

---

**Об оптимальном восстановлении решений эволюционных уравнений**

Г.Г. Магарил-Ильяев

*Московский государственный институт радиотехники, электроники  
и автоматики (технический университет), пр. Вернадского, 78,  
Москва, 119454, Россия  
e-mail: magaril@mirea.ru*

К.Ю. Осипенко

*“МАТИ” — Российский государственный технологический  
университет им. К. Э. Циолковского, ул. Оршанская, 3, Москва,  
121552, Россия  
e-mail: kosipenko@yahoo.com*

---

Рассматривается задача оптимального восстановления решения абстрактной задачи Коши

$$\frac{dx}{dt} + Ax = 0, \quad (1)$$

$$x|_{t=0} = x_0(\cdot) \quad (2)$$

по неточным его измерениям в отдельные моменты времени. Здесь оператор  $A$  действует из  $\{x(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d) : \int_{\mathbb{R}^d} \psi^2(\xi) |Fx(\xi)|^2 d\xi < \infty\}$  в  $L_2(\mathbb{R}^d)$  по правилу  $Ax(\cdot) = F^{-1}(\psi(\cdot)Fx(\cdot))(\cdot)$ , где  $\psi(\cdot)$  — непрерывная вещественная функция на  $\mathbb{R}^d$  такая, что  $\sup_{\xi \in \mathbb{R}^d} \psi(\xi) = +\infty$  и  $\min_{\xi \in \mathbb{R}^d} \psi(\xi) = a > -\infty$ , а  $F$  и  $F^{-1}$  — прямое и обратное преобразования Фурье.

Под решением задачи (1)–(2) понимается дифференцируемая функция  $t \rightarrow x(t, \cdot)$  на  $(0, \infty)$  со значениями в  $L_2(\mathbb{R}^d)$ , удовлетворяющая (1) и такая, что  $x(t, \cdot) \rightarrow x_0(\cdot)$  при  $t \downarrow 0$  в  $L_2(\mathbb{R}^d)$ . Нетрудно проверить, что функция  $t \rightarrow P_t^\psi x_0(\cdot) = F^{-1}(e^{-\psi(\cdot)t} Fx_0(\cdot))(\cdot)$  является единственным решением данной задачи.

Пусть в моменты времени  $0 \leq t_1 < \dots < t_n$  известны приближенные решения задачи (1)–(2), т. е. известны такие функции  $y_j(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$ , что  $\|P_{t_j}^\psi x_0(\cdot) - y_j(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \delta_j$ , где  $\delta_j > 0$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Требуется по этой информации восстановить решение в момент времени  $\tau \neq t_j$ . В качестве методов восстановления рассматриваем произвольные отображения  $m: (L_2(\mathbb{R}^d))^n \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)$ . Погрешностью метода  $m$  назовем величину  $(\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n), y = (y_1(\cdot), \dots, y_n(\cdot)))$

$$e(\tau, A, \delta, m) = \sup_{\substack{x_0(\cdot), y_1(\cdot), \dots, y_n(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d) \\ \|P_{t_j}^\psi x_0(\cdot) - y_j(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \delta_j, j=1, \dots, n}} \|P_\tau^\psi x_0(\cdot) - m(y)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

Нас интересует величина

$$E(\tau, A, \delta) = \inf_{m: (L_2(\mathbb{R}^d))^n \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} e(\tau, A, \delta, m),$$

которая называется погрешностью оптимального восстановления и методом, на котором достигается нижняя грань, называемый оптимальным методом восстановления.

Обозначим  $M = \text{co} \{ (t_j, \ln(1/\delta_j)), 1 \leq j \leq n \} + \{ (\gamma, a\gamma) \mid \gamma \geq 0 \}$ , где  $\text{co } C$  — выпуклая оболочка множества  $C$ . Пусть функция  $\theta(\cdot)$  на  $[0, \infty)$  определена равенством:  $\theta(t) = \max \{ x : (t, x) \in M \}$ . Ясно, что  $\theta(\cdot)$  — ломаная на  $[t_1, \infty)$ . Пусть  $t_{s_1} < \dots < t_{s_k}$  — ее точки излома, которые, очевидно, являются подмножеством точек  $\{t_1, \dots, t_n\}$ .

**Теорема.** Пусть  $\tau \in (t_{s_j}, t_{s_{j+1}})$ ,  $1 \leq j \leq k-1$ . Тогда

$$E(\tau, A, \delta) = e^{-\theta(\tau)}$$

и

$$\widehat{m}(y)(\cdot) = P_\tau^\psi (K * (\lambda_{s_j} P_{t_{s_j}}^\psi y_{s_j} + \lambda_{s_{j+1}} P_{t_{s_{j+1}}}^\psi y_{s_{j+1}}))(\cdot)$$

— оптимальный метод, где

$$FK(\cdot) = \frac{1}{\lambda_{s_j} e^{-2\psi(\cdot)t_{s_j}} + \lambda_{s_{j+1}} e^{-2\psi(\cdot)t_{s_{j+1}}}}$$

и

$$\lambda_{s_j} = \frac{t_{s_{j+1}} - \tau}{t_{s_{j+1}} - t_{s_j}} \left( \frac{\delta_{s_{j+1}}}{\delta_{s_j}} \right)^{2 \frac{\tau - t_{s_j}}{t_{s_{j+1}} - t_{s_j}}}, \quad \lambda_{s_{j+1}} = \frac{\tau - t_{s_j}}{t_{s_{j+1}} - t_{s_j}} \left( \frac{\delta_{s_j}}{\delta_{s_{j+1}}} \right)^{2 \frac{t_{s_{j+1}} - \tau}{t_{s_{j+1}} - t_{s_j}}},$$

если  $\theta(t_{s_{j+1}}) - \theta(t_{s_j}) > a(t_{s_{j+1}} - t_{s_j})$  и  $\lambda_{s_j} = e^{-2a(\tau - t_{s_j})}$ ,  $\lambda_{s_{j+1}} = 0$  в противном случае.

Рассмотренная здесь задача относится к так называемым задачам оптимального восстановления линейных операторов. Подробнее см. [1] и [2].

## Список литературы

- [1] Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, “Оптимальное восстановление функций и их производных по коэффициентам Фурье, заданным с погрешностью”, *Матем. сб.*, 193, No. 3, 79–100 (2002).
- [2] Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, “Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных”, *Функц. анализ и его прилож.*, 37, 51–64 (2003).