_m,\\ 0, & \text{в остальных случаях,}\end{cases}$$

и γ_m выберем так, чтобы

$$\int_{\mathbb{R}}\xi^{2n}u_m^2(\xi)\,d\xi=\int_{-\widehat{a}}^{\widehat{a}}\xi^{2n}\widetilde{u}^2(\xi)\,d\xi+\gamma_m^2\int_{\Omega_m}\xi^{2n}\,d\xi=1. \tag{3.7}$$

Покажем, что это возможно. Действительно, делая, как и выше, замену $\eta=(\xi/\widehat{a})^{2(n-k)}$ в выражении для $\widetilde{u}(\cdot)$ и пользуясь известными свойствами B-функции, приходим к соотношению

$$\int_{-\widehat{a}}^{\widehat{a}}\xi^{2n}\widetilde{u}^2(\xi)\,d\xi=\frac{\delta^2(k+1/2-1/p)B^{1-2/p}}{2\pi(n-k)^{2-2/p}}\widehat{a}^{2n+1-2/p}.$$

Из определения $\widehat{\sigma}$ следует, что величина справа при $\widehat{a}=\widehat{\sigma}$ равна единице, а так как $\widehat{a}<\widehat{\sigma}$, то эта величина меньше единицы. Обозначая ее через C, получаем из (3.7), что

$$\gamma_m=(1-C)^{1/2}\left(\int_{\Omega_m}\xi^{2n}\,d\xi\right)^{-1/2}.$$

Проверим теперь, что

$$\lim_{m\to\infty}\mathcal{L}(u_m(\cdot),\widehat{\lambda}_1,\widehat{\lambda}_2)=\lim_{m\to\infty}\int_{\Omega_m}(-\xi^{2k}+\widehat{a}^{2(n-k)}\xi^{2n})u_m^2(\xi)\,d\xi \\ +\int_{-\widehat{a}}^{\widehat{a}}f(\widetilde{u}(\xi))\,d\xi=\int_{-\widehat{a}}^{\widehat{a}}f(\widetilde{u}(\xi))\,d\xi. \tag{3.8}$$

Действительно, используя определения $u_m(\cdot)$ и γ_m, получаем

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_m}(-\xi^{2k}+\widehat{a}^{2(n-k)}\xi^{2n})u_m^2(\xi)\,d\xi&=\gamma_m^2\int_{\Omega_m}(-\xi^{2k}+\widehat{a}^{-2(n-k)}\xi^{2n})\,d\xi\\ &\leqslant\left(\widehat{a}^{-2(n-k)}-(\widehat{a}+1/m)^{-2(n-k)}\right)\gamma_m^2\int_{\Omega_m}\xi^{2n}\,d\xi\\ &=(1-C)\left(\widehat{a}^{-2(n-k)}-(\widehat{a}+1/m)^{-2(n-k)}\right)\to 0,\quad m\to\infty,\end{aligned}$$

что и доказывает (3.8).

Теперь мы можем найти значение задачи (3.3) согласно лемме (условия которой (a), (b) и (c) следуют соответственно из (3.6), (3.8), (3.5) и (3.7)) в случае, когда $\widehat{a} < \widehat{\sigma}$. Это значение равно

$$\frac{\delta^2}{2\pi}\left(\frac{B}{n-k}\right)^{1-2/p}\widehat{a}^{2k+1-2/p} + \frac{1}{\widehat{a}^{2(n-k)}}. \tag{3.9}$$

Перейдем к случаю $\widehat{a} \geqslant \widehat{\sigma}$. Тогда $a_0 = \widehat{\sigma}$. Пусть $\widehat{\lambda}_1$ и $\widehat{\lambda}_2$ определяются как и раньше (но с $a_0 = \widehat{\sigma}$). Последовательность $\{u_m(\cdot)\}$ выберем постоянной, а именно,

$$u_m(\xi) = \begin{cases} \widetilde{u}(\xi), & \xi \in [-\widehat{\sigma}, \widehat{\sigma}], \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Из определения $\widehat{\sigma}$ следует, что

$$\int_{\mathbb{R}} \xi^{2n} u_m^2(\xi)\, d\xi = \int_{-\widehat{\sigma}}^{\widehat{\sigma}} \xi^{2n} \widetilde{u}^2(\xi)\, d\xi = 1.$$

