

## НАИЛУЧШИЕ МЕТОДЫ ПРИБЛИЖЕНИЯ И ПОРЯДОК ИНФОРМАТИВНОСТИ СИСТЕМ

К. Ю. ОСИПЕНКО (МОСКВА)

### §1. Наилучшие методы приближения

Рассмотрим задачу приближения линейного функционала  $L$  на некотором множестве  $W$  из линейного пространства  $X$  по приближенным значениям линейных функционалов  $l_1, \dots, l_n$ . Будем считать, что задано множество функционалов  $\tilde{l}_1, \dots, \tilde{l}_n$  таких, что  $\|\tilde{l}x - lx\| \leq \delta$  при всех  $x \in W$ , где  $\tilde{l}x = (\tilde{l}_1x, \dots, \tilde{l}_nx)$ ,  $lx = (l_1x, \dots, l_nx)$ , а  $\|\cdot\|$  — какая-либо норма в  $\mathbb{R}$ . Обозначим множество таких функционалов через  $A(l, \delta)$ .

В качестве методов приближения будем рассматривать всевозможные функции  $T(y)$ ,  $y \in \mathbb{R}^n$ . Погрешностью наилучшего приближения назовем величину

$$r(l, \delta) = \inf_T \sup_{\tilde{l} \in A(l, \delta)} \sup_{x \in W} |L(x) - T(\tilde{l}x)|.$$

Метод  $T_0$  будем называть наилучшим, если имеет место равенство

$$\sup_{\tilde{l} \in A(l, \delta)} \sup_{x \in W} |L(x) - T_0(\tilde{l}x)| = r(l, \delta).$$

Из результатов работ [1], [2] вытекает

**Теорема 1.** Пусть  $W$  — выпуклое, центрально-симметричное подмножество линейного пространства  $X$  с центром симметрии 0. Тогда при всех  $\delta \geq 0$ :

1) справедливо равенство

$$r(l, \delta) = \sup_{x \in W_\delta} L(x), \text{ где } W_\delta = \{x \in W : \|lx\| \leq \delta\},$$

причем среди наилучших методов приближения существует линейный, т. е. имеющий вид

$$(1) \quad L(x) \approx \sum_{k=1}^n D_k(\delta) \tilde{l}_k(x);$$

2) имеет место соотношение

$$(2) \quad \sup_{x \in W_\delta} L(x) = \min_{D_k} \left\{ \sup_{x \in W} \left| L(x) - \sum_{k=1}^n D_k l_k(x) \right| + \delta \|D\|_* \right\},$$

где

$$(3) \quad \|D\|_* = \sup_{\substack{y \in \mathbb{R}^n \\ \|y\| \leq 1}} \left| \sum_{k=1}^n D_k y_k \right|,$$

а метод (1) является наилучшим тогда и только тогда, когда  $D_1(\delta), \dots, D_n(\delta)$  минимизируют правую часть равенства (2).

Рассмотрим теперь задачу приближения некоторого элемента  $y$  из линейного нормированного пространства  $X$  по приближенным значениям  $x_1, \dots, x_n \in X$ . Зададим в  $\mathbb{R}^n$  норму, удовлетворяющую свойству:  $\|a\| \leq \|b\|$  при  $|a_k| \leq |b_k|$ ,  $k = 1, \dots, n$ . Будем считать, что известны элементы  $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n$  такие, что для любого линейного функционала  $f \in X^*$ ,  $\|f\| \leq 1$ , справедливо неравенство  $\|f\tilde{x} - fx\| \leq \delta$ , где  $f\tilde{x} = (f(\tilde{x}_1), \dots, f(\tilde{x}_n))$ ,  $fx = (f(x_1), \dots, f(x_n))$ . Множество таких элементов  $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n$  обозначим через  $F_1(\delta)$ .

Через  $F_2(\delta)$  обозначим множество элементов  $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n$ , удовлетворяющих неравенству  $\|\rho\| \leq \delta$ , где  $\rho = (\|\tilde{x}_1 - x_1\|, \dots, \|\tilde{x}_n - x_n\|)$ .

Положим

$$(4) \quad R_i(x_1, \dots, x_n, \delta) = \inf_{D_k} \sup_{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n \in F_i(\delta)} \left\| y - \sum_{k=1}^n D_k \tilde{x}_k \right\|, \quad i = 1, 2.$$

В силу очевидного включения  $F_2(\delta) \subset F_1(\delta)$  имеем

$$(5) \quad R_2(x_1, \dots, x_n, \delta) \leq R_1(x_1, \dots, x_n, \delta).$$

В действительности в неравенстве (5) имеет место равенство.

**Теорема 2.** При всех  $\delta \geq 0$ :

1) имеет место равенство

$$R_i(x_1, \dots, x_n, \delta) = \sup_{f \in \Phi_\delta} f(y), \quad i = 1, 2,$$

где  $\Phi_\delta = \{f \in X^* : \|f\| \leq 1, \|fx\| \leq \delta\}$ ,  $fx = (f(x_1), \dots, f(x_n))$ ;

2) справедливо соотношение

$$(6) \quad \sup_{f \in \Phi_\delta} f(y) = \min_{D_k} \left( \left\| y - \sum_{k=1}^n D_k x_k \right\| + \delta \|D\|_* \right),$$

где  $\|D\|_*$  определена равенством (3); кроме того,  $D_1(\delta), \dots, D_n(\delta)$  минимизируют правую часть равенства (4) тогда и только тогда, когда они минимизируют правую часть равенства (6).

