

Государственный комитет Российской Федерации
по высшему образованию

Московский государственный авиационный
технологический университет им. К. Э. Циолковского

Кафедра “Высшая математика”

АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИЙ
МНОГОЧЛЕНАМИ
И ЧИСЛЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

Методические указания
по курсу “Численные методы”

Составитель Осипенко К.Ю.

Москва 1994 г.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящем пособии излагаются основные классические методы аппроксимации функций многочленами и применение этих методов для задач численного дифференцирования. Функция — центральное понятие в математике. При практическом вычислении даже довольно простых функций (таких, например, как $\sin x$, $\cos x$, e^x) уже возникает вопрос: как их вычислять? Часто на практике значения функций бывают известны лишь в некотором числе точек. Как получить значения таких функций в промежуточных точках? В этих и других подобных задачах используется аппроксимация (приближение) изучаемых функций более простыми, как правило, многочленами.

Распространенной задачей является также задача приближенного вычисления производной функции, если она известна в некотором наборе точек. Соответствующие методы приближения, называемые формулами численного дифференцирования, могут быть получены с помощью многочленов, аппроксимирующих функцию.

АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИЙ МНОГОЧЛЕНАМИ

1. Многочлен Тейлора

Обозначим через $C[a, b]$ множество всех непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций. Через $C^n[a, b]$ будем обозначать множество функций, для которых $f^{(n)} \in C[a, b]$, т.е. функция f n раз дифференцируема и ее n -ая производная непрерывна на отрезке $[a, b]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $f \in C[a, b]$. *Многочленом Тейлора* функции f в точке $x_0 \in [a, b]$ степени n называется многочлен

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

ПРИМЕР 1.1. Найти многочлен Тейлора степени n для функции $f(x) = \sin x$ в нуле.

РЕШЕНИЕ. Нетрудно убедиться, что

$$f^{(2k-1)}(x) = (-1)^{k-1} \cos x, \quad f^{(2k)}(x) = (-1)^k \sin x, \quad k = 1, 2, \dots$$

Поэтому для $n = 2k - 1$ имеем

$$P_{2k-1}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!} x^{2k-1}.$$

Этот же многочлен является многочленом Тейлора и для $n = 2k$, так как $f^{(2k)}(0) = 0$.

Многочлен Тейлора степени n обладает тем замечательным свойством, что все его производные до порядка n включительно

в точке x_0 совпадают с соответствующими производными функции f , т.е.

$$P_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0), \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Это свойство легко проверить непосредственным дифференцированием $P_n(x)$.

Положим

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x).$$

Величина $R_n(x)$ равна погрешности, возникающей при замене функции на ее многочлен Тейлора в точке x .

Из курса математического анализа известно, что, если $f \in C^{n+1}[a, b]$, то при всех $x \in [a, b]$ справедливо представление погрешности $R_n(x)$ в форме Лагранжа

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1},$$

где ξ некоторая точка, лежащая строго между x и x_0 , если $x \neq x_0$.

Так как $f^{(n+1)}$ непрерывна на $[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке. Положим

$$M_{n+1} = \max_{x \in [a, b]} |f^{(n+1)}(x)|.$$

Тогда имеем для всех $x \in [a, b]$

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1}. \quad (1.1)$$

Аппроксимация многочленами Тейлора (или, что то же, отрезками рядов Тейлора) используется, когда у функции легко вычисляются производные высших порядков, а остаточный член стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Это прежде всего относится к элементарным функциям $\sin x$, $\cos x$, e^x , $\ln(1+x)$ и $\operatorname{arctg} x$. Напомним ряды Тейлора для этих функций:

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots, \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots, \\ e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots, \\ \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots, \\ \operatorname{arctg} x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \end{aligned}$$

Первые три ряда сходятся на всей числовой оси, а последние два имеют радиус сходимости, равный единице.

ПРИМЕР 1.2. Найти аппроксимацию функции $\sin x$ многочленом Тейлора, позволяющую вычислять эту функцию с погрешностью, не превосходящей 10^{-6} .

РЕШЕНИЕ. С помощью формул приведения задача сводится к вычислению $\sin x$ для $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$. Более того, в силу равенства

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

можно ограничиться отрезком $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$, если с той же точностью построить аппроксимацию на этом же отрезке для функции $\cos x$.

Имеем (см. пример 1.1)

$$\begin{aligned}\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!} x^{2k-1} + R_{2k}^s, \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + R_{2k+1}^c.\end{aligned}$$

В силу того, что

$$\max_{x \in [0, \frac{\pi}{4}]} |\sin^{(2k+1)} x| = \max_{x \in [0, \frac{\pi}{4}]} |\cos^{(2k+2)} x| = \max_{x \in [0, \frac{\pi}{4}]} |\cos x| = 1,$$

получаем (см. (1.1))

$$\begin{aligned}|R_{2k}^s(x)| &\leq \frac{1}{(2k+1)!} |x|^{2k+1} \leq \frac{1}{(2k+1)!} \left(\frac{\pi}{4}\right)^{2k+1}, \\ |R_{2k+1}^c(x)| &\leq \frac{1}{(2k+2)!} |x|^{2k+2} \leq \frac{1}{(2k+2)!} \left(\frac{\pi}{4}\right)^{2k+2}.\end{aligned}\tag{1.2}$$

Обозначив через r_s и r_c правые части в (1.2), будем иметь:

k	0	1	2	3	4
r_s	$7,85 \cdot 10^{-1}$	$8,07 \cdot 10^{-2}$	$2,49 \cdot 10^{-3}$	$3,66 \cdot 10^{-5}$	$3,13 \cdot 10^{-7}$
r_c	$3,08 \cdot 10^{-1}$	$1,59 \cdot 10^{-2}$	$3,26 \cdot 10^{-4}$	$3,59 \cdot 10^{-6}$	$2,46 \cdot 10^{-8}$

Таким образом, для $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ получаем следующие аппроксимации

$$\begin{aligned}\sin x &\approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}, & |R_8^s(x)| &\leq 3,13 \cdot 10^{-7}, \\ \cos x &\approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!}, & |R_9^c(x)| &\leq 2,46 \cdot 10^{-8}.\end{aligned}\tag{1.3}$$

2. Вычисление значений многочлена. Схема Горнера

Рассмотрим многочлен степени n

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n.$$

Чтобы вычислить значения этого многочлена в точке a можно сначала найти с помощью $(n-1)$ -го умножения a, a^2, \dots, a^n , а затем

3. Интерполяционный многочлен Лагранжа

Одной из распространенных задач на практике является следующая задача. Функция $f(x)$ известна в некоторой системе точек x_0, x_1, \dots, x_n , т.е. известны значения $f(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$. Требуется найти приближенные значения функции в промежуточных точках.

