МИНИСТЕРСТВО ОБЩЕГО И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МАТИ — Российский государственный технологический
университет им. К.Э. Циолковского

Кафедра высшей математики

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

Методические указания к практическим
занятиям по теме:
MAPLE® В КУРСЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО
АНАЛИЗА

Составители: Агарева О.Ю.
Введенская Е.В.
Осипенко К.Ю.

Москва 1999 г.

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

I. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ С ПОМОЩЬЮ ПАКЕТА MAPLE

Пакет Maple предоставляет мощные средства для дифференцирования функций и вычисления дифференциалов. Для вычисления простейшей производной следует в командном окне после приглашения Maple ввести команду следующего вида:

```
diff(<функция>,<переменная>);
```

здесь <функция> — выражение, задающее функцию (не обязательно одной переменной), например,

```
x^2+2*x+1
```

<переменная> - имя переменной, по которой будет вестись дифференцирование, например,

```
x
```

Примером вычисления производной может служить такая команда:

```
diff(x^2+2*x+1,x);
```

Также можно вычислить дифференциал функции, используя следующую команду:

```
D(<функция>);
```

где <функция> — выражение, задающее функцию. Например,

```
D(arcsin(x));
```

С помощью команды diff можно вычислять производные высших порядков. При этом команда имеет следующий формат:

```
diff(<функция>,<переменная>$<порядок>);
```

где <порядок> — порядок вычисляемой производной.

В решениях некоторых примеров этой главы с помощью MAPLE будут использованы дополнительные команды MAPLE. Кратко опишем их формат и назначение:

<переменная>:=convert(<выражение>,polynom); — представить <выражение> в виде полинома, присвоив значение <переменной>.

factor(<выражение>); — разложить <выражение> на множители.

subs(<old>=<new>,<выражение>); — подставить выражение <new> на место <old> в <выражении>.

<переменная>=solve(<выр1>=<значение>,<выр2>); — присвоить <переменной> значение выражения <выр2>, полученное разрешением уравнения <выр1>(<выр2>)=<значение>.

simplify(<выражение>); — упростить <выражение>.

taylor(<f(x)>,x=<x0>,<n>+1); — разложить функцию $f(x)$ по формуле Тейлора с центром в точке $x0$ до порядка n включительно.

II. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ. ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ. ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ

Определение 1. Производной функции $f(x)$ в точке x называется

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Из определения следуют правила дифференцирования:

1. $(u(x) + v(x))' = u'(x) + v'(x)$;
2. $(\alpha u(x)' = \alpha u'(x)$, где $\alpha = \mathrm{const}$;
3. $(u(x) \cdot v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$;
4. $\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)' = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$;
5. $f(g(x))' = f'(x)g'(x)$;
6. $\left(f^{-1}(x)\right)' = \left.\dfrac{1}{f'(y)}\right|_{y=f^{-1}(x)}$, здесь $f^{-1}(x)$ — функция, обратная $f(x)$.

На основании определения производной и формул 1) – 6) вычисляются производные некоторых элементарных функций:

7. $(c)' = 0$, где $c = \mathrm{const}$;
8. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, $\alpha = \mathrm{const}$;
9. $(a^x)' = a^x \ln a$ при $a > 0$, $a \neq 1$; в частности, $(e^x)' = e^x$;
10. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$; в частности, $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$;
11. $(\sin x)' = \cos x$;
12. $(\cos x)' = -\sin x$;
13. $(\mathrm{tg}\, x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;
14. $(\mathrm{ctg}\, x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;
15. $(\arcsin x)' = -(\arccos x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
16. $(\mathrm{arctg}\, x)' = -(\mathrm{arcctg}\, x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$;
17. $(\mathrm{sh}\, x)' = \mathrm{ch}\, x$;
18. $(\mathrm{ch}\, x)' = \mathrm{sh}\, x$;

19. $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$;

20. $(\operatorname{cth} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$;

Пример 1. Доказать, используя лишь определение, что $(\ln x)' = \dfrac{1}{x},\ x > 0$.