*Доказательство.* Докажем, что при всех  $D_1, \dots, D_n$  имеют место равенства

(7)

$$\sup_{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n \in F_i(\delta)} \left\| y - \sum_{k=1}^n D_k \tilde{x}_k \right\| = \sup_{\|\rho\| \leq \delta} \sup_{\substack{f \in X^* \\ \|f\| \leq 1}} \left| f(y) - \sum_{k=1}^n D_k [f(x_k) + \rho_k] \right| \equiv R.$$

В силу равенства

$$\left\| y - \sum_{k=1}^n D_k \tilde{x}_k \right\| = \sup_{\substack{f \in X^* \\ \|f\| \leq 1}} \left| f(y) - \sum_{k=1}^n D_k [f(x_k) + f(\tilde{x}_k - x_k)] \right|$$

и включения  $F_2(\delta) \subset F_1(\delta)$  имеем

$$\sup_{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n \in F_2(\delta)} \left\| y - \sum_{k=1}^n D_k \tilde{x}_k \right\| \leq \sup_{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n \in F_1(\delta)} \left\| y - \sum_{k=1}^n D_k \tilde{x}_k \right\| \leq R.$$

Таким образом, достаточно доказать неравенство

$$(8) \quad R \leq \sup_{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n \in F_2(\delta)} \left\| y - \sum_{k=1}^n D_k \tilde{x}_k \right\|.$$

Для любого  $\varepsilon > 0$  найдутся  $f_\varepsilon \neq 0$ ,  $\|f_\varepsilon\| \leq 1$  и  $\rho^\varepsilon = (\rho_1^\varepsilon, \dots, \rho_n^\varepsilon)$ ,  $\|\rho^\varepsilon\| \leq \delta$ , такие, что

$$\left| f_\varepsilon(y) - \sum_{k=1}^n D_k [f_\varepsilon(x_k) + \rho_k^\varepsilon] \right| > R - \varepsilon.$$

Положим

$$\bar{f}_\varepsilon = \frac{f_\varepsilon}{\|f_\varepsilon\|} \operatorname{sign} \left[ f_\varepsilon(y) - \sum_{k=1}^n D_k f_\varepsilon(x_k) \right].$$

Так как  $\|\bar{f}_\varepsilon\| = 1$ , то найдется такой элемент  $\xi_\varepsilon \in X$ ,  $\|\xi_\varepsilon\| \leq 1$ , что  $\bar{f}_\varepsilon(\xi_\varepsilon) > 1 - \varepsilon$ .

Положим  $\tilde{x}_k^\varepsilon = \bar{\rho}_k^\varepsilon \xi_\varepsilon + x_k$ , где  $\bar{\rho}_k^\varepsilon = -\rho_k^\varepsilon \operatorname{sign} \left( \sum_{k=1}^n D_k \rho_k^\varepsilon \right)$ . Из неравенств  $\|\tilde{x}_k^\varepsilon - x_k\| \leq |\rho_k^\varepsilon|$ ,  $k = 1, \dots, n$ , следует, что  $\tilde{x}_1^\varepsilon, \dots, \tilde{x}_n^\varepsilon \in F_2(\delta)$ . Имеем цепочку соотношений

$$\begin{aligned} & \sup_{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n \in F_2(\delta)} \left\| y - \sum_{k=1}^n D_k \tilde{x}_k \right\| \geq \left\| y - \sum_{k=1}^n D_k \tilde{x}_k^\varepsilon \right\| \\ & \geq \bar{f}_\varepsilon(y) - \sum_{k=1}^n D_k [\bar{f}_\varepsilon(x_k) + \bar{f}_\varepsilon(\xi_\varepsilon) \bar{\rho}_k^\varepsilon] = \left| \bar{f}_\varepsilon(y) - \sum_{k=1}^n D_k \bar{f}_\varepsilon(x_k) \right| \\ & + \bar{f}_\varepsilon(\xi_\varepsilon) \left| \sum_{k=1}^n D_k \bar{\rho}_k^\varepsilon \right| > \left| f_\varepsilon(y) - \sum_{k=1}^n D_k f_\varepsilon(x_k) \right| + \left| \sum_{k=1}^n D_k \rho_k^\varepsilon \right| - \varepsilon \left| \sum_{k=1}^n D_k \rho_k^\varepsilon \right| \\ & \geq \left| f_\varepsilon(y) - \sum_{k=1}^n D_k [f_\varepsilon(x_k) + \rho_k^\varepsilon] \right| - \varepsilon \delta \|D\|_* > R - \varepsilon(1 + \delta \|D\|_*). \end{aligned}$$

В силу произвольности  $\varepsilon > 0$  неравенство (8) доказано, а следовательно, доказаны равенства (7).