Очевидно, что функций, принимающих в данных точках заданные значения, бесконечно много. Поэтому, чтобы задача была поставлена корректно, надо задать некоторую дополнительную информацию о том классе, которому принадлежит рассматриваемая функция, или фиксировать класс приближающих функций. Исторически первой была задача о нахождении функции наиболее простого вида, проходящей через заданные точки, например, многочлена наименьшей степени.

ТЕОРЕМА 3.1. *Существует единственный многочлен n -ой степени, удовлетворяющий условиям*

$$L_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (3.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. **Существование.** Рассмотрим многочлены степени n

$$l_{nj}(x) = \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \dots (x - x_n)}{(x_j - x_0) \dots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \dots (x_j - x_n)}, \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

Имеем

$$l_{nj}(x_j) = 1, \quad l_{nj}(x_i) = 0, \quad i \neq j. \quad (3.2)$$

Положим

$$L_n(x) = \sum_{j=0}^n l_{nj}(x) f(x_j). \quad (3.3)$$

В силу равенств (3.2) убеждаемся в справедливости (3.1).

Единственность. Пусть многочлен $\tilde{L}_n(x)$ также удовлетворяет равенствам (3.1). Рассмотрим многочлен степени n

$$P_n(x) = L_n(x) - \tilde{L}_n(x).$$

Имеем

$$P_n(x_i) = L_n(x_i) - \tilde{L}_n(x_i) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

В силу основной теоремы алгебры число нулей всякого многочлена, отличного от тождественного нуля, не превосходит его степени. Следовательно, $P_n(x) \equiv 0$, т.е. $\tilde{L}_n(x) \equiv L_n(x)$. Теорема доказана. \square

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Многочлен, удовлетворяющий равенствам (3.1) называется *интерполяционным многочленом*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Интерполяционный многочлен, записанный в виде (3.3) называется *интерполяционным многочленом Лагранжа*.

Многочлены l_{nj} могут быть записаны в несколько ином виде. Положим

$$\omega_n(x) = (x - x_0) \dots (x - x_n).$$

Тогда

$$(x - x_0) \dots (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \dots (x - x_n) = \frac{\omega_n(x)}{x - x_j}.$$

Поскольку

$$\omega'_n(x_j) = (x_j - x_0) \dots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \dots (x_j - x_n),$$

то

$$l_{nj}(x) = \frac{\omega_n(x)}{(x - x_j)\omega'_n(x_j)}.$$

Тем самым интерполяционный многочлен Лагранжа может быть представлен в виде

$$L_n(x) = \sum_{j=0}^n \frac{\omega_n(x)}{(x - x_j)\omega'_n(x_j)} f(x_j) = \omega_n(x) \sum_{j=0}^n \frac{f(x_j)}{(x - x_j)\omega'_n(x_j)}. \quad (3.4)$$

ПРИМЕР 3.1. Построить интерполяционный многочлен Лагранжа по данным

$$\begin{array}{ccccc} x_i & -1 & 0 & 1 & 3 \\ f(x_i) & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}$$

и вычислить его значение при $x = 2$.

РЕШЕНИЕ. Из равенства (3.3)

$$\begin{aligned} L_3(x) &= \frac{x(x-1)(x-3)}{-8} + \frac{(x+1)(x-1)(x-3)}{3} \cdot 2 + \frac{(x+1)x(x-3)}{-4} \\ &= \frac{7}{24}x^3 - x^2 - \frac{7}{24}x + 2. \end{aligned}$$

Следовательно, $L_3(2) = -\frac{1}{4}$.

4. Погрешность при интерполяции многочленом Лагранжа

Интерполяционный многочлен Лагранжа часто используется для приближенных вычислений исходной функции в промежуточных точках. Величина возникающей при такой замене погрешности может быть оценена с помощью следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть $f \in C^{n+1}[a, b]$. Тогда при всех $x \in [a, b]$ имеет место равенство

$$f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_n(x), \quad (4.1)$$

где $\xi \in (a, b)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $x = x_i$, $i = 0, 1, \dots, n$, равенство (4.1) очевидно. Предположим, что $x \neq x_i$, $i = 0, 1, \dots, n$. Рассмотрим функцию

$$\varphi(t) = f(t) - L_n(t) - K\omega_n(t),$$

где

$$K = \frac{f(x) - L_n(x)}{\omega_n(x)}.$$

Легко убедиться, что при таком выборе K $\varphi(x) = 0$. Кроме того, $\varphi(x_i) = 0$, $i = 0, 1, \dots, n$. Тем самым φ обращается в нуль в $n+2$ различных точках. По теореме Ролля φ' обращается в нуль по крайней мере в $n+1$ различной точке из интервала (a, b) . Последовательно применяя теорему Ролля, получаем, что существует точка $\xi \in (a, b)$, для которой $\varphi^{(n+1)}(\xi) = 0$. Таким образом,

$$\varphi^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - K\omega^{(n+1)}(\xi) = 0 \quad (4.2)$$

(мы используем здесь тот факт, что $n+1$ производная от многочлена степени n тождественно равна нулю). Поскольку

$$\omega^{(n+1)}(t) \equiv (n+1)!,$$

то из (4.2) получаем

$$f^{(n+1)}(\xi) = K(n+1)!.$$

Выражая отсюда K , находим

$$\varphi(t) = f(t) - L_n(t) - \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_n(t).$$

Подставляя в последнее равенство $t = x$ и учитывая, что $\varphi(x) = 0$, получаем (4.1). Теорема доказана. \square

СЛЕДСТВИЕ 4.1. Пусть $f \in C^{n+1}[a, b]$ и

$$M_{n+1} = \max_{x \in [a, b]} |f^{(n+1)}(x)|. \quad (4.3)$$

Тогда для всех $x \in [a, b]$

$$|f(x) - L_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega_n(x)|.$$

Отсюда сразу же следует оценка

$$\max_{x \in [a, b]} |f(x) - L_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \max_{x \in [a, b]} |\omega_n(x)|. \quad (4.4)$$

ПРИМЕР 4.1. В предположении, что $f \in C^4[-1, 3]$, оценить погрешность приближения $f(2) \approx -\frac{1}{4}$ из примера 3.1 через максимум модуля четвертой производной M_4 .

РЕШЕНИЕ. Из следствия 4.1 получаем

$$|f(x) - L_3(x)| \leq \frac{M_4}{4!} |(x+1)x(x-1)(x-3)|.$$

Таким образом, подставляя $x = 2$, имеем

$$\left| f(2) + \frac{1}{4} \right| = |f(2) - L_3(2)| \leq \frac{M_4}{4}.$$

5. Интерполяция с равноотстоящими узлами

Пусть $x_i = x_0 + ih$, $i = 0, 1, \dots, n$, — узлы интерполяции и $h > 0$. Такие узлы называются *равноотстоящими узлами* или *равномерной сеткой*. При этом число h называется *шагом* сетки. При интерполяции по равномерной сетке удобно ввести новую переменную

$$q = \frac{x - x_0}{h}.$$

Тогда $x = x_0 + qh$ и, кроме того,

$$x - x_i = x_0 + qh - (x_0 + ih) = h(q - i),$$

$$x_j - x_i = h(j - i).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} l_{nj}(x_0 + qh) &= \prod_{i \neq j} \frac{x - x_i}{x_j - x_i} = \prod_{i \neq j} \frac{q - i}{j - i} \\ &= \frac{q(q-1) \dots (q-j+1)(q-j-1) \dots (q-n)}{j(j-1) \dots 2 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot (-2) \dots (j-n)} \\ &= (-1)^{n-j} \frac{q(q-1) \dots (q-j+1)(q-j-1) \dots (q-n)}{j!(n-j)!}. \end{aligned}$$

Следовательно, многочлен Лагранжа для равноотстоящих узлов может быть записан в виде

$$\begin{aligned} L_n(x_0 + qh) &= \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \frac{q(q-1) \dots (q-j+1)(q-j-1) \dots (q-n)}{j!(n-j)!} f(x_j). \end{aligned} \quad (5.1)$$

ПРИМЕР 5.1. Написать многочлен Лагранжа второй степени для равноотстоящих узлов с шагом h .

РЕШЕНИЕ. При $n = 2$ из (5.1) находим

$$L_2(x_0 + qh) = \frac{(q-1)(q-2)}{2}f(x_0) - q(q-2)f(x_1) + \frac{q(q-1)}{2}f(x_2).$$

Оценим теперь погрешность, возникающую при замене функции на ее интерполяционный многочлен Лагранжа, когда значения функции заданы в равноотстоящих узлах. Для функции $\omega_n(x)$ имеем

$$\omega_n(x_0 + qh) = h^{n+1}q(q-1)\dots(q-n).$$

Если $x \in [x_0, x_n]$, то $q \in [0, n]$. Положим

$$\Omega_n = \max_{q \in [0, n]} |q(q-1)\dots(q-n)|.$$

Тогда из (4.4) получаем

$$\max_{x \in [x_0, x_n]} |f(x) - L_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} h^{n+1} \Omega_n. \quad (5.2)$$

Значения Ω_n при $n = 1, 2, 3$ могут быть легко посчитаны:

$$\Omega_1 = \frac{1}{4}, \quad \Omega_2 = \frac{2\sqrt{3}}{9}, \quad \Omega_3 = 1. \quad (5.3)$$

ПРИМЕР 5.2. С каким шагом надо затабулировать функцию $\sin x$, чтобы при использовании интерполяционного многочлена второй степени по ближайшим точкам погрешность аппроксимации не превосходила $0,5 \cdot 10^{-6}$?

РЕШЕНИЕ. Для $f(x) = \sin x$ $f'''(x) = -\cos x$. Поэтому $M_3 \leq 1$. Из (5.2) и (5.3) имеем

$$|f(x) - L_2(x)| \leq \frac{1}{3!} \frac{2\sqrt{3}}{9} h^3.$$

Таким образом, достаточно, чтобы шаг h удовлетворял неравенству

$$\frac{1}{3!} \frac{2\sqrt{3}}{9} h^3 \leq 0,5 \cdot 10^{-6}.$$

Отсюда

$$h \leq \sqrt[3]{\frac{3\sqrt{3}}{2}} \cdot 10^{-2} \approx 1,37 \cdot 10^{-2}.$$

6. Минимизация оценки погрешности интерполяции. Многочлены Чебышева

Пусть имеется функция $f \in C^{n+1}[a, b]$ и известна величина M_{n+1} (см. (4.3)) или оценка этой величины. Как выбрать узлы на отрезке $[a, b]$, чтобы значение

$$\max_{x \in [a, b]} |\omega_n(x)|$$

было минимальным?

Рассмотрим для простоты случай, когда $[a, b] = [-1, 1]$. Для этой задачи нам потребуются некоторые специальные многочлены. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Многочленами Чебышева* называются многочлены, задаваемые на отрезке $[-1, 1]$ равенством

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x). \quad (6.1)$$

Легко найти многочлены Чебышева для $n = 0, 1$ и 2 . Действительно,

$$T_0(x) = 1,$$

$$T_1(x) = \cos(\arccos x) = x,$$

$$T_2(x) = \cos(2 \arccos x) = 2 \cos^2(\arccos x) - 1 = 2x^2 - 1.$$

Проверим, что функции, задаваемые формулой (6.1), действительно являются многочленами степени n . Из известных тригонометрических равенств находим

$$\cos(n+1)\varphi + \cos(n-1)\varphi = 2 \cos \varphi \cos n\varphi.$$

Отсюда

$$\cos(n+1)\varphi = 2 \cos \varphi \cos n\varphi - \cos(n-1)\varphi.$$

Полагая $\varphi = \arccos x$, получаем

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.2)$$

Следовательно,

$$T_3(x) = 2xT_2(x) - T_1(x) = 2x(2x^2 - 1) - x = 4x^3 - 3x,$$

$$T_4(x) = 2xT_3(x) - T_2(x) = 2x(4x^3 - 3x) - (2x^2 - 1) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

и т.д. Рекуррентная формула (6.2) является удобным и эффективным способом вычисления значений многочленов Чебышева.

Отметим ряд свойств многочленов Чебышева.

1. Если n — четное, то $T_n(x)$ — четная функция, если n — нечетное, то $T_n(x)$ — нечетная функция.
2. Для старшего коэффициента многочлена $T_n(x)$ справедливо равенство

$$a_n = 2^{n-1}.$$

3. $T_n(x)$ имеет n различных действительных корней, лежащих в интервале $(-1, 1)$

$$x_i = \cos \frac{(2i-1)\pi}{2n}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

- 4.

$$\max_{x \in [-1, 1]} |T_n(x)| = 1,$$

причем максимум достигается в $n + 1$ точке

$$x_i = \cos \frac{i\pi}{n}, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (6.3)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Многочлен

$$\bar{T}_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x)$$

называется *нормированным многочленом Чебышева* (у него старший коэффициент равен единице).

ТЕОРЕМА 6.1. Для любого многочлена $P_n(x)$ степени n со старшим коэффициентом, равным единице, справедливо неравенство

$$\max_{x \in [-1, 1]} |P_n(x)| \geq \max_{x \in [-1, 1]} |\bar{T}_n(x)| = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что нашелся многочлен $P_n(x)$ со старшим коэффициентом, равным единице, для которого

$$\max_{x \in [-1, 1]} |P_n(x)| < \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Рассмотрим многочлен

$$R(x) = \bar{T}_n(x) - P_n(x).$$

В силу того, что у $\bar{T}_n(x)$ и $P_n(x)$ старшие коэффициенты равны единице, многочлен $R(x)$ имеет степень $n - 1$. Для точек x_i , определенных равенствами (6.3), имеем

$$R(x_i) = \frac{(-1)^i}{2^{n-1}} - P_n(x_i) = (-1)^i \left(\frac{1}{2^{n-1}} - (-1)^i P_n(x_i) \right) = (-1)^i \varepsilon_i,$$

где $\varepsilon_i > 0$, $i = 0, 1, \dots, n$. Таким образом, у многочлена $R(x)$ на каждом из интервалов (x_{i-1}, x_i) , $i = 1, \dots, n$, имеется хотя бы один нуль. Следовательно, у $R(x)$ по крайней мере n нулей, что невозможно, так как $R(x)$ многочлен степени $n - 1$. Теорема доказана. \square

Благодаря свойству, доказанному в теореме 6.1, многочлены Чебышева называют *многочленами, наименее уклоняющимися от нуля*.

По доказанной теореме для любых точек x_0, \dots, x_n из отрезка $[-1, 1]$ имеем

$$\max_{x \in [-1, 1]} |\omega_n(x)| \geq \frac{1}{2^n}$$

(напомним, что $\omega_n(x)$ — многочлен степени $n + 1$). С другой стороны, положив

$$x_i = \cos \frac{(2i + 1)\pi}{2(n + 1)}, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad (6.4)$$

будем иметь

$$\omega_n(x) = \bar{T}_{n+1}(x)$$

и, следовательно,

$$\max_{x \in [-1, 1]} |\omega_n(x)| = \frac{1}{2^n}.$$

Таким образом, оценка (4.4) достигает своего минимума, когда в качестве узлов интерполяции выбраны нули многочлена Чебышева (*чебышевские узлы*). При этом она имеет вид

$$\max_{x \in [-1, 1]} |f(x) - L_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n + 1)!2^n}. \quad (6.5)$$

В силу этого свойства узлы (6.4) называются *оптимальными узлами интерполяции*.

В случае интерполяции по чебышевским узлам многочлен Лагранжа можно упростить. Так как

$$\omega_n(x) = \bar{T}_{n+1}(x) = \frac{1}{2^n} T_{n+1}(x),$$

то

$$\omega'_n(x) = \frac{1}{2^n} T'_{n+1}(x) = \frac{(n + 1) \sin((n + 1) \arccos x)}{2^n \sqrt{1 - x^2}}.$$

Поэтому

$$\omega'_n(x_i) = \frac{(n + 1) \sin \frac{2i + 1}{2} \pi}{2^n \sin \frac{(2i + 1)}{2(n + 1)} \pi} = (-1)^i \frac{n + 1}{2^n \sin \frac{(2i + 1)}{2(n + 1)} \pi}.$$

Таким образом, из (3.4) получаем

$$L_n(x) = \frac{T_{n+1}(x)}{n + 1} \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{\sin \frac{(2i + 1)}{2(n + 1)} \pi}{x - x_i} f(x_i).$$

Случай интерполяции на произвольном отрезке $[a, b]$ можно свести к отрезку $[-1, 1]$ с помощью замены переменной

$$t = \frac{b - a}{2} x + \frac{b + a}{2}.$$

При этом оптимальные узлы интерполяции переходят в оптимальные узлы на отрезке $[a, b]$

$$t_i = \frac{b-a}{2} \cos \frac{2i+1}{2(n+1)}\pi + \frac{b+a}{2}, \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

а оценка (4.4) будет иметь вид

$$\max_{t \in [a, b]} |f(t) - L_n(t)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}}.$$

Для произвольного отрезка $[a, b]$ интерполяционный многочлен Лагранжа по оптимальным узлам запишется в виде

$$L_n(t) = \frac{b-a}{2} \frac{T_{n+1} \left(\frac{2t-a-b}{b-a} \right)}{n+1} \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{\sin \frac{(2i+1)\pi}{2(n+1)}}{t-t_i} f(t_i).$$

7. Интерполяционный многочлен Ньютона

Пусть $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$ — произвольные различные точки.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Число

$$f(x_i; x_{i+1}) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

называется *разделенной разностью первого порядка*.

Очевидно, что $f(x_i; x_{i+1}) = f(x_{i+1}; x_i)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Разделенной разностью n -го порядка* называется величина

$$f(x_i; x_{i+1}; \dots; x_{i+n}) = \frac{f(x_{i+1}; \dots; x_{i+n}) - f(x_i; x_{i+1}; \dots; x_{i+n-1})}{x_{i+n} - x_i}.$$

При вычислении разделенные разности удобно записывать в виде следующей таблицы

x_0	$f(x_0)$				
x_1	$f(x_1)$	$f(x_0; x_1)$			
x_2	$f(x_2)$	$f(x_1; x_2)$	$f(x_0; x_1; x_2)$		
x_3	$f(x_3)$	$f(x_2; x_3)$	$f(x_1; x_2; x_3)$	$f(x_0; x_1; x_2; x_3)$	
x_4	$f(x_4)$	$f(x_3; x_4)$	$f(x_2; x_3; x_4)$	$f(x_1; x_2; x_3; x_4)$	$f(x_0; x_1; x_2; x_3; x_4)$

ЛЕММА 7.1. *Имеет место равенство*

$$f(x_0; \dots; x_k) = \sum_{j=0}^k \frac{f(x_j)}{\prod_{i \neq j} (x_j - x_i)}. \quad (7.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко проверить, что при $k = 1$ это равенство совпадает с определением величины $f(x_0; x_1)$. Воспользуемся методом математической индукции. Предположим, что (7.1) доказано для всех $k \leq l$. Тогда

$$\begin{aligned} f(x_0; \dots; x_{l+1}) &= \frac{f(x_1; \dots; x_{l+1}) - f(x_0; \dots; x_l)}{x_{l+1} - x_0} \\ &= \frac{1}{x_{l+1} - x_0} \left(\sum_{j=1}^{l+1} \frac{f(x_j)}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{l+1} (x_j - x_i)} - \sum_{j=0}^l \frac{f(x_j)}{\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^l (x_j - x_i)} \right). \end{aligned}$$

Пусть $j \neq 0, l+1$. Тогда коэффициент при $f(x_j)$ в правой части последнего равенства есть

$$\begin{aligned} \frac{1}{x_{l+1} - x_0} \left(\frac{1}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{l+1} (x_j - x_i)} - \frac{1}{\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^l (x_j - x_i)} \right) \\ = \frac{(x_j - x_0) - (x_j - x_{l+1})}{(x_{l+1} - x_0) \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{l+1} (x_j - x_i)} = \frac{1}{\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{l+1} (x_j - x_i)}, \end{aligned}$$

т.е. имеет требуемый вид. При $j = 0$ или $l+1$ $f(x_j)$ входит только в одно слагаемое и нетрудно убедиться, что коэффициент при нем имеет также требуемый вид. Лемма доказана. \square

Из доказанной леммы вытекает, что разделенная разность есть симметрическая функция своих аргументов x_0, \dots, x_k , т.е. не меняется при любой их перестановке.

При помощи разделенных разностей можно получить другую форму записи интерполяционного многочлена.

ТЕОРЕМА 7.1. *Для интерполяционного многочлена справедливо представление*

$$\begin{aligned} L_n(x) &= f(x_0) + f(x_0; x_1)(x - x_0) + \dots \\ &\quad + f(x_0; x_1; \dots; x_n)(x - x_0) \dots (x - x_{n-1}). \end{aligned} \quad (7.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенств (3.4) и (7.1) имеем

$$\begin{aligned} f(x) - L_n(x) &= f(x) - \omega_n(x) \sum_{j=0}^n \frac{f(x_j)}{(x - x_j) \prod_{i \neq j} (x_j - x_i)} \\ &= \omega_n(x) \left(\frac{f(x)}{\omega_n(x)} + \sum_{j=0}^n \frac{f(x_j)}{(x_j - x) \prod_{i \neq j} (x_j - x_i)} \right). \end{aligned} \quad (7.3)$$

Из леммы 7.1 следует, что выражение в скобках есть $f(x; x_0; \dots; x_n)$. Таким образом,

$$f(x) - L_n(x) = f(x; x_0; \dots; x_n) \omega_n(x).$$

Интерполяционный многочлен $L_n(x)$ можно представить в виде

$$L_n(x) = L_0(x) + (L_1(x) - L_0(x)) + \dots + (L_n(x) - L_{n-1}(x)). \quad (7.4)$$

Разность $L_k(x) - L_{k-1}(x)$ есть многочлен степени k , который обращается в нуль в точках x_0, \dots, x_{k-1} , так как

$$f(x_j) = L_k(x_j) = L_{k-1}(x_j), \quad j = 0, 1, \dots, k-1.$$

Следовательно,

$$L_k(x) - L_{k-1}(x_k) = A_k(x - x_0) \dots (x - x_{k-1}) = A_k \omega_{k-1}(x). \quad (7.5)$$

Подставим в это равенство $x = x_k$ и воспользуемся тем, что $L_k(x_k) = f(x_k)$. Будем иметь

$$f(x_k) - L_{k-1}(x_k) = A_k \omega_{k-1}(x_k).$$

С другой стороны, подставим в (7.3) $x = x_k$ при $n = k-1$, получаем

$$f(x_k) - L_{k-1}(x_k) = f(x_k; x_0; \dots; x_{k-1}) \omega_{k-1}(x_k).$$

Тем самым, учитывая свойство симметрии разделенных разностей, находим

$$A_k = f(x_0; x_1; \dots; x_k).$$

Теперь утверждение теоремы вытекает из представления (7.4) и равенства (7.5). Теорема доказана. \square

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Интерполяционный многочлен, записанный в виде (7.2) называется *интерполяционным многочленом Ньютона*.

Интерполяционный многочлен Ньютона имеет одно важное преимущество по сравнению с интерполяционным многочленом Лагранжа. Если к узлам интерполяции добавить еще одну точку x_{n+1} , то интерполяционный многочлен Лагранжа надо строить заново, а к интерполяционному многочлену Ньютона в силу равенства (см. (7.5))

$$L_{n+1}(x) = L_n(x) + f(x_0; x_1; \dots; x_{n+1})(x - x_0) \dots (x - x_n)$$

следует добавить лишь одно слагаемое. Тем не менее, ряд вычислений все же надо провести, чтобы найти разделенную разность $f(x_0; x_1; \dots; x_{n+1})$.

8. Интерполяционный многочлен Ньютона для равноотстоящих узлов

Пусть $x_i = x_0 + ih$ — равномерная сетка с шагом h и $f_i = f(x_i)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Конечной разностью первого порядка функции f в точке x_i называется величина

$$\Delta f_i = f(x_i + h) - f(x_i) = f_{i+1} - f_i.$$

Конечной разностью n -го порядка функции f в точке x_i называется величина

$$\Delta^n f_i = \Delta(\Delta^{n-1} f_i) = \Delta^{n-1} f_{i+1} - \Delta^{n-1} f_i.$$

Например,

$$\Delta^2 f_i = \Delta f_{i+1} - \Delta f_i = f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i.$$

При вычислении конечные разности удобно располагать в таблице

x_0	f_0				
x_1	f_1	Δf_0			
x_2	f_2	Δf_1	$\Delta^2 f_0$		
x_3	f_3	Δf_2	$\Delta^2 f_1$	$\Delta^3 f_0$	
x_4	f_4	Δf_3	$\Delta^2 f_2$	$\Delta^3 f_1$	$\Delta^4 f_0$

ЛЕММА 8.1. Для равномерной сетки $x_i = x_0 + ih$ имеет место равенство

$$f(x_0; x_1; \dots; x_n) = \frac{\Delta^n f_0}{n!h^n}. \quad (8.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем доказывать это равенство по индукции. При $n = 1$ получаем

$$f(x_0; x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f_1 - f_0}{h} = \frac{\Delta f_0}{h}.$$

Пусть равенство (8.1) доказано для $n-1$. Докажем его для n . Имеем

$$\begin{aligned} f(x_0; x_1; \dots; x_n) &= \frac{f(x_1; \dots; x_n) - f(x_0; \dots; x_{n-1})}{x_n - x_0} \\ &= \frac{1}{nh} \left(\frac{\Delta^{n-1} f_1}{(n-1)!h^{n-1}} - \frac{\Delta^{n-1} f_0}{(n-1)!h^{n-1}} \right) = \frac{\Delta^n f_0}{n!h^n}. \end{aligned}$$

Лемма доказана. □

Пусть имеется равномерная сетка $x_i = x_0 + ih$, $i = 0, 1, \dots, n$. Введем переменную

$$q = \frac{x - x_0}{h}.$$

Тогда $x - x_i = h(q - i)$ и в силу леммы 8.1 для интерполяционного многочлена Ньютона (см. (7.2)) получаем представление

$$L_n(x_0 + qh) = f_0 + q\Delta f_0 + q(q-1)\frac{\Delta^2 f_0}{2!} + \dots + q(q-1)\dots(q-n+1)\frac{\Delta^n f_0}{n!}. \quad (8.2)$$

Этот многочлен называется интерполяционным многочленом Ньютона для *интерполяции вперед*. Им удобно пользоваться для x близких к x_0 .

Можно рассматривать сетку, идущую влево от точки x_0

$$x_{-i} = x_0 - ih, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Тогда аналогично равенству (8.1) получаем

$$f(x_0; x_{-1}; \dots; x_{-k}) = \frac{\Delta^k f_{-k}}{k!h^k}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Следовательно, для интерполяционного многочлена Ньютона

$$L_n(x) = f(x_0) + f(x_0; x_{-1})(x - x_0) + \dots + f(x_0; x_{-1}; \dots; x_{-n})(x - x_0)(x - x_{-1})\dots(x - x_{-n+1})$$

имеем представление

$$L_n(x_0 + qh) = f_0 + q\Delta f_{-1} + q(q+1)\frac{\Delta^2 f_{-2}}{2!} + \dots + q(q+1)\dots(q+n-1)\frac{\Delta^n f_{-n}}{n!}. \quad (8.3)$$

Этот многочлен называется интерполяционным многочленом Ньютона для *интерполяции назад*. Он используется для интерполяции в конце таблицы. При этом конечные разности удобно получать, пользуясь таблицей

x_{-4}	f_{-4}				
x_{-3}	f_{-3}	Δf_{-4}	$\Delta^2 f_{-4}$	$\Delta^3 f_{-4}$	$\Delta^4 f_{-4}$
x_{-2}	f_{-2}	Δf_{-3}	$\Delta^2 f_{-3}$	$\Delta^3 f_{-3}$	
x_{-1}	f_{-1}	Δf_{-2}	$\Delta^2 f_{-2}$		
x_0	f_0	Δf_{-1}			

ПРИМЕР 8.1. Пусть задана таблица для функции $f(x) = \sin x$ и ее конечных разностей

x	$f(x)$	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$
5°	0,08716				
10°	0,17365	8649			
15°	0,25882	8517	-132		
20°	0,34202	8320	-197	-65	
25°	0,42262	8060	-260	-63	2

Найти приближенные значения $\sin 8^\circ$ и $\sin 22^\circ$ с помощью интерполяционных многочленов Ньютона 1, 2, 3 и 4-ой степеней.

РЕШЕНИЕ. Найдем сначала приближенное значение $\sin 8^\circ$. У нас заданы значения синуса в равномерной сетке $x_i = x_0 + ih$, где $x_0 = 5^\circ$. Поскольку

$$q = \frac{x - x_0}{h} = \frac{8^\circ - 5^\circ}{5^\circ} = 0,6,$$

то

$$L_1(x_0 + qh) = f_0 + q\Delta f_0 = 0,139054,$$

$$L_2(x_0 + qh) = L_1(x_0 + qh) + q(q-1)\frac{\Delta^2 f_0}{2!} = 0,139212,$$

$$L_3(x_0 + qh) = L_2(x_0 + qh) + q(q-1)(q-2)\frac{\Delta^3 f_0}{3!} = 0,139176,$$

$$L_4(x_0 + qh) = L_3(x_0 + qh) + q(q-1)(q-2)(q-3)\frac{\Delta^4 f_0}{4!} = 0,139175.$$

В силу того, что $\sin 8^\circ = 0,13917309\dots$, для погрешностей полученных приближений справедливы равенства

$$\varepsilon_1 = 1,19 \cdot 10^{-4},$$

$$\varepsilon_2 = 3,89 \cdot 10^{-5},$$

$$\varepsilon_3 = 2,91 \cdot 10^{-6},$$

$$\varepsilon_4 = 1,91 \cdot 10^{-6}.$$

Найдем теперь приближенное значение $\sin 22^\circ$. Для этого воспользуемся интерполяционным многочленом Ньютона для интерполяции назад. Положим $x_0 = 25^\circ$, $h = 5^\circ$ и $x_{-i} = x_0 - ih$, $i = 0, 1, \dots, 4$. Тогда

$$q = \frac{x - x_0}{h} = -0,6.$$

Аналогично предыдущему случаю получаем

$$L_1(x_0 + qh) = f_0 + q\Delta f_{-1} = 0,374260,$$

$$L_2(x_0 + qh) = L_1(x_0 + qh) + q(q+1)\frac{\Delta^2 f_{-1}}{2!} = 0,37745772,$$

$$L_3(x_0 + qh) = L_2(x_0 + qh) + q(q+1)(q+2)\frac{\Delta^3 f_{-1}}{3!} = 0,37460728,$$

$$L_4(x_0 + qh) = L_3(x_0 + qh) + q(q+1)(q+2)(q+3)\frac{\Delta^4 f_{-1}}{4!} = 0,374606608.$$

Для сравнения приведем значение $\sin 22^\circ$ с точностью до девяти знаков

$$\sin 22^\circ = 0,374606593.$$

Тем самым для погрешности полученных приближений справедливы равенства

$$\varepsilon_1 = 3,47 \cdot 10^{-4},$$

$$\varepsilon_2 = 3,46 \cdot 10^{-5},$$

$$\varepsilon_3 = 6,87 \cdot 10^{-7},$$

$$\varepsilon_4 = 1,46 \cdot 10^{-8}.$$

ЧИСЛЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

9. Формулы численного дифференцирования, получаемые с помощью формулы Тейлора

Напомним, что производной функции $f(x)$ в точке x называется величина

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow x} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Если производную не удастся вычислить точно или это слишком сложно сделать, то пользуются приближенными формулами, использующими значения функции в некоторых точках. Эти формулы называются *формулами численного дифференцирования*. Например,

$$f'(x) \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Оценим погрешность этой простейшей формулы численного дифференцирования. Обычно для оценки погрешности предполагается существование у функции некоторых производных более высокого порядка, чем искомая производная. Рассмотрим равномерную

сетку с шагом $h > 0$ $x_i = x_0 + ih$, $i = 0, \pm 1, \dots$. Положим $f_i = f(x_i)$ и $f'_i = f'(x_i)$. Если $f \in C^2[x_0, x_1]$, то по формуле Тейлора

$$f_1 = f_0 + f'_0(x_1 - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x_1 - x_0)^2,$$

где $\xi \in (x_0, x_1)$. Отсюда, учитывая, что $x_1 - x_0 = h$, находим

$$f'_0 = \frac{f_1 - f_0}{h} - \frac{f''(\xi)}{2}h.$$

Таким образом,

$$\left| f'_0 - \frac{f_1 - f_0}{h} \right| \leq \frac{M_2}{2}h. \quad (9.1)$$

Итак, мы получили одну из простейших формул численного дифференцирования

$$f'_0 \approx \frac{f_1 - f_0}{h} \quad (9.2)$$

с оценкой погрешности (9.1).

Пусть теперь $f \in C^2[x_{-1}, x_1]$. Тогда по формуле Тейлора

$$\begin{aligned} f_1 &= f_0 + f'_0 h + \frac{f''_0}{2!}h^2 + \frac{f'''(\xi_1)}{3!}h^3, \\ f_{-1} &= f_0 - f'_0 h + \frac{f''_0}{2!}h^2 - \frac{f'''(\xi_2)}{3!}h^3, \end{aligned}$$

где $\xi_1, \xi_2 \in (x_{-1}, x_1)$. Вычитая из первого равенства второе, находим

$$f_1 - f_{-1} = 2f'_0 h + \frac{h^3}{6}(f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)).$$

Отсюда

$$f'_0 = \frac{f_1 - f_{-1}}{2h} - \frac{h^2}{12}(f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)).$$

Следовательно,

$$\left| f'_0 - \frac{f_1 - f_{-1}}{2h} \right| \leq \frac{h^2}{6}M_3. \quad (9.3)$$

Тем самым получена еще одна формула численного дифференцирования

$$f'_0 \approx \frac{f_1 - f_{-1}}{2h} \quad (9.4)$$

с оценкой погрешности (9.3).

Пусть, наконец, $f \in C^4[x_{-1}, x_1]$. Тогда

$$\begin{aligned} f_1 &= f_0 + f'_0 h + \frac{f''_0}{2!}h^2 + \frac{f'''_0}{3!}h^3 + \frac{f^{(4)}(\xi_1)}{4!}h^4, \\ f_{-1} &= f_0 - f'_0 h + \frac{f''_0}{2!}h^2 - \frac{f'''_0}{3!}h^3 + \frac{f^{(4)}(\xi_2)}{4!}h^4. \end{aligned}$$

Сложив эти равенства, находим

$$f_1 - 2f_0 + f_{-1} = f''_0 h^2 + \frac{h^4}{4!}(f^{(4)}(\xi_1) + f^{(4)}(\xi_2)).$$

Отсюда

$$f_0'' = \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2} - \frac{h^2}{24}(f^{(4)}(\xi_1) + f^{(4)}(\xi_2)).$$

Следовательно,

$$f_0'' \approx \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2}. \quad (9.5)$$

При этом для погрешности этой формулы численного дифференцирования справедлива оценка

$$\left| f_0'' - \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2} \right| \leq \frac{h^2}{12} M_4. \quad (9.6)$$

10. Оптимальный выбор шага

Из оценок погрешностей (9.1), (9.3) и (9.6) вытекает, что выбирая достаточно малое значение шага h , можно сколь угодно точно вычислить значение производных. Однако при практическом вычислении производных с помощью формул численного дифференцирования шаг не берется слишком маленьким. Связано это с тем, что реально значения функций всегда известны с некоторой погрешностью.

Рассмотрим для примера вычисление производной по формуле (9.2), в которой вместо точных значений f_0 и f_1 используются приближенные значения

$$\tilde{f}_0 = f_0 + \delta_0, \quad \tilde{f}_1 = f_1 + \delta_1.$$

Предположим, что $|\delta_0| \leq \delta$ и $|\delta_1| \leq \delta$ (в этом случае говорят, что значения функции *вычислены с погрешностью* δ). Тогда в качестве приближения к f_0' мы вычисляем

$$f_0' \approx \frac{\tilde{f}_1 - \tilde{f}_0}{h} = \frac{f_1 - f_0}{h} + \frac{\delta_1 - \delta_0}{h}.$$

Для погрешности такого приближения имеем оценку

$$\left| f_0' - \frac{\tilde{f}_1 - \tilde{f}_0}{h} \right| \leq \left| f_0' - \frac{f_1 - f_0}{h} \right| + \left| \frac{\delta_1 - \delta_0}{h} \right| \leq \frac{M_2}{2} h + \frac{2\delta}{h} = \varphi(h).$$

При каком шаге h оценка такого приближения будет минимальной? Поскольку

$$\varphi'(h) = \frac{M_2}{2} - \frac{2\delta}{h^2},$$

то легко убедиться, что функция $\varphi(h)$ при $h > 0$ имеет единственный минимум

$$h_0 = 2\sqrt{\frac{\delta}{M_2}}.$$

Этот шаг является оптимальным для формулы (9.1) при вычислении функции с погрешностью δ .

ЗАДАЧА. Найти оптимальный шаг для формул (9.4) и (9.5).

11. Формулы численного дифференцирования, получаемые с помощью интерполяционного многочлена Лагранжа

Один из универсальных способов построения формул численного дифференцирования состоит в том, что по значениям функции f в некоторых узлах x_0, x_1, \dots, x_n строят интерполяционный многочлен Лагранжа $L_n(x)$ и приближенно полагают

$$f^{(m)}(x) \approx L_n^{(m)}(x).$$

Наиболее часто встречается случай, когда узлы распределены равномерно: $x_i = x_0 + ih$, $h > 0$. Будем по-прежнему пользоваться обозначением $f_i = f(x_i)$. Тогда (см. (5.1))

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \frac{q(q-1)\dots(q-i+1)(q-i-1)\dots(q-n)}{i!(n-i)!} f_i,$$

$$f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} h^{n+1} \Omega_n(q),$$

где

$$x = x_0 + qh, \quad \Omega_n(q) = q(q-1)\dots(q-n).$$

Поскольку $\frac{dq}{dx} = \frac{1}{h}$, то $\frac{d}{dx} = \frac{1}{h} \frac{d}{dq}$ и

$$f'(x) \approx L'_n(x) = \frac{1}{h} \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \times \frac{d}{dq} (q(q-1)\dots(q-i+1)(q-i-1)\dots(q-n)) f_i.$$

Оценим погрешность такого приближения. Имеем

$$f'(x) - L'_n(x) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \left(\Omega_n(q) \frac{d}{dx} f^{(n+1)}(\xi) + f^{(n+1)}(\xi) \frac{1}{h} \frac{d}{dq} \Omega_n(q) \right).$$

В случае, когда оценивается погрешность приближенного вычисления производной в узле x_i , $q = i$ и $\Omega_n(q) = 0$. Следовательно,

$$f'(x_i) - L'_n(x_i) = \frac{h^n}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \frac{d}{dq} \Omega_n(q) \Big|_{q=i}.$$

Отсюда, положив $f'_i = f'(x_i)$, получаем

$$|f'_i - L'_n(x_i)| \leq \frac{M_{n+1} h^n}{(n+1)!} \frac{d}{dq} \Omega_n(q) \Big|_{q=i}. \quad (11.1)$$

ПРИМЕРЫ. При $n = 2$ (см. пример 5.1) имеем

$$L_2(x_0 + qh) = \frac{(q-1)(q-2)}{2} f_0 - q(q-2) f_1 + \frac{q(q-1)}{2} f_2.$$

Тем самым

$$f'(x_0 + qh) \approx L_2'(x_0 + qh) = \frac{(2q - 3)f_0 - 4(q - 1)f_1 + (2q - 1)f_2}{2h}.$$

Учитывая (11.1) и то, что $\Omega_2(q) = q(q - 1)(q - 2)$, получаем:

1. $q = 0$

$$\left| f_0' - \frac{-3f_0 + 4f_1 - f_2}{2h} \right| \leq \frac{h^2}{3} M_3.$$

2. $q = 1$

$$\left| f_1' - \frac{f_2 - f_0}{2h} \right| \leq \frac{h^2}{6} M_3.$$

Отметим, что эта формула численного дифференцирования уже была получена с помощью формулы Тейлора (см. (9.3)).

3. $q = 2$

$$\left| f_2' - \frac{f_0 - 4f_1 + 3f_2}{2h} \right| \leq \frac{h^2}{3} M_3.$$

Для второй производной имеем

$$f''(x_0 + qh) \approx L_2''(x_0 + qh) = \frac{f_0 - 2f_1 + f_2}{h^2}.$$

Эта формула численного дифференцирования (и ее оценка) была также получена с помощью формулы Тейлора (см. (9.5)).

Пусть теперь $n = 3$. Тогда

$$L_3(x_0 + qh) = -\frac{(q - 1)(q - 2)(q - 3)}{6} f_0 + \frac{q(q - 2)(q - 3)}{2} f_1 - \frac{q(q - 1)(q - 3)}{2} f_2 + \frac{q(q - 1)(q - 2)}{6} f_3.$$

Таким образом,

$$f'(x_0 + qh) \approx L_3'(x_0 + qh) = -\frac{3q^2 - 12q + 11}{6h} f_0 + \frac{3q^2 - 10q + 6}{2h} f_1 - \frac{3q^2 - 8q + 3}{2h} f_2 + \frac{3q^2 - 6q + 2}{6h} f_3.$$

Отсюда получаем следующие формулы численного дифференцирования:

1. $q = 0$

$$f_0' \approx \frac{-11f_0 + 18f_1 - 9f_2 + 2f_3}{6h};$$

2. $q = 1$

$$f_1' \approx \frac{-2f_0 - 3f_1 + 6f_2 - f_3}{6h};$$

3. $q = 2$

$$f_2' \approx \frac{f_0 - 6f_1 + 3f_2 + 2f_3}{6h};$$

4. $q = 3$

$$f'_3 \approx \frac{-2f_0 + 9f_1 - 18f_2 + 11f_3}{6h}.$$

ЗАДАЧА. Для случаев 1–4 оценить погрешность формул численного дифференцирования.

12. Применение интерполяционного многочлена Ньютона для построения формул численного дифференцирования

В п.7 мы говорили об удобствах, связанных с применением интерполяционного многочлена Ньютона. Пользуясь этим многочленом, можно получать формулы численного дифференцирования, содержащие разделенные разности или конечные разности.

Пусть имеется равномерная сетка $x_i = x_0 + ih$, $i = 0, 1, \dots$. Тогда (см. (8.2))

$$L_n(x_0 + qh) = f_0 + q\Delta f_0 + q(q-1)\frac{\Delta^2 f_0}{2!} + \dots + q(q-1)\dots(q-n+1)\frac{\Delta^n f_0}{n!}.$$

Так как $\frac{d}{dx} = \frac{1}{h} \frac{d}{dq}$, то

$$f'(x_0 + qh) \approx L'_n(x_0 + qh) = \frac{1}{h} \left(\Delta f_0 + (2q-1)\frac{\Delta^2 f_0}{2!} + (3q^2 - 6q + 2)\frac{\Delta^3 f_0}{3!} + \dots + \frac{d}{dq}(q(q-1)\dots(q-n+1))\frac{\Delta^n f_0}{n!} \right).$$

Этой формулой удобно пользоваться при малых q , т.е. в начале таблицы. Аналогичную формулу можно получить, исходя из интерполяционного многочлена Ньютона для интерполяции назад (см. (8.3))

$$f'(x_0 + qh) \approx L'_n(x_0 + qh) = \frac{1}{h} \left(\Delta f_{-1} + (2q+1)\frac{\Delta^2 f_{-2}}{2!} + (3q^2 + 6q + 2)\frac{\Delta^3 f_{-3}}{3!} + \dots + \frac{d}{dq}(q(q+1)\dots(q+n-1))\frac{\Delta^n f_{-n}}{n!} \right),$$

которой удобно пользоваться в конце таблицы.

Таким же образом можно получать формулы численного дифференцирования и для старших производных. Например,

$$f''(x_0 + qh) \approx L''_n(x_0 + qh) = \frac{1}{h^2} \left(\Delta^2 f_0 + (q-1)\Delta^3 f_0 + \dots + \frac{d^2}{dq^2}(q(q-1)\dots(q-n+1))\frac{\Delta^n f_0}{n!} \right).$$

Литература

- [1] Бахвалов Н.С. *Численные методы*. М.: Наука, 1973.
- [2] Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. *Численные методы*. М.: Наука, 1987.
- [3] Березин И.С., Жидков Н.П. *Методы вычислений*. М.: Наука, 1966. Т.1; Физматгиз, 1962. Т.2.
- [4] Волков Е.А. *Численные методы*. М.: Наука, 1982.
- [5] Демидович Б.П., Марон И.А. *Основы вычислительной математики*. М.: Наука, 1966.
- [6] Калиткин Н.Н. *Численные методы*. М.: Наука, 1978.

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ	2
АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИЙ МНОГОЧЛЕНАМИ	2
1. Многочлен Тейлора	2
2. Вычисление значений многочлена. Схема Горнера	4
3. Интерполяционный многочлен Лагранжа	6
4. Погрешность при интерполяции многочленом Лагранжа	7
5. Интерполяция с равноотстоящими узлами	9
6. Минимизация оценки погрешности интерполяции. Многочлены Чебышева	11
7. Интерполяционный многочлен Ньютона	14
8. Интерполяционный многочлен Ньютона для равноотстоящих узлов	17
ЧИСЛЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ	20
9. Формулы численного дифференцирования, получаемые с помощью формулы Тейлора	20
10. Оптимальный выбор шага	22
11. Формулы численного дифференцирования, получаемые с помощью интерполяционного многочлена Лагранжа	23
12. Применение интерполяционного многочлена Ньютона для построения формул численного дифференцирования	25
Литература	26