Доказательство: $(\ln x)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\ln(x+\Delta x) - \ln x}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \ln \left(\frac{x+\Delta x}{\Delta x} \right)^{\frac{1}{\Delta x}} = \lim_{\Delta x \to 0} \ln \left(\left(\frac{x+\Delta x}{\Delta x} \right)^{\frac{x}{\Delta x}} \right)^{\frac{1}{x}} = \ln e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x},$$

что требовалось доказать.

Вынося в последнем равенстве логарифм за знак предела, мы воспользовались непрерывностью функции $\ln x$ при $x > 0$. Заметим, что условие $x > 0$ гарантирует, что при достаточно малом $|\Delta x|$, $x + \Delta x$ тоже будет > 0, что необходимо для существования $\ln(x + \Delta x)$.

Пример 2. Вычислить y', если $y = 5^{2^{3^x}}$.

Решение: $y' = 5^{2^{3^x}} \cdot \ln 5 \cdot 2^{3^x} \cdot \ln 2 \cdot 3^x \cdot \ln 3 = (\ln 2 \ln 3 \ln 5) 5^{2^{3^x}} 2^{3^x} 3^x$.
Здесь использовались формулы 5) и 9).

Пример решения с использованием Maple:

```
>diff(5^(2^(3^x)),x);
 5^(2^(3^x))*2^(3^x)*3^x*ln(3)*ln(2)*ln(5)
```

III. ПРИЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

1. Для функций, представляющих собой громоздкие произведения и частные различных степенных выражений, удобно, а для показательно-степенных функций, где от переменного зависят как основание степени, так и ее показатель, — необходимо применять прием логарифмического дифференцирования.

Этот прием основан на соотношении $(\ln y(x))' = \dfrac{y'(x)}{y(x)} \Rightarrow$
$y'(x) = y(x)\,(\ln y(x))'$.

Пример 3. Найти y', где $y = (\ln x)^{\frac{1}{x^2}}$.

Решение: $\ln y = \dfrac{1}{x^2} \ln \ln x;\ (\ln y)' = \dfrac{y'}{y} = -\dfrac{2}{x^3} \ln \ln x + \dfrac{1}{x^2} \dfrac{1}{\ln x} \dfrac{1}{x}$

$= \dfrac{1}{x^3}\left(\dfrac{1}{\ln x} - 2\ln\ln x\right)$; $y' = \dfrac{(\ln x)^{\frac{1}{x^2}}}{x^3}\left(\dfrac{1}{\ln x} - 2\ln\ln x\right)$.

Пример решения с использованием Maple:

```
>diff((ln(x))^(1/x^2),x);
 ln(x)^(1/x^2)*(-2*(ln(ln(x))/x^3)+1/(x^3*ln(x)))
```

Пример 4. Вычислить y', если $y = \dfrac{(x-1)^{\frac{1}{2}}(x+3)^5(x+2)^7}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-2)}}$.

Решение: $\ln y = \dfrac{1}{2}\ln(x-1) + 5\ln(x+3) + 7\ln(x+2) - \dfrac{2}{3}\ln(x+1)$
$-\dfrac{1}{3}\ln(x-2)$;

$(\ln y)' = \dfrac{y'}{y} = \dfrac{1}{2(x-1)} + \dfrac{5}{x+3} + \dfrac{7}{x+2} - \dfrac{2}{3(x+1)} - \dfrac{1}{3(x-2)}$;

$y' = \dfrac{(x-1)^{\frac{1}{2}}(x+3)^5(x+2)^7}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-2)}}\left(\dfrac{1}{2(x-1)} + \dfrac{5}{x+3} + \dfrac{7}{x+2} - \dfrac{2}{3(x+1)}\right.$
$\left.-\dfrac{1}{3(x-2)}\right)$.