Применяя лемму, остальные условия которой очевидным образом проверяются, получаем, что значение задачи (3.3) в данной ситуации равно

$$\frac{n+1/2-1/p}{k+1/2-1/p}\widehat{\sigma}^{-2(n-k)}.$$

Пусть $\sigma < \widehat{\sigma}$. Тогда, очевидно, $\widehat{a} \leqslant \sigma < \widehat{\sigma}$. Выражение (3.9), как функция $\widehat{a}$, убывает на $(0, \widehat{\sigma}]$ и поэтому значение задачи (3.2) не меньше, чем

$$\sqrt{\frac{\delta^2}{2\pi}\left(\frac{B}{n-k}\right)^{1-2/p}\sigma^{2k+1-2/p} + \frac{1}{\sigma^{2(n-k)}}}. \tag{3.10}$$

Тогда согласно доказанному выше, величина $E(k, M_\sigma, p, \delta)$ не меньше числа (3.10), не зависящего от структуры множества M_σ. Следовательно, при $\sigma < \widehat{\sigma}$

$$E(k, \sigma, p, \delta) \geqslant \sqrt{\frac{\delta^2}{2\pi}\left(\frac{B}{n-k}\right)^{1-2/p}\sigma^{2k+1-2/p} + \frac{1}{\sigma^{2(n-k)}}}.$$

Пусть $\sigma \geqslant \widehat{\sigma}$. Если $\widehat{a} < \widehat{\sigma}$, то по доказанному значение задачи (3.2) заведомо не меньше значения выражения (3.10) в точке $\sigma = \widehat{\sigma}$, которое, как несложно проверить, равно

$$\sqrt{\frac{n+1/2-1/p}{k+1/2-1/p}}\ \widehat{\sigma}^{-(n-k)}. \tag{3.11}$$

Если же $\widehat{a} \geqslant \widehat{\sigma}$, то было доказано, что значение задачи (3.2) равно величине (3.11). Тем самым при $\sigma \geqslant \widehat{\sigma}$

$$E(k, \sigma, p, \delta) \geqslant \sqrt{\frac{n+1/2-1/p}{k+1/2-1/p}}\ \widehat{\sigma}^{-(n-k)}.$$

2. Доказательство оптимальности множества $\Delta_{\sigma_0}=[-\sigma_0,\sigma_0]$ и метода $\widehat{m}$. Оптимальность Δ_{σ_0} и $\widehat{m}$ означает, что значение задачи (величина верхней грани в определении $E(k,\sigma,p,\delta)$)

$$\|x^{(k)}(\cdot)-\widehat{m}(y(\cdot))(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}\to\max,\quad \|Fx(\cdot)-y(\cdot)\|_{L_p(\Delta_{\sigma_0})}\leqslant\delta,$$
$$\|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}\leqslant 1,\quad y(\cdot)\in L_p(\Delta_{\sigma_0}) \qquad (3.12)$$

совпадает с $E(k,\sigma,p,\delta)$.

Обозначая $z(\cdot)=Fx(\cdot)-y(\cdot)$ и, для краткости записи, $\gamma(\xi)=(\xi/\sigma_0)^{2(n-k)}$, получим по теореме Планшереля, что квадрат значения задачи (3.12) равен значению такой задачи

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\Delta_{\sigma_0}}\xi^{2k}|(1-\gamma(\xi))z(\xi)+\gamma(\xi)Fx(\xi)|^2\,d\xi+\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}\setminus\Delta_{\sigma_0}}\xi^{2k}|Fx(\xi)|^2\,d\xi\to\max,$$
$$\int_{\Delta_{\sigma_0}}|z(\xi)|^p\,d\xi\leqslant\delta^p,\quad \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\xi^{2n}|Fx(\xi)|^2\,d\xi\leqslant 1. \qquad (3.13)$$

Полагая $u(\xi)=(2\pi)^{-1/2}|z(\xi)|$ и $v(\xi)=(2\pi)^{-1/2}|Fx(\xi)|$, сопоставим (3.13) задачу

$$\int_{\Delta_{\sigma_0}}\xi^{2k}((1-\gamma(\xi))u(\xi)+\gamma(\xi)v(\xi))^2\,d\xi+\int_{\mathbb{R}\setminus\Delta_{\sigma_0}}\xi^{2k}v^2(\xi)\,d\xi\to\max,$$
$$\int_{\Delta_{\sigma_0}}u^p(\xi)\,d\xi\leqslant\frac{\delta^p}{(2\pi)^{p/2}},\quad \int_{\mathbb{R}}\xi^{2n}v^2(\xi)\,d\xi\leqslant 1,\quad u(\xi)\geqslant 0,\quad v(\xi)\geqslant 0, \qquad (3.14)$$

