Министерство высшего и среднего специального
образования РСФСР

Московский авиационный технологический институт
им. К.Э. Циолковского

Кафедра “Высшая математика”

Утверждено редакционно-
издательским советом института
24.10.88

СПЛАЙН ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ФУНКЦИЙ

Методические указания к лабораторной работе
по курсу “Высшая математика”

Сост.: А.А. Жуков
К.Ю. Осипенко

Москва 1989

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая лабораторная работа посвящена изучению одного из методов аппроксимации функций — сплайн аппроксимации. Широкое применение сплайны нашли в различных областях техники и технологии в качестве математического аппарата для моделирования поверхностей деталей и агрегатов, сложной формы (обводы различных частей летательных аппаратов, корпусов судов и т.д.). Модели, основанные на сплайн аппроксимации, легли в основу систем автоматизированного проектирования изделий на основе ЭВМ, в которых с помощью аппроксимации сплайнами удалось с достаточной степенью точности решить проблему хранения геометрической информации в числовой форме.

Порядок выполнения работы

1. Ознакомиться с методом сплайн интерполяции.

2а. (В случае выполнения работы на ПЭКВМ). Для своего варианта составить вспомогательную таблицу 2. Вычислить значение сплайна в заданной точке.

2б. (В случае выполнения работы на ЭВМ). Ознакомиться со стандартной программой для вычисления значений кубического сплайна на равномерной сетке. Для своего варианта составить подпрограмму обращения к стандартной и посчитать значение сплайна в заданной точке.

3. Составить отчет о работе.

4. Защита работы.

1. ОПИСАНИЕ МЕТОДА СПЛАЙН ИНТЕРПОЛЯЦИИ

Пусть отрезок $[a,b]$ разбит на N равных отрезков $[x_i, x_{i+1}]$, где $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, \ldots, N-1$; $x_N = b$; $h = (b-a)/N$. Сплайном называется функция, которая вместе с несколькими производными непрерывна на всем заданном отрезке $[a,b]$, а на каждом частичном отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ является многочленом фиксированной степени.

На практике широкое распространение получили кубические сплайны $S_3(x)$, являющиеся непрерывными на $[a,b]$ функциями вместе со своими первой и второй производными, совпадающие с многочленом третьей степени на каждом отрезке $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \ldots, N-1$. Кубический сплайн, принимающий в узлах x_i те же значения y_i, что и некоторая функция f, называется интерполяционным. Он применяется для аппроксимации функции f на отрезке $[a,b]$ и ее производных до третьего порядка.

Для построения интерполяционного кубического сплайна положим $M_i = S_3''(x_i)$, $i = 0, 1, \ldots, N$ и заметим, что в силу линейности функции $S_3''(x)$ на каждом из отрезков $[x_i, x_{i+1}]$

$$S_3''(x) = M_i \frac{x_{i+1} - x}{h} + M_{i+1} \frac{x - x_i}{h}, \quad x \in [x_i, x_{i+1}]. \tag{1}$$

Интегрируя дважды обе части равенства (1) и вычисляя константы из условий $S_3(x_i) = f(x_i)$, $S_3(x_{i+1}) = f(x_{i+1})$, получим

$$S_3(x) = M_i \frac{(x_{i+1} - x)^3}{6h} + M_{i+1} \frac{(x - x_i)^3}{6h} + \left(y_i - \frac{1}{6} M_i h^2 \right) \frac{x_{i+1} - x}{h} + \left(y_{i+1} - \frac{1}{6} M_{i+1} h^2 \right) \frac{x - x_i}{h}, \quad x \in [x_i, x_{i+1}]. \tag{2}$$

Из равенства (2) найдем односторонние производные

$$\begin{aligned} S_3'(x_i - 0) &= \frac{h}{6} M_{i-1} + \frac{h}{3} M_i + \frac{y_i - y_{i-1}}{h}, \\ S_3'(x_i + 0) &= -\frac{h}{3} M_i - \frac{h}{6} M_{i+1} + \frac{y_{i+1} - y_i}{h}. \end{aligned} \tag{3}$$

Поскольку функция $S_3'(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то эти производные должны быть равными. Таким образом, получается система уравнений

$$\frac{1}{6} M_{i-1} + \frac{2h}{3} M_i + \frac{h}{6} M_{i+1} = \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h}, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1. \tag{4}$$

В этой системе $N-1$ уравнение. Чтобы однозначно определить значения $M_0, M_1, \ldots, M_N$, надо задать два дополнительных условия, так называемые “краевые условия”.

Краевые условия могут задаваться различным образом. Рассмотрим следующие случаи.

1. На концах известны значения вторых производных $M_0 = y_0''$, $M_N = y_N''$, в частности, $M_0 = M_N = 0$.

2. На концах известны наклоны $S_3'(a) = y_0'$, $S_3'(b) = y_N'$. Тогда из равенств (3) получаем

$$\begin{aligned} \frac{h}{3} M_0 + \frac{h}{6} M_1 &= \frac{y_1 - y_0}{h} - y_0', \\ \frac{h}{6} M_{N-1} + \frac{h}{3} M_N &= y_N' - \frac{y_N - y_{N-1}}{h}. \end{aligned}$$

Оба этих случая могут быть объединены одним видом краевых условий

$$2M_0 + \lambda M_1 = d_0, \quad \lambda M_{N-1} + 2M_N = d_N, \tag{5}$$

где в случае 1) $\lambda = 0$, $d_0 = 2y_0''$, $d_N = 2y_N''$, а в случае 2) $\lambda = 1$, $d_0 = 6((y_1 - y_0)/h - y_0')/h$, $d_N = 6(y_N' - (y_N - y_{N-1})/h)/h$.

Тем самым система (4) с учетом краевых условий (5) принимает вид

$$
\begin{pmatrix}
2 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 0\\
1 & 4 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 4 & \dots & 0 & 0 & 0\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
0 & 0 & 0 & \dots & 4 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 4 & 1\\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda & 2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} M_0\\ M_1\\ M_2\\ \vdots\\ M_{N-2}\\ M_{N-1}\\ M_N \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} d_0\\ d_1\\ d_2\\ \vdots\\ d_{N-2}\\ d_{N-1}\\ d_N \end{pmatrix},
\tag{6}
$$

где

$$d_i = \frac{6}{h^2}(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}), \quad i = 1, 2, \dots, N-1.$$

Для решения системы (6) образуем вспомогательные величины

$$q_0 = -\lambda/2, \quad p_N = \lambda q_{N-1} + 2,$$
$$p_i = q_{i-1} + 4, \quad q_i = -1/p_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1,$$
$$u_0 = d_0/2, \quad u_i = (d_i - u_{i-1})/p_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1,$$
$$u_N = (d_N - \lambda u_{N-1})/p_N.$$

Далее последовательно определяем $M_N, M_{N-1}, \dots, M_0$

$$M_N = u_N, \quad M_i = q_i M_{i+1} + u_i, \quad i = N-1, \dots, 0.$$

Зная величины $M_0, \dots, M_N$, по формулам (2) можно вычислить значение сплайна $S_3(x)$ в любой точке.

2. СХЕМА ЗАПИСИ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Величины p_i и q_i не зависят от y_i, а зависят лишь от λ. Поэтому они могут быть вычислены заранее для $\lambda = 0, 1$. Начиная с $N = 6$, эти величины с точностью до 5-го знака не изменяются. При данном N надо взять значения p_i и q_i, $i = 0, \dots, N-1$ из таблицы 1 для заданного $\lambda = 0$ или 1, а значение p_N из столбца поправок для $\lambda = 1$ и $p_N = 2$ для $\lambda = 0$.

Таблица 1

	$\lambda = 0$		$\lambda = 1$		$\lambda = 1$	
i	p_i	q_i	p_i	q_i	N	p_N
0	–	0	–	0,5		
1	4	-0,25	3,5	-0,28571	1	1,6
2	3,75	-0,26667	3,71429	-0,26923	2	1,71429
3	3,73333	-0,26788	3,73077	-0,26804	3	1,73077
4	3,73214	-0,26794	3,73196	-0,26796	4	1,73196
5	3,73206	-0,26795	3,73204	-0,26795	5	1,73204
6	3,73206	-0,26795	3,73205	-0,26795	6	1,73205
7	3,73206	-0,26795	3,73205	-0,26795	7	1,73205

Вычисления удобно расположить в следующей таблице.

Таблица 2

i	p_i	q_i	y_i	d_i	u_i	M_i
0	–	q_0	y_0	d_0	u_0	M_0
1	p_1	q_1	y_1	d_1	u_1	M_1
2	p_2	q_2	y_2	d_2	u_2	M_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$N-1$	p_{N-1}	q_{N-1}	y_{N-1}	d_{N-1}	u_{N-1}	M_{N-1}
N	p_N	q_N	y_N	d_N	u_N	M_N

Пример.

Построить кубический интерполяционный сплайн для функции $y = \sin x$ на отрезке $[0, \pi/2]$ для $N = 5$ с краевыми условиями $y_0'' = 0$, $y_5'' = -1$ ($\lambda = 0$). Вычислить значение сплайна в точке $x = \pi/4$ и сравнить с точным значением функции.

Составим таблицу, аналогичную таблице 2.

i	p_i	q_i	y_i	α_i	u_i	M_i
0	–	0	0	0	0	0
1	4	$-0,25$	$0,30902$	$-1,83898$	$-0,45975$	$-0,31154$
2	$3,75$	$-0,26667$	$0,58779$	$-3,49801$	$-0,81020$	$-0,59286$
3	$3,73333$	$-0,26786$	$0,80902$	$-4,81417$	$-1,07249$	$-0,81502$
4	$3,73214$	$-0,26794$	$0,95106$	$-5,65980$	$-1,22914$	$-0,96120$
5	2	–	1	-2	-1	-1

Для вычисления сплайна в точке $x = \pi/4$ воспользуемся формулой (2) при $i = 2$.

$$S_3\left(\frac{\pi}{4}\right) = -0,59286\frac{\left(\frac{3\pi}{10} - \frac{\pi}{4}\right)^3}{\frac{6\pi}{10}} - 0,81502\frac{\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{10}\right)^3}{\frac{6\pi}{10}} + \Bigg(0,58779$$

$$+ \frac{0,59286}{6}\left(\frac{\pi}{10}\right)^2\Bigg)\frac{\frac{3\pi}{10} - \frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{10}} + \left(0,80902 + \frac{0,81502}{6}\left(\frac{\pi}{10}\right)^2\right)\frac{\frac{\pi}{4} - \frac{2\pi}{10}}{\frac{\pi}{10}}$$

$$= -\left(\frac{\pi}{10}\right)^2\frac{0,59286 + 0,81502}{48} + \frac{0,58779 + 0,80902}{2}$$

$$+ \left(\frac{\pi}{10}\right)^2\frac{0,59286 + 0,81502}{12} = \left(\frac{\pi}{10}\right)^2(-0,02933 + 0,11732) + 0,69841$$

$$= 0,70709.$$

Точное значение $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,70711.$

3. СТАНДАРТНАЯ ПОДПРОГРАММА ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ЗНАЧЕНИЙ КУБИЧЕСКОГО СПЛАЙНА

Для вычисления значений интерполяционного кубического сплайна по равномерной сетке можно использовать стандартную подпрограмму $SPL3$. Обращение к этой подпрограмме имеет вид

$$CALL\ SPL3(A, B, DA, DB, M, Y, RL, X, YS, K, Q, U).$$

Формальные параметры имеют следующий смысл:

A	—	левый конец отрезка;
B	—	правый конец отрезка;
DA, DB	—	соответственно, d_0 и d_N (см. (5));
M	—	число точек равномерного разбиения отрезка $[A, B]$ (оно равно $N + 1$);
Y	—	массив значений приближаемой функции в равномерной сетке отрезка $[A, B]$ (размерности M);
RL	—	параметр λ (см. (5));
X	—	массив значений аргумента, в которых требуется посчитать значения сплайна (размерности K);
YS	—	массив значений сплайна в точках массива X (размерности K);
X	—	размерность массивов X и YS;
Q, U	—	рабочие массивы размерности M.

Подпрограмма $SPL3$ имеет следующий вид

```
      SUBROUTINE SPL3(A,B,DA,DB,M,Y,RL,X,
    * YS,K,Q,U)
      DIMENSION Y(M),X(K),YS(K),Q(M),U(M)
      M1=M-1
      H=(B-A)/M1
      H1=6./H**2
      Q(1)=-.5*RL
      U(1)=-.5*DA
      DO 1 I=2,M1
      Q(I)=-1./(Q(I-1)+4.)
      D=H1*(Y(I+1)-2*Y(I)+Y(I-1))
 1    U(I)=(D-U(I-1))/(Q(I-1)+4.)
      U(M)=(DB-RL*U(M1))/(RL*Q(M1)+2.)
      DO 2 I=1,M1
      L=M-I
 2    U(L)=Q(L)*U(L+1)+U(L)
      DO 3 I=1,K
      L=M1
      DO 4 J=2,M1
```

```
      IF(X(I).GT.A + (J - 1) * H) GOTO 4
      L = J - 1
      GOTO 5
4     CONTINUE
5     X2 = A + L * H
      X1 = X2 - H
3     YS(I) = (U(L) * (X2 - X(I)) **3 + U(L + 1) * (X(I)-
     * X1) **3/6./H + (Y(L) - U(L)/H1) * (X2 - X(I))
     * /H + (Y(L + 1) - U(L + 1)/H1) * (X(I) - X1)/H
      RETURN
      END
```

4. ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

В каждом варианте для заданной функции $f(x)$ построить на указанном отрезке $[a, b]$ интерполяционный кубический сплайн для $N = 5$ с краевыми условиями:

$$y_0'' = f''(a), \quad y_5'' = f''(b).$$

Вычислить значение сплайна в середине отрезка $\dfrac{a+b}{2}$ и сравнить его с точным значением функции.

1. $\operatorname{tg} x^2$, $[0, \pi/3]$
2. $\operatorname{arctg} \sqrt{x}$, $[1/2, 1]$
3. $\ln(x^2 + 1)$, $[-2, -1]$
4. e^{x-1}, $[0, 1]$
5. $\operatorname{arctg} x$, $[0, 1]$
6. $\operatorname{ctg}(x + 1)$, $[-1/2, 0]$
7. $\ln(sin^2 x)$, $[\pi/3, \pi/2]$
8. $\cos(x^2 - 1)$, $[0, \pi/2]$
9. $2^{\sin x}$, $[0, \pi/2]$
10. $\operatorname{arctg} \sqrt{x-1}$, $[2, 3]$
11. $\ln(x^2 + x)$, $[1/2, 1]$
12. $1/\ln x$, $[4, 5]$
13. $\operatorname{arctg}(x^2 - 1)$, $[0, 1]$
14. $1/\arcsin x$, $[1/2, 1]$
15. $\sin \sqrt{x}$, $[1/2, 1]$
16. $\operatorname{tg}(1/x^2)$, $[2, 3]$
17. $1/\sqrt{x^2 + 4}$, $[0, 1]$
18. $\arcsin x^2$, $[0, 1/2]$
19. e^{x^2}, $[1, 3/2]$
20. $e^x/\sqrt{x}$, $[1, 2]$
21. $\sqrt{x^2 + x - 1}$, $[2, 3]$
22. $\ln(\operatorname{arctg} x)$, $[1, 2]$
23. $1/((x^2 + 1)$, $[-1/2, 1/2]$

24. 3^{x^2+1}, $[-1, 0]$
25. $1/\operatorname{arctg} x$, $[1, 2]$
26. $\cos(1/x)$, $[2, 3]$
27. $\ln(\arcsin x)$, $[1/2, 1]$
28. $(2x+1)/x^3$, $[1, 2]$
29. $e^{1/x}$, $[1, 2]$
30. $\sqrt{3-2x+x^2}$, $[-3, -2.5]$

Основная литература

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. — М.: Наука, 1987.
2. Калиткин Н.Н., Численные методы. — М.: Наука, 1978.

Дополнительная литература

1. Альберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее приложение. — М.: Мир, 1972.
2. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. — М.: Наука, 1980.
3. Форсайт Дж., Мальком М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. — М.: Мир, 1980.