Пример решения с использованием Maple:

```
>simplify(diff(((x-
 1)^(1/2)*(x+3)^5*(x+2)^7)/((x+1)^2*(x-2))^
 (1/3),x));
 1/2*(23*x^4+12*x^3-143*x^2-
 16*x+100)*(x+3)^4*(x+2)^6/((x+1)^2*
 (x-2))^(1/3)/(x-2)/(x+1)/(x-1)^(1/2)
```

2. Дифференцирование параметрически заданных функций $y(x)$: $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$ производится по формуле $y'(x) = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$.

Пример 5. Вычислить $y'(x)$, если $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t. \end{cases}$

Решение: $y' = \dfrac{(b\sin t)'}{(a\cos t)'} = -\dfrac{b\cos t}{a\sin t} = -\dfrac{b}{a}\operatorname{ctg} t$. Заметим, что $y'(x)$ представляет собой, как и $y(x)$, параметрически заданную функцию: $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y'(x) = -\dfrac{b}{a}\operatorname{ctg} t. \end{cases}$

Пример решения с использованием Maple:

```
>S:=diff(b*sin(t),t)/diff(a*cos(t),t);
 S:=-b*cos(t)/a/sin(t)
```

3. Производную $y'(x)$ функции $y(x)$, заданной неявно в виде уравнения $F(x,y)=0$, можно вычислить (при условии $F'_y\neq 0$), дифференцируя тождество, полученное при подстановке в уравнение его решения $y(x)$: $F(x,y(x))=0$ по x. Получим выражение, в которое линейно войдет $y'(x)$. Его можно разрешить относительно $y'(x)$.

Пример 6. Рассмотрим неявное задание эллипса из примера 5: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$. Найдем $y'(x)$, дифференцируя уравнение эллипса, полагая в нем x независимой переменной, а y — функцией от x; получим $\dfrac{2x}{a^2}+\dfrac{2yy'}{b^2}=0\Rightarrow\dfrac{2y}{b^2}y'=-\dfrac{2x}{a^2}\Rightarrow y'=-\dfrac{b^2x}{a^2y}$. Заметим, что производная $y'(x)$ выражена не только через x, но и через y. Это естественно, так как на эллипсе значению $x\in(-a,a)$ соответствуют 2 точки с ординатами $y_1=\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ и $y_2=-\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$. Производные 2-х различных функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$ в точке x, вообще говоря, различны.

Пример решения с использованием Maple:

```
>Z:=diff(x^2/a^2+y(x)^2/b^2,x);
 Z:= 2*x/a^2+2*y(x)/b^2*diff(y(x),x)
>Q:=solve(Z=0,diff(y(x),x));
 Q:= -x*b^2/y(x)/a^2
```

IV. СТАРШИЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Определение производной n-го порядка функции $y(x)$ имеет индуктивный характер.

Определение 2. Производной порядка $n>1$ функции $y(x)$ называется $y^{(n)}(x)=\left(y^{(n-1)}(x)\right)'$.

Таким образом, n-я производная определяется и вычисляется через $(n-1)$-ю, та — через $(n-2)$-ю, и т.д.

Пример 7. Вычислить производную n-го порядка функции $y=\sin 2x$.

Решение: $y'=2\cos 2x$; $\quad y''=-4\sin 2x$;
$y'''=-8\cos 2x$; $\quad y^{(4)}=16\sin 2x$;
$\dots$
$$y^{(n)}=2^n\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}n\right).$$

Последняя формула является предположением, основанным на предыдущих 4-х строчках. Для $n=1,2,3,4$ она выполняется. Предположим, что “угаданная” формула для производной $(n-1)$-го порядка верна. Покажем, что тогда она верна и для n-й производной.

Пусть $y^{(n-1)} = 2^{n-1}\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}(n-1)\right)$. Продифференцируем последнее равенство по x:

$$y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)' = 2^n\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(2x+\frac{\pi}{2}n\right),$$

$$\text{т.к. } \cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right) = \sin\alpha.$$

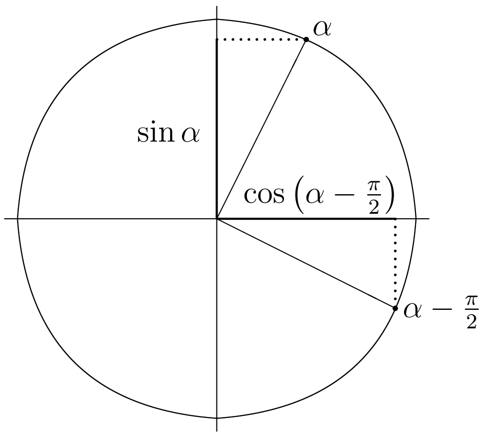

Рис. к примеру 7

Примененный способ доказательства называется методом полной математической индукции. Впрочем, по индукции можно доказать формулу $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$, а затем, применив ее и формулу $y^{(n)} = 2^n\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}n\right)$, получить выражение для $(\sin 2x)^{(n)}$.

Пример 8. Посчитаем 2-ю производную из примера 3, проиллюстрировав применение логарифмического дифференцирования для нахождения старших производных.

Решение: $y = (\ln x)^{\frac{1}{x^2}}$, $y' = \frac{(\ln x)^{\frac{1}{x^2}}}{x^3}\left(\frac{1}{\ln x} - 2\ln\ln x\right)$.

Продифференцируем $y' \Rightarrow y'' = \frac{\left((\ln x)^{\frac{1}{x^2}}\right)' x^3 - 3x^2(\ln x)^{\frac{1}{x^2}}}{x^6} \cdot$
$\left(\frac{1}{\ln x} - 2\ln\ln x\right) + \frac{(\ln x)^{\frac{1}{x^2}}}{x^3}\left(-\frac{1}{x\ln^2 x} - \frac{2}{x\ln x}\right)$
$= \left(\frac{(\ln x)^{\frac{1}{x^2}}}{x^6}\left(\frac{1}{\ln x} - 2\ln\ln x\right) - \frac{3}{x^4}(\ln x)^{\frac{1}{x^2}}\right) \cdot \left(\frac{1}{\ln x} - 2\ln\ln x\right) -$
$\frac{(\ln x)^{\frac{1}{x^2}}}{x^3}\left(\frac{1}{x\ln^2 x} + \frac{2}{x\ln x}\right) = \frac{(\ln x)^{\frac{1}{x^2}}}{x^4}\left(\left(\frac{1}{x^2\ln x} - \frac{2\ln\ln x}{x^2} - 3\right)\cdot\right.$

$\left(\dfrac{1}{\ln x} - 2\ln\ln x\right) - \dfrac{1}{\ln^2 x} - \dfrac{2}{\ln x}\Big)$. При вычислении y'' использовалась уже найденная в примере 3 $y' = \dfrac{(\ln x)^{\frac{1}{x^2}}}{x^3}\left(\dfrac{1}{\ln x} - 2\ln\ln x\right)$.

Пример решения с использованием Maple:

```
>factor(diff(ln(x)^(1/x^2),x$2));
 ln(x)^(1/x^2)*(4*ln(ln(x))^2*ln(x)^2-
 4*ln(ln(x))*ln(x)+1+6*x^2*ln(ln(x))*ln(x)^2-
 5*x^2*ln(x)-x^2)/
 x^6/ln(x)^2
```

Операция `factor` использована здесь для разложения результата на множители.

Пример 9. Найдем 2-ю производную y'' для верхней и нижней половин эллипса, заданного параметрически, из примера 5: $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases}$ $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y'(x) = -\dfrac{b}{a}\operatorname{ctg} t. \end{cases}$

Решение: $y'' = \dfrac{\dfrac{d}{dt}y'(x)}{\dfrac{dx}{dt}} = \dfrac{\dfrac{b}{a}\dfrac{1}{\sin^2 t}}{-a\sin t} = -\dfrac{b}{a^2}\dfrac{1}{\sin^3 t}$. Заметим, что вторая производная, как и первая, задана параметрически: $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y''(x) = -\dfrac{b}{a^2}\dfrac{1}{\sin^3 t}. \end{cases}$

Пример решения с использованием Maple:

```
>diff(S,t)/diff(a*cos(t),t);
 -(b/a+b*cos(t)^2/a/sin(t)^2)/a/sin(t)
```

*значение S было присвоено в примере 5

Пример 10. Найдем y'' для верхней и нижней половин эллипса, заданного неявно (см. пример 6): $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $y' = -\dfrac{b^2 x}{a^2 y}$.

Решение: Продифференцируем y' по x: $y'' = \left(-\dfrac{b^2 x}{a^2 y}\right)' = -\dfrac{b^2}{a^2} \cdot \dfrac{y - y'x}{y^2} = -\dfrac{b^2}{a^2 y^2}\left(y + \dfrac{b^2 x^2}{a^2 y}\right)$. Итак, $y'' = -\dfrac{b^2}{a^2 y^2}\left(y + \dfrac{b^2 x^2}{a^2 y}\right)$. 2-я производная неявной функции, как и первая, выражается как через x, так и через y.

Пример решения с использованием Maple:

```
>subs(diff(y(x),x)=Q,diff(Q,x));
 -b^2/y(x)/a^2-x^2*b^4/y(x)^3/a^4
```

*значение Q было присвоено в примере 6

V. ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ

Определение 3. Если приращение функции $y = f(x)$: $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$, соответствующее приращению аргумента Δx, может быть представлено в виде $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = A\Delta x + o(\Delta x)$, где A не зависит от Δx, но зависит, вообще говоря, от x, то функция $y = f(x)$ называется дифференцируемой в точке x. Здесь $o(\Delta x)$ — бесконечно малая более высокого порядка малости, чем Δx, т.е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{o(\Delta x)}{\Delta x} = 0$.

Можно доказать, что $A = \dfrac{df(x)}{dx}$. Таким образом, существование производной у функции $f(x)$ в точке x эквивалентно ее дифференцируемости в этой точке по определению 3.

Определение 4. Главная линейная часть приращения дифференцируемой функции $A\Delta x = f'(x)dx$ называется ее дифференциалом.

Дифференциал $df(x)$ является функцией двух аргументов — x и Δx. Рассмотрев функцию $y = x$, убедимся, что $dx \equiv \Delta x$ (дифференциал независимой переменной совпадает с ее приращением). Дифференциалы старших порядков определяются индуктивно.

Определение 5. Дифференциалом n-го порядка функции $f(x)$ $(n \geq 2)$ называется дифференциал от $(n-1)$-го дифференциала этой функции. При этом $d^{(n-1)}f$ считается функцией только x (но не $dx \equiv \Delta x$), т.е. $d^n f = d\left(d^{(n-1)}f\right) = d\left(f^{(n-1)}(x)(dx)^{(n-1)}\right) = f^{(n)}(x)(dx)^n$.

Соотношение $d^{(n-1)}f = f^{(n-1)}(x)(dx)^{(n-1)}$ выполняется, например, для $n-1 = 1$. Методом индукции из этого следует справедливость аналогичного выражения для n-го дифференциала при любом $n \geq 2$.

Пример 11. Вычислить 1-й и 2-й дифференциалы функции $y = \sqrt{1-x^2}\arcsin x$.

Решение: $dy = y'dx = \left(\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} - \dfrac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$

$= \left(1 - \dfrac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx.$

$d^2y = y''(dx)^2 = \left(1 - \dfrac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\right)'(dx)^2$

$$= -\frac{\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \arcsin x\right)\sqrt{1-x^2} + \dfrac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-x^2}}(dx)^2$$

$$= -\frac{x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x(1-x^2+x^2)}{(1-x^2)^{3/2}}(dx)^2$$

$$= -\frac{x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x}{(1-x^2)^{3/2}}(dx)^2.$$

Пример решения с использованием Maple:

```
>X:=subs(D(arcsin(x))=diff(arcsin(x),x)*D(x),D(sqrt(1-
 x^2)*arcsin(x)));
 X := -D(x)*x/(1-x^2)^(1/2)*arcsin(x)+D(x)
>F:=subs(D(D(x))=0,D(arcsin(x))=diff(arcsin(x),x)*D(x),
 D(X));
 F:=-D(x)^2/(1-x^2)^(1/2)*arcsin(x)-D(x)^2*x^2/(1-
 x^2)^(3/2)*arcsin(x)-D(x)^2*x/(1-x^2)
>simplify(F);
 (x*(1-x^2)^(1/2)+arcsin(x))*D(x)^2/(1-x^2)^(1/2)/(-
 1+x^2)
```

VI. ПРИЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНЫХ И ДИФФЕРЕНЦИАЛОВ

1. Формула Тейлора.

Приближение функции в окрестности точки x_0 многочленом может быть удобно в работе с этой функцией.

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \dots$$

$+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + R_n(x)$, где остаточный член $R_n(x)$, например, в форме Лагранжа, имеет вид $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, где $0 < \theta < 1$ (вообще говоря, θ зависит от x и x_0).

Справедливы следующие формулы Маклорена (формулы Тейлора при $x_0 = 0$) для некоторых элементарных функций:

1. $e^x \approx \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!} + R_n.$

2. $\sin x \approx \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \dfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + R_n.$

3. $\cos x \approx \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \dfrac{x^{2k}}{(2k)!} + R_n.$

4. $(1+x)^\alpha \approx 1 + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)}{k!} \cdot x^k + R_n.$

5. $\operatorname{arctg} x \approx \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \dfrac{x^{2k+1}}{2k+1} + R_n.$

6. $\ln(1+x) \approx \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \dfrac{x^k}{k} + R_n.$

Пример 12. Разложить многочлен $y = x^3 + x^2 + 2x - 3$ по степеням $(x+1)$.
Решение: $y' = 3x^2 + 2x + 2$, $y'' = 6x + 2$, $y''' = 6$, $y(-1) = -5$, $y'(-1) = 3$, $y''(-1) = -4$, $y'''(-1) = 6$, $y = -5 + 3(x+1) - 2(x+1)^2 + (x+1)^3$.
Пример решения с использованием Maple:

```
>taylor(x^3+x^2+2*x-3,x=-1,4);
  -5+3*(x+1)-2*(x+1)^2+1*(x+1)^3
```

Формула Тейлора n-го порядка точна для многочлена порядка n $(R_n = 0)$.
Пример 13. Вычислить приближенно с помощью первого дифференциала $\operatorname{tg} 5^\circ$.
Решение: $5^\circ = \dfrac{\pi}{36}$, $y = \operatorname{tg} x$, $x_0 = 0$, $\Delta x = \dfrac{\pi}{36}$, $\Delta y = \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{36} - \operatorname{tg} 0 = \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{36} \approx dy = (\operatorname{tg} x)' \cdot \Delta x = \left.\dfrac{1}{\cos^2 x}\right|_{x=0} \cdot \dfrac{\pi}{36} = \dfrac{\pi}{36} \approx 0,087$. Итак, $\operatorname{tg} 5^\circ \cong 0,087$.
Пример решения с использованием Maple:

```
>convert(subs(x=(Pi/36),taylor(tan(x),x=0,2)),polynom);
  1/36*Pi
```

В примере 13 неизвестна точность приближенного вычисления. Покажем, как с помощью формулы Тейлора можно производить вычисления с гарантированной точностью.
Пример 14. Вычислить с точностью $\varepsilon = 10^{-5}$ $\sin 28^\circ$.
Решение: $y = \sin x$, $x_0 = 30^\circ = \dfrac{\pi}{6}$, $\Delta x = -2^\circ = \dfrac{\pi}{90}$,

$$|R_n| = \left.\frac{\left|(\sin y)^{(n+1)}\right|}{(n+1)!}\right|_{y=x_0+\theta(x-x_0)=x_0+\theta\Delta x} \cdot \left(\frac{\pi}{90}\right)^{n+1}$$

$\leq \dfrac{1}{(n+1)!}\left(\dfrac{\pi}{90}\right)^{n+1}$.

$|R_1| \leq \dfrac{\pi^2}{90\cdot 180} \approx \dfrac{9}{16200} > 10^{-5}$. $|R_2| \leq \dfrac{\pi^3}{90^3\cdot 6} \approx \dfrac{27}{90^3\cdot 6} = \dfrac{1}{162000} < 10^{-5}$. Итак, $n = 2$ гарантирует заданную точность.

$\sin 28^\circ \approx \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\dfrac{\pi}{90} - \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\pi}{90}\right)^2 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}\pi}{180} - \dfrac{\pi^2}{32400} \cong \dfrac{1}{2} - 0,03023$
$-0,00030 \approx 46947.$

Пример решения с использованием Maple:

```
>C:=taylor(sin(x),x=Pi/6,5);
 C:=series(1/2+(1/2*3^(1/2))*(x-1/6*Pi)-1/4*(x-
 1/6*Pi)^2+(-
 1/12*3^(1/2))*(x-1/6*Pi)^3+1/48*(x-1/6*Pi)^4+O((x-
 1/6*Pi)^5),x=
 -(-1/6*Pi),5)
>V:=subs(x=7/45*Pi,C); convert(evalf(V),polynom);
 V:=1/2-1/180*3^(1/2)*Pi-1/32400*Pi^2+1/8748000*3^(1/2)*
 Pi^3+1/3149280000*Pi^4+O(-1/5904900000*Pi^5)
 .4694715632
```

2. Правило Лопиталя. Справедлива теорема:

Теорема 1. Пусть в некоторой окрестности точки x_0, кроме, быть может, самой этой точки, 2 функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, одновременно бесконечно малые или бесконечно большие, дифференцируемы и $\psi'(x) \neq 0$. При этом, если $\exists \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$, то $\exists \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ и они равны.

Пример 15. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos x)}{\ln(\cos 2x)}$.

Решение:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{\ln(\cos 2x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\dfrac{\sin x}{\cos x}}{-\dfrac{2\sin 2x}{\cos 2x}} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \frac{\sin x\cos 2x}{\sin 2x\cos x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\sin 2x}\cdot$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos 2x}{\cos x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2\cos 2x}\cdot 1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Пример решения с использованием Maple:

```
>limit(ln(cos(x))/ln(cos(2*x)),x=0);
 1/4
```

Пример 16. Вычислить $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}} = A$.

Решение:

$$\ln A = \lim_{x\to 1} \ln(2-x)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}} = \lim_{x\to 1} \operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}\ln(2-x) = \lim_{x\to 1}\frac{\sin\dfrac{\pi x}{2}}{\cos\dfrac{\pi x}{2}}\ln(2-x) =$$

$$\lim_{x\to 1}\sin\frac{\pi x}{2}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{\ln(2-x)}{\cos\dfrac{\pi x}{2}} = \lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{1}{2-x}}{\dfrac{\pi}{2}\sin\dfrac{\pi x}{2}} = \frac{2}{\pi} \Rightarrow A = e^{\frac{2}{\pi}}.$$

Пример решения с использованием Maple:

```
>limit((2-x)^tan(Pi*x/2),x=1);
 exp(2/Pi)
```

Пример 17. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0} x\operatorname{ctg}\pi x$.
Решение:

Решение:

$$\lim_{x\to 0} x\operatorname{ctg}\pi x = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{ctg}\pi x}{\dfrac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{\pi}{\sin^2\pi x}}{-\dfrac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{\pi x^2}{\sin^2\pi x} =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\pi^2 x^2}{\sin^2\pi x}\cdot\frac{1}{\pi} = \frac{1}{\pi}.$$

Пример решения с использованием Maple:

```
>limit(x*cot(Pi*x),x=0);
 1/Pi
```

3. Рассмотрим некоторые геометрические приложения производной. Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$ имеет вид $y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$. Если $f'(x_0) = \infty$, то уравнение касательной $x = x_0$. Уравнение нормали к графику в этой точке — $y = y_0 - \dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$. Если $f'(x_0) = 0$, то уравнение нормали $x = x_0$.

Пример 18. Написать уравнения касательной и нормали к графику функции $x^2 + y^2 = 1$ в точке $M = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.
Решение: Вычислим
$y'(x):\ 2x + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = -\dfrac{x}{y},\ y'(M) = -1;\ y_{\text{К}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} - \left(x - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$
$= \dfrac{1}{\sqrt{2}} - x$ — уравнение касательной; $y_{\text{Н}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \left(x - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = x$ — уравнение нормали.

Пример решения с использованием Maple:

```
>V:=diff(x^2+y(x)^2,x);
 V:=2*x+2*y(x)*diff(y(x),x)
>W:=solve(V=0,diff(y(x),x));
 W:=-x/y(x)
>subs(x=1/sqrt(2),y(1/sqrt(2))=1/sqrt(2),W);
 -1
```

Здесь найден только угловой коэффициент касательной.

Пример 19. Под какими углами пересекаются кривые $y_1 = x$ и $y_2 = x^3$?

Решение: $x = x^3$; $x(x-1)(x+1) = 0$; $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$. $y_1' = 1$, $y_2' = 3x^2$.

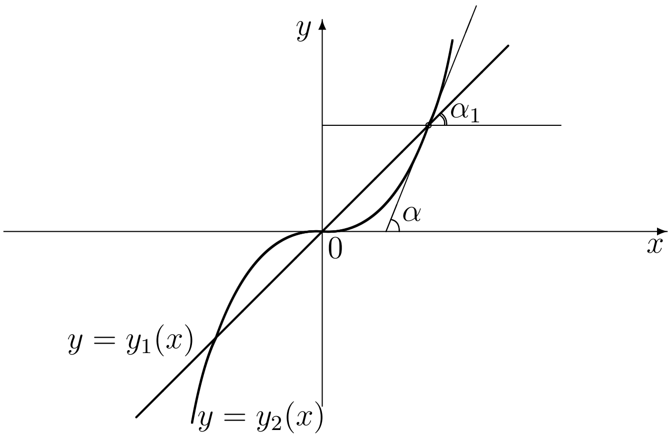

Рис. к примеру 7

1. $x_1 = 0$, $y_1' = 1$, $y_2' = 0$, $\operatorname{tg}\alpha_1 = \dfrac{1-0}{1+0} = 1, \Rightarrow \alpha_1 = \dfrac{\pi}{4}$.

2. $x_3 = 1$, $y_1' = 1$, $y_2' = 3$, $\operatorname{tg}\alpha_3 = \dfrac{3-1}{3+1} = \dfrac{1}{2}, \Rightarrow \alpha_3 = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}$.

3. В силу симметрии кривых $\alpha_3 = \alpha_2 = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}$.

Здесь использована формула

$$\operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_1 - \operatorname{tg}\alpha_2}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2}$$

(см. Рис.).

Пример решения с использованием Maple:

```
>solve(x=x^3,x);
 0   1   -1
>a:=diff(x,x); b:=diff(x^3,x);
 a:=1
 b:=3*x^2
>arctan(subs(x=0,(a-b)/(1+a*b)));
 1/4*Pi
>arctan(subs(x=1,(b-a)/(1+a*b)));
 arctan(1/2)
>arctan(subs(x=-1,(b-a)/(1+a*b)));
 arctan(1/2)
```

ОГЛАВЛЕНИЕ

Ольга Юрьевна Агарева
Елена Викторовна Введенская
Константин Юрьевич Осипенко

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Методические указания к практическим занятиям по теме:
“MAPLE в курсе математического анализа”

Редактор М.А. Соколова
Подписано в печать 21.6.99. Объем 1,5 п.л.
Тираж 75 экз. Заказ

Ротапринт МАТИ-РГТУ, Берниковская наб., 14