значение которой, очевидно, не меньше значения задачи (3.13). Для нахождения значения задачи (3.14) снова воспользуемся леммой. Функция Лагранжа данной задачи имеет вид

$$\mathcal{L}(u(\cdot),v(\cdot),\lambda_1,\lambda_2)=\int_{\Delta_{\sigma_0}}(-\xi^{2k}((1-\gamma(\xi))u(\xi)+\gamma(\xi)v(\xi))^2+$$
$$+\lambda_1u^p(\xi)+\lambda_2\xi^{2n}v^2(\xi))\,d\xi+\int_{\mathbb{R}\setminus\Delta_{\sigma_0}}(-\xi^{2k}+\lambda_2\xi^{2n})v^2(\xi)\,d\xi.$$

Пусть $\xi\in\Delta_{\sigma_0}$. Положим $\widehat{\lambda}_2=\sigma_0^{-2(n-k)}$ и для фиксированного $\lambda_1>0$ рассмотрим функцию $(u,v)\mapsto g(u,v)=-\xi^{2k}((1-\gamma(\xi))u+\gamma(\xi)v)^2+\lambda_1u^p+\sigma^{-2(n-k)}\xi^{2n}v^2$ на $[0,\infty)\times[0,\infty)$. Легко проверить, что для каждого $u\geqslant 0$ функция $v\mapsto g(u,v)$ достигает абсолютного минимума на $[0,\infty)$ в точке $v=u$ и значит, $g(u,v)\geqslant g(u,u)$ для всех $u\geqslant 0$ и $v\geqslant 0$. Но $g(u,u)=f(u)$, где функция f определена выше и минимум f достигается в точке $\widetilde{u}(\xi)$ при $a_0=\sigma_0$.

Определив теперь последовательность $\{u_m(\cdot)\}$ тем же способом, что и ранее и взяв $v_m(\cdot)=u_m(\cdot)$, из леммы, совершенно аналогично предыдущему, получим, что значение задачи (3.14) равно

$$\frac{\delta^2}{2\pi}\left(\frac{B}{n-k}\right)^{1-2/p}\sigma_0^{2k+1-2/p}+\frac{1}{\sigma_0^{2(n-k)}}.$$

Следовательно,

$$E(k,\sigma,p,\delta) \geqslant \sqrt{\frac{\delta^2}{2\pi}\left(\frac{B}{n-k}\right)^{1-2/p}\sigma_0^{2k+1-2/p}+\frac{1}{\sigma_0^{2(n-k)}}},$$

что доказывает оптимальность отрезка Δ_{σ_0} и оптимальность метода $\widehat{m}$. Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] A. N. Kolmogorov, "Über die beste Annäherung von Functionen einer gegebenen Functionenklasse", *Ann. of Math.*, **37** (1936), 107–110.

[2] С. А. Смоляк, *Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них*, Дисс. ... к.ф.м.н., МГУ, М., 1965.

[3] C. A. Micchelli, T. J. Rivlin, "A survey of optimal recovery", *Optimal Estimation in Approximation Theory (C. A. Micchelli, T. J. Rivlin, Eds.)*, Plenum Press, New York, 1977, 1–54.

[4] J. F. Traub, H. Woźniakowski, *A General Theory of Optimal Algorithms*, Academic Press, New York, 1980.

[5] C. A. Micchelli, T. J. Rivlin, "Lectures on Optimal Recovery", *Lecture Notes in Mathematics*, **1129**, Springer–Verlag, Berlin, 1985, 21–93.

[6] В. В. Арестов, "Наилучшее восстановление операторов и родственные задачи", *Тр. Мат. ин-та АН СССР*, **189** (1989), 3–20.

[7] Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, "Об оптимальном восстановлении функционалов по неточным данным", *Матем. заметки*, **50**:6 (1991), 85–93.

[8] Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, "Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных", *Функ. анализ и его прил.*, **37** (2003), 51–64.

[9] Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, "О наилучшем выборе информации в задаче восстановления функции по спектру", *Математический форум. Т.1. Исследования по математическому анализу*, ВНЦ РАН, Владикавказ, 2008, 142–150.

Г. Г. Магарил-Ильяев
МИРЭА, г. Москва, ЮМН ВНЦ РАН, г. Владикавказ
E-mail: `magaril@mirea.ru`

К. Ю. Осипенко
МАТИ, г. Москва, ЮМН ВНЦ РАН, г. Владикавказ
E-mail: `kosipenko@yahoo.com`

Поступило
16.11.2010
Исправленный
вариант
00.00.2010