Таким образом, имеют место равенства

$$R_i(x_1, \dots, x_n, \delta) = \inf_{D_k} \sup_{\|\rho\| \leq \delta} \sup_{\substack{f \in X^* \\ \|f\| \leq 1}} \left| f(y) - \sum_{k=1}^n D_k [f(x_k) + \rho_k] \right|, \quad i = 1, 2.$$

Применяя теорему 1 к задаче приближения линейного функционала  $L(f) = f(y)$ ,  $f \in X^*$ , по приближенным значениям функционалов  $l_k(f) = f(x_k)$ ,  $k = 1, \dots, n$ , на множестве  $B = \{f \in X^* : \|f\| \leq 1\}$ , получаем утверждение теоремы. Теорема доказана.  $\square$

Из теорем 1, 2 при  $\delta = 0$  вытекают теоремы двойственности, полученные С. М. Никольским [3].

## §2. Порядок информативности систем

Вернемся к задаче приближения линейного функционала  $L$  на множестве  $W$  из линейного пространства  $X$  по приближенным значениям функционалов  $l_1, \dots, l_n$ . Можно рассмотреть задачу приближения функционала  $L$  по приближенным значениям некоторой подсистемы функционалов  $l_\tau = (l_{i_1}, \dots, l_{i_k})$ ,  $\tau = (i_1, \dots, i_k)$ . При этом погрешность наилучшего приближения естественно определить следующим образом:

$$r(l_\tau, \delta) = \inf_T \sup_{\tilde{l} \in A(l, \delta)} \sup_{x \in W} |L(x) - T(P_\tau \tilde{l}x)|,$$

где нижняя грань берется по всевозможным функциям  $T(y)$ ,  $y \in \mathbb{R}^n$ , а  $P_\tau \tilde{l}x = (\tilde{l}_{i_1}(x), \dots, \tilde{l}_{i_k}(x))$ . Для погрешности наилучшего приближения по подсистеме  $l_\tau$  имеем очевидное неравенство

$$(9) \quad r(l_\tau, \delta) \geq r(l, \delta).$$

Может оказаться, что некоторые из функционалов  $l_1, \dots, l_n$  не несут полезной информации в том смысле, что для некоторой подсистемы  $l_\tau$  выполнено равенство  $r(l_\tau, \delta) = r(l, \delta)$ . Обозначим множество всех таких подсистем, включая систему  $l_1, \dots, l_n$ , через  $S(\delta)$ . Если имеет место равенство

$$\inf_{c \in \mathbb{R}} \sup_{x \in W} |L(x) - c| = r(l, \delta),$$

то в множество  $S(\delta)$  войдет пустая подсистема, которую обозначим через  $l_0$ .

Порядком подсистемы назовем число функционалов, входящих в нее. Порядок подсистемы  $l_0$  положим равным нулю. Порядком информативности  $\text{In}(l_1, \dots, l_n, \delta)$  данной системы при фиксированном  $\delta$  будем называть минимальный порядок подсистем, входящих в множество  $S(\delta)$ . Полными информативными системами будем называть подсистемы из множества  $S(\delta)$ , порядок которых равен порядку информативности.

Аналогичные понятия можно ввести для рассмотренной выше задачи приближения элемента  $y$  из линейного нормированного пространства  $X$  по приближенным значениям элементов  $x_1, \dots, x_n$ .

**Лемма.** В условиях теоремы 1 обозначим через  $k(\delta)$  минимальное число отличных от нуля при данном  $\delta$  коэффициентов  $D_j(\delta)$  в линейных наилучших методах приближения  $L(x) \approx \sum_{j=1}^n D_j(\delta) \tilde{l}_j(x)$

функционала  $L$  по системе  $l_1, \dots, l_n$ . Тогда, если норма в определении множества  $A(l, \delta)$  удовлетворяет условию  $\|a\| \leq \|b\|$  при  $|a_k| \leq |b_k|$ ,  $k = 1, \dots, n$ , то для порядка информативности справедливо равенство  $\text{In}(l_1, \dots, l_n, \delta) = k(\delta)$ , а подсистема  $l_\tau = (l_{i_1}, \dots, l_{i_{k(\delta)}})$  является полной информативной системой тогда и только тогда, когда существует линейный наилучший метод приближения  $L(x) \approx \sum_{j=1}^n D_j(\delta) \tilde{l}_j(x)$  по системе  $l_1, \dots, l_n$  такой, что  $D_j(\delta) = 0$ ,  $j \notin \tau$ .

*Доказательство.* Определим норму в пространстве  $\mathbb{R}^k$ ,  $k \leq n$ , следующим образом:  $\|a\|^{(k)} = \|b\|$ , где

$$b_j = \begin{cases} a_j, & j \in \tau, \\ 0, & j \notin \tau. \end{cases}$$

Положим

$$A(l_\tau, \delta) = \{\tilde{l}_\tau : \|\tilde{l}_\tau x - l_\tau x\|^{(k)} \leq \delta \text{ при всех } x \in W\}.$$

В силу свойства нормы в  $\mathbb{R}^n$  справедливо равенство  $A(l_\tau, \delta) = P_\tau A(l, \delta)$ . Таким образом, вследствие теоремы 1 для любой подсистемы  $l_\tau$  существует линейный наилучший метод приближения. Пусть  $r(l_\tau, \delta) = r(l, \delta)$ . Тогда, если  $L(x) \approx \sum_{j \in \tau} D_j(\delta) \tilde{l}_j(x)$  — наилучший метод приближения функционала  $L$  по подсистеме  $l_\tau$ , то, положив  $D_j(\delta) = 0$ , будем иметь

$$\begin{aligned} & \sup_{\tilde{l} \in A(l, \delta)} \sup_{x \in W} \left| L(x) - \sum_{j=1}^n D_j(\delta) \tilde{l}_j(x) \right| \\ &= \sup_{\tilde{l}_\tau \in A(l_\tau, \delta)} \sup_{x \in W} \left| L(x) - \sum_{j \in \tau} D_j(\delta) \tilde{l}_j(x) \right| = r(l_\tau, \delta) = r(l, \delta). \end{aligned}$$

Следовательно, существует линейный наилучший метод приближения по системе  $l_1, \dots, l_n$  такой, что  $D_j(\delta) = 0$ ,  $j \notin \tau$ .

Обратно, если  $L(x) \approx \sum_{j=1}^n D_j(\delta) \tilde{l}_j(x)$  является наилучшим методом приближения и  $D_j(\delta) = 0$ ,  $j \notin \tau$ , то справедливо соотношение

$$\begin{aligned} r(l_\tau, \delta) &\leq \sup_{\tilde{l}_\tau \in A(l_\tau, \delta)} \sup_{x \in W} \left| L(x) - \sum_{j \in \tau} D_j(\delta) \tilde{l}_j(x) \right| \\ &= \sup_{\tilde{l} \in A(l, \delta)} \sup_{x \in W} \left| L(x) - \sum_{j=1}^n D_j(\delta) \tilde{l}_j(x) \right| = r(l, \delta). \end{aligned}$$

В силу неравенства (9) имеем:  $r(l_\tau, \delta) = r(l, \delta)$ . Тем самым равенство  $r(l_\tau, \delta) = r(l, \delta)$  имеет место тогда и только тогда, когда существует линейный наилучший метод приближения  $L(x) \approx \sum_{j=1}^n D_j(\delta) \tilde{l}_j(x)$  такой, что  $D_j(\delta) = 0$ ,  $j \notin \tau$ . Лемма доказана.  $\square$

Пусть  $X$  — гильбертово пространство. Будем рассматривать задачи нахождения линейного наилучшего метода приближения линейного функционала  $L$  на множестве  $B = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$  по приближенным значениям функционалов из множества  $A(l, \delta)$ , его погрешности и порядка информативности системы  $l_1, \dots, l_n$ . Заметим, что в силу общего вида линейного функционала в гильбертовом пространстве рассматриваемые задачи эквивалентны соответствующим задачам для приближения элемента  $y \in X$  по приближенным значениям  $x_1, \dots, x_n$  из множеств  $F_1(\delta), F_2(\delta)$  (считается, что нормы в  $\mathbb{R}^n$  при определении множеств  $A(l, \delta), F_1(\delta), F_2(\delta)$  совпадают), где

$$(10) \quad L(x) = (y, x), \quad l_i(x) = (x_i, x), \quad i = 1, \dots, n.$$

**Теорема 3.** *Порядок информативности системы  $l_1, \dots, l_n$  (который в соответствии с равенствами (10) обозначим через  $\text{In}(x_1, \dots, x_n, \delta)$ ) равен нулю тогда и только тогда, когда  $\delta \geq \mu$ , где*

$$\mu = \begin{cases} 0, & y = 0, \\ \|C\|/\|y\|, & y \neq 0; \end{cases}$$

здесь  $C = (C_1, \dots, C_n)$ , а  $C_i = (x_i, y)$ .

*Доказательство.* Из определения порядка информативности и из теоремы 1 следует, что  $\text{In}(x_1, \dots, x_n, \delta) = 0$  тогда и только тогда, когда

$$(11) \quad \sup_{x \in B_\delta} (y, x) = \|y\|,$$

где  $B_\delta = \{x \in B : \|lx\| \leq \delta\}$ ,  $lx = (l_1(x), \dots, l_n(x))$ . Равенство (11) выполнено при всех  $\delta \geq 0$ , если  $y = 0$ . Пусть  $y \neq 0$  и имеет место

равенство (11). Очевидно, что множество  $B_\delta$  является ограниченным и замкнутым. В силу того, что в гильбертовом пространстве всякое ограниченное замкнутое множество слабо компактно в себе, существует элемент  $x_0 \in B_\delta$  такой, что  $\sup_{x \in B_\delta} (y, x) = (y, x_0)$ , т. е. имеет место равенство  $(y, x_0) = \|y\|$ . Из того, что  $\|x_0\| \leq 1$ , следует равенство  $x_0 = y/\|y\|$ . Отсюда  $\delta \geq \|lx_0\| = \|ly\|/\|y\| = \|C\|/\|y\|$ . Если  $\delta \geq \|C\|/\|y\|$ , то  $y/\|y\| \in B_\delta$ , а значит, имеет место равенство (11). Теорема доказана.  $\square$

Определим норму в  $\mathbb{R}^n$  следующим образом:

$$\|a\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |a_i|^p \right)^{1/p} \quad \text{при } 1 \leq p < \infty, \quad \|a\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |a_i|.$$

Соответствующую погрешность наилучшего приближения обозначим через  $r_p(x_1, \dots, x_n, \delta)$ , где  $x_1, \dots, x_n$  определены равенством (10).

**Теорема 4.** Пусть  $x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n$  образуют ортонормированную систему и таковы, что  $C_i = (y, x_i) \neq 0$ ,  $i = 1, \dots, k$ ,  $C_i = (y, x_i) = 0$ ,  $i = k+1, \dots, n$ . Тогда имеет место равенство

$$r_2(x_1, \dots, x_n, \delta) = \begin{cases} \|y\|, & \delta \geq \mu, \\ \sqrt{1 - \delta^2} \sqrt{\|y\|^2 - \sum_{i=1}^k C_i^2} + \delta \sqrt{\sum_{i=1}^k C_i^2}, & 0 \leq \delta < \mu, \end{cases}$$

где

$$\mu = \begin{cases} 0, & y = 0, \\ \|y\|^{-1} \sqrt{\sum_{i=1}^k C_i^2}, & y \neq 0. \end{cases}$$

При  $\delta = \mu = 1$  всякий линейный наилучший метод приближения имеет вид  $L(x) \approx \lambda \sum_{i=1}^k C_i \tilde{l}_i(x)$ , где  $\lambda \in [0, 1]$ . В противном случае единственным линейным наилучшим методом приближения является метод

$$L(x) \approx \left( 1 - \frac{\delta}{\mu} \sqrt{\frac{1 - \mu^2}{1 - \delta^2}} \right) \sum_{i=1}^k D_i(\delta) \tilde{l}_i(x),$$

$$\text{где } D_i(\delta) = \begin{cases} C_i, & 0 \leq \delta < \mu, \\ 0, & \delta \geq \mu. \end{cases}$$

Для порядка информативности системы  $x_1, \dots, x_n$  справедливо равенство

$$\text{In}(x_1, \dots, x_n, \delta) = \begin{cases} k, & 0 \leq \delta < \mu, \\ 0, & \delta \geq \mu, \end{cases}$$

а единственной полной информативной системой при  $0 \leq \delta < \mu$  является система  $x_1, \dots, x_k$ .

*Доказательство.* Из равенства (2) имеем:  $r_2(x_1, \dots, x_n, \delta) = \min_{D_i} \varphi(D_1, \dots, D_n)$ , где

$$\varphi(D_1, \dots, D_n) = \sqrt{\|y\|^2 - 2 \sum_{i=1}^n C_i D_i + \sum_{i=1}^n D_i^2} + \delta \sqrt{\sum_{i=1}^n D_i^2}.$$

Найдя критические точки, легко убедиться, что минимальное значение функция  $\varphi(D_1, \dots, D_n)$  может принимать только в точках  $(\lambda D_1, \dots, \lambda D_n)$ , где  $\lambda \geq 0$ . Отсюда следует, что  $r_2(x_1, \dots, x_n, \delta) = \min_{\lambda \geq 0} \psi(\lambda)$ ; здесь  $\psi(\lambda) = \varphi(\lambda D_1, \dots, \lambda D_n)$ .

Пусть  $k = 0$ ; тогда  $r_2(x_1, \dots, x_n, \delta) = \|y\|$ , и единственной точкой минимума функции  $\varphi(D_1, \dots, D_n)$  является точка  $(0, \dots, 0)$ . Из теоремы 1 и леммы вытекает утверждение теоремы в рассматриваемом случае.

Пусть  $k > 0$  и  $y = \sum_{i=1}^k C_i x_i$ . Тогда

$$r_2(x_1, \dots, x_n, \delta) = \|y\| \min_{\lambda \geq 0} (|\lambda - 1| + \delta \lambda) = \|y\| \min(1, \delta).$$

Нетрудно видеть, что при  $0 \leq \delta < 1$  единственным значением, при котором функция  $\psi(\lambda)$ ,  $\lambda \geq 0$ , принимает минимальное значение, является  $\lambda = 1$ . Следовательно, единственной точкой минимума функции  $\varphi(D_1, \dots, D_n)$  является точка  $(C_1, \dots, C_n)$ . Применяя теорему 1 и лемму, получаем утверждение теоремы для данного случая.

Случай, когда  $\delta > 1$ , рассматривается аналогично.

При  $\delta = 1$  минимум функции  $\psi(\lambda)$ ,  $\lambda \geq 0$ , достигается при всех  $\lambda \in [0, 1]$ . Следовательно, все точки  $(\lambda C_1, \dots, \lambda C_n)$ ,  $\lambda \in [0, 1]$ , и только они минимизируют функцию  $\varphi(D_1, \dots, D_n)$ . Таким образом, всякий линейный наилучший метод приближения имеет вид

$$L(x) \approx \lambda \sum_{i=1}^k C_i \tilde{l}_i(x), \text{ где } \lambda \in [0, 1], \text{ а для погрешности наилучшего}$$

приближения справедливо равенство  $r_2(x_1, \dots, x_n, \delta) = \|y\|$ .

Пусть теперь  $k > 0$  и  $y \neq \sum_{i=1}^k C_i x_i$ . Тогда  $\|y\|^2 > \sum_{i=1}^k C_i^2$  и производная функции  $\psi(\lambda)$

$$\psi'(\lambda) = \frac{(\lambda - 1) \sum_{i=1}^k C_i^2}{\sqrt{\|y\|^2 - 2\lambda \sum_{i=1}^k C_i + \lambda^2 \sum_{i=1}^k C_i^2}} + \delta \sqrt{\sum_{i=1}^k C_i^2}$$

определена при всех  $\lambda$ . Преобразовывая уравнение  $\psi'(\lambda) = 0$ , получаем

$$\delta \sqrt{\|y\|^2 - 2\lambda \sum_{i=1}^k C_i + \lambda^2 \sum_{i=1}^k C_i^2} = (1 - \lambda) \sqrt{\sum_{i=1}^k C_i^2}.$$

При  $\delta \geq 1$  это уравнение решений не имеет, а при  $\delta < 1$  имеет решение  $\lambda_0 = 1 - \frac{\delta}{\mu} \sqrt{\frac{1 - \mu^2}{1 - \delta^2}}$ , где  $\mu = \sqrt{\sum_{i=1}^k C_i^2} / \|y\|$ . Условие  $\lambda_0 \geq 0$  эквивалентно условию  $\delta \leq \mu$ . Таким образом, при  $\delta \geq \mu$  минимум функции  $\psi(\lambda)$ ,  $\lambda \geq 0$ , достигается в единственной точке  $\lambda = 0$ . При  $\delta < \mu$

$$\psi(\lambda_0) = \sqrt{1 - \delta^2} \sqrt{\|y\|^2 - \sum_{i=1}^k C_i^2} + \delta \sqrt{\sum_{i=1}^k C_i^2}.$$

Нетрудно убедиться, что при  $\delta < \mu$  имеет место неравенство  $\psi(\lambda_0) < \psi(0)$ . Тем самым доказано, что функция  $\psi(\lambda)$ ,  $\lambda \geq 0$ , достигает минимума при  $\delta < \mu$  в единственной точке  $\lambda_0$ . Применение теоремы 1 и леммы завершает доказательство. Теорема доказана.  $\square$

**Теорема 5.** Пусть элементы  $x_1, \dots, x_{k_1}, \dots, x_{k_r+1}, \dots, x_n$  образуют ортонормированную систему и таковы, что  $|C_{j_i}| = A_i$ ,  $i = 1, \dots, r + 1$ ,  $j_i = k_{i-1} + 1, \dots, k_i$ ,  $k_0 = 0$ ,  $k_{r+1} = n$ , а, кроме того,  $A_1 > A_2 > \dots > A_r > A_{r+1} = 0$ . При  $k_r = n$  положим  $A_{r+1} = 0$ . Тогда имеет место равенство при  $\mu_{l+1} \leq \delta < \mu_l$ ,  $l = 0, \dots, r$ ,

$$(12) \quad r_\infty(x_1, \dots, x_n, \delta) = \sqrt{1 - k_l \delta^2} \sqrt{\|y\|^2 - \sum_{i=1}^{k_l} C_i^2} + \delta \sum_{i=1}^{k_l} |C_i|,$$

где  $\mu_0 = \infty$ ,

$$\mu_l = \begin{cases} 0, & y = 0, \\ \frac{A_l}{\left(\|y\|^2 - \sum_{i=1}^{k_l} C_i^2 + k_l A_l^2\right)^{1/2}}, & y \neq 0, \quad l = 1, \dots, r+1. \end{cases}$$

При  $\delta = \mu_r = 1/\sqrt{k_r}$  всякий линейный наилучший метод приближения имеет вид

$$L(x) \approx \sum_{i=1}^{k_r} \left( C_i - \frac{\lambda}{\sqrt{k_r}} \operatorname{sign} C_i \right) \tilde{l}_i(x),$$

где  $\lambda \in [0, A_r \sqrt{k_r}]$ . Для порядка информативности имеет место равенство  $\operatorname{In}(x_1, \dots, x_n, \delta) = k_{r-1}$ , а единственной полной информативной системой является система  $x_1, \dots, x_{k_{r-1}}$ . В противном случае при  $\mu_{l+1} \leq \delta < \mu_l$ ,  $l = 0, \dots, r$ , единственным линейным наилучшим методом является метод

$$(13) \quad L(x) \approx \sum_{i=1}^{k_l} C_i \left( 1 - \frac{A_l \delta}{|C_i| \mu_l} \sqrt{\frac{1 - k_l \mu_l^2}{1 - k_l \delta^2}} \right) \tilde{l}_i(x),$$

для порядка информативности справедливо равенство  $\operatorname{In}(x_1, \dots, x_n, \delta) = k_l$ , а единственной полной информативной системой является система  $x_1, \dots, x_{k_l}$ .

*Доказательство.* Из теоремы 1 имеем

$$(14) \quad r_\infty(x_1, \dots, x_n, \delta) = \min_{D_i} \left( \sqrt{\|y\|^2 - 2 \sum_{i=1}^n C_i D_i + \sum_{i=1}^n D_i^2} + \delta \sqrt{\sum_{i=1}^n |D_i|} \right).$$

Отсюда вытекает, что  $r_\infty(x_1, \dots, x_n, \delta) = \min_{B_i \geq 0} \varphi(B_1, \dots, B_n)$ , где

$$\varphi(B_1, \dots, B_n) = \sqrt{\|y\|^2 - 2 \sum_{i=1}^n |C_i| B_i + \sum_{i=1}^n B_i^2} + \delta \sqrt{\sum_{i=1}^n B_i}.$$

При этом точка  $(B_1, \dots, B_n)$  минимизирует функцию  $\varphi(B_1, \dots, B_n)$ ,  $B_i \geq 0$ , тогда и только тогда, когда точка  $(B_1 \operatorname{sign} C_1, \dots, B_n \operatorname{sign} C_n)$  минимизирует правую часть равенства (14). Если точка  $(B_1, \dots, B_n)$  минимизирует функцию  $\varphi(B_1, \dots, B_n)$ ,  $B_i \geq 0$ , (нетрудно видеть, что такая точка существует) и  $B_i > 0$  при  $i \in \tau = (i_1, \dots, i_k)$ ,

$i_1 < \dots < i_k$ , а  $B_i = 0$  при  $i \notin \tau$ , то  $\partial\varphi/\partial B_i$  при  $i \in \tau$  либо равны нулю, либо не существуют в этой точке. Таким образом, либо

$$(15) \quad \frac{-|C_i| + B_i}{\sqrt{\|y\|^2 - 2 \sum_{i \in \tau} |C_i| B_i + \sum_{i \in \tau} B_i^2}} + \delta = 0, \quad i \in \tau,$$

либо

$$(16) \quad \|y\|^2 - 2 \sum_{i \in \tau} |C_i| B_i + \sum_{i \in \tau} B_i^2 = 0.$$

Последнее равенство имеет место только в том случае, если  $y = \sum_{i=1}^n C_i x_i$  и  $B_i = |C_i|$ ,  $i \in \tau$ , а  $\tau = (1, \dots, k_r)$ . Из системы уравнений (15) получаем, что  $B_i = |C_i| - \delta\lambda$ ,  $i \in \tau$ , где для  $\lambda \geq 0$  имеем уравнение

$$(17) \quad (1 - k\delta^2)\lambda^2 = \|y\|^2 - \sum_{i \in \tau} C_i^2.$$

Рассмотрим следующие три случая.

1. Пусть  $y \neq \sum_{i=1}^n C_i x_i$ . Тогда точки, в которых достигается минимум функции  $\varphi(B_1, \dots, B_n)$ ,  $B_i \geq 0$ , находятся среди точек  $(B_1, \dots, B_n)$  таких, что

$$(18) \quad B_i = \begin{cases} |C_i| - \delta \sqrt{\frac{\|y\|^2 - \sum_{i \in \tau} C_i^2}{1 - k\delta^2}}, & i \in \tau, \\ 0, & i \notin \tau, \end{cases}$$

а  $(C_{i_1}, \dots, C_{i_k})$  удовлетворяет неравенству

$$(19) \quad \min_{i \in \tau} |C_i| > \delta \sqrt{\frac{\|y\|^2 - \sum_{i \in \tau} C_i^2}{1 - k\delta^2}}.$$

Заметим, что в множество точек, удовлетворяющих условиям (18), (19), входит точка  $(0, \dots, 0)$ , которая получается при  $\tau = \emptyset$ .

2. Пусть  $y = \sum_{i=1}^n C_i x_i$  и  $\delta \neq 1/\sqrt{k_r}$ . Тогда точка  $(|C_1|, \dots, |C_n|)$ , удовлетворяющая условиям (18), (19), не является решением системы (15), но удовлетворяет равенству (16). Тем самым и в этом случае точки, в которых достигается минимум функции  $\varphi(B_1, \dots, B_n)$ ,  $B_i \geq 0$ , находятся среди точек, удовлетворяющих условиям (18), (19).

3. Пусть  $y = \sum_{i=1}^n C_i x_i$  и  $\delta = 1/\sqrt{k_r}$ . Тогда при  $\tau = (1, \dots, k_r)$  уравнению (17) удовлетворяют всевозможные  $\lambda$ . Из условия  $\lambda \geq 0$ , а также  $B_i = |C_i| - \delta\lambda > 0$ ,  $i \in \tau$ , имеем  $\lambda \in [0, A_r\sqrt{k_r})$ . Нетрудно проверить, что при  $\lambda \in (0, A_r\sqrt{k_r})$  соответствующие значения  $B_i$  удовлетворяют равенствам (15), а при  $\lambda = 0$  выполнено равенство (16). Итак, множество точек, среди которых достигается минимум функции  $\varphi(B_1, \dots, B_n)$ ,  $B_i \geq 0$ , в рассматриваемом случае, это точки, удовлетворяющие условиям (18), (19), а также точки  $(B_1, \dots, B_n)$ , определенные равенствами

$$B_i = \begin{cases} |C_i| - \delta\lambda, & 1 \leq i \leq k_r, \\ 0, & k_r < i \leq n, \end{cases} \text{ при всех } \lambda \in [0, A_r\sqrt{k_r}).$$

Рассмотрим всевозможные подсистемы  $(C_{i_1}, \dots, C_{i_k})$ ,  $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq k_r$ , удовлетворяющие условию (19). Определив  $B_i$  равенствами (18), получим:  $\varphi(B_1, \dots, B_n) = \psi(|C_{i_1}|, \dots, |C_{i_k}|)$ , где

$$\psi(x_1, \dots, x_k) = \sqrt{1 - k\delta^2} \sqrt{\|y\|^2 - \sum_{i=1}^k x_i^2} + \delta \sum_{i=1}^k x_i.$$

Нетрудно показать, что если подсистема  $(C_{i_1}, \dots, C_{i_k})$  удовлетворяет условию (19), а подсистема  $(C_{j_1}, \dots, C_{j_k})$  такова, что  $|C_{j_s}| \geq |C_{i_s}|$ ,  $s = 1, \dots, k$ , то подсистема  $(C_{j_1}, \dots, C_{j_k})$  также удовлетворяет условию (19), и имеет место неравенство

$$(20) \quad \psi(|C_{i_1}|, \dots, |C_{i_k}|) \geq \psi(|C_{j_1}|, \dots, |C_{j_k}|).$$

Таким образом, минимальное значение функции  $\varphi(B_1, \dots, B_n)$  по возможным точкам, удовлетворяющим условиям (18), (19) при фиксированном  $k$ , есть

$$\varphi_k = \sqrt{1 - k\delta^2} \sqrt{\|y\|^2 - \sum_{i=1}^k C_i^2} + \delta \sum_{i=1}^k |C_i|.$$

Предположим, что существует подсистема  $(C_1, \dots, C_{k+1})$ , удовлетворяющая условию (19). Пусть либо  $y \neq \sum_{i=1}^{k+1} C_i x_i$ , либо если

$y = \sum_{i=1}^{k+1} C_i x_i$ , то  $|C_k| = |C_{k+1}| = A_r$ . Докажем, что тогда имеет

место неравенство

$$(21) \quad \sqrt{1 - k\delta^2} \sqrt{\|y\|^2 - \sum_{i=1}^k C_i^2} + \delta \sum_{i=1}^k |C_i| > \sqrt{1 - (k+1)\delta^2} \sqrt{\|y\|^2 - \sum_{i=1}^{k+1} C_i^2} + \delta \sum_{i=1}^{k+1} |C_i|.$$

В силу того, что подсистема  $(C_1, \dots, C_{k+1})$  удовлетворяет условию (19), имеем

$$(22) \quad |C_{k+1}| > \delta \sqrt{\left(\|y\|^2 - \sum_{i=1}^{k+1} C_i^2\right) / (1 - (k+1)\delta^2)}.$$

Если  $y \neq \sum_{i=1}^{k+1} C_i x_i$ , то  $\|y\|^2 - \sum_{i=1}^{k+1} C_i^2 > 0$  и, следовательно,  $1 - (k+1)\delta^2 > 0$ . Если же  $\|y\|^2 = \sum_{i=1}^{k+1} C_i^2$ , то из того, что подсистема  $(C_1, \dots, C_k)$  также удовлетворяет условию (19), получаем  $A_r > \delta \sqrt{A_r^2 / (1 - k\delta^2)}$ . Следовательно,  $1 - (k+1)\delta^2 > 0$ . Тем самым доказано, что из неравенства (22) вытекает соотношение

$$\left( \sqrt{1 - (k+1)\delta^2} |C_{k+1}| - \delta \sqrt{\|y\|^2 - \sum_{i=1}^{k+1} C_i^2} \right)^2 > 0.$$

Отсюда следует, что

$$(1 - k\delta^2) \left( \|y\|^2 - \sum_{i=1}^{k+1} C_i^2 + C_{k+1}^2 \right) > (1 - (k+1)\delta^2) \left( \|y\|^2 - \sum_{i=1}^{k+1} C_i^2 \right) + 2\delta |C_{k+1}| \sqrt{1 - (k+1)\delta^2} \sqrt{\|y\|^2 - \sum_{i=1}^{k+1} C_i^2} + \delta^2 C_{k+1}^2.$$

Извлекая корень из обеих частей полученного неравенства, имеем

$$\sqrt{1 - k\delta^2} \sqrt{\|y\|^2 - \sum_{i=1}^k C_i^2} > \sqrt{1 - (k+1)\delta^2} \sqrt{\|y\|^2 - \sum_{i=1}^{k+1} C_i^2} + \delta |C_{k+1}|.$$

Прибавив к обеим частям неравенства величину  $\delta \sum_{i=1}^k |C_i|$ , получим неравенство (21).

Пусть подсистема  $(C_1, \dots, C_k)$  удовлетворяет условию (19), т. е. выполняется неравенство

$$(23) \quad |C_k| > \delta \sqrt{\frac{\|y\|^2 - \sum_{i=1}^k C_i^2}{1 - k\delta^2}}.$$

Докажем, что если  $|C_{k+1}| = |C_k|$ , то для  $C_{k+1}$  верно неравенство

$$(24) \quad |C_{k+1}| > \delta \sqrt{\frac{\|y\|^2 - \sum_{i=1}^{k+1} C_i^2}{1 - (k+1)\delta^2}}.$$

Действительно, из неравенства (23) в силу того, что  $C_k^2 = C_{k+1}^2$ , получаем

$$(1 - (k+1)\delta^2)C_{k+1}^2 > \delta^2 \left( \|y\|^2 - \sum_{i=1}^{k+1} C_i^2 \right).$$

Отсюда следует неравенство (24).

С другой стороны, докажем, что из неравенства (24) при  $|C_{k+1}| \leq |C_k|$  и  $\sum_{i=1}^{k+1} C_i^2 < \|y\|^2$  следует (23). Из неравенства (24) имеем

$$(1 - k\delta^2)C_{k+1}^2 - \delta^2 C_{k+1}^2 > \delta^2 \left( \|y\|^2 - \sum_{i=1}^k C_i^2 \right) - \delta^2 C_{k+1}^2.$$

Таким образом, вследствие того, что  $1 - k\delta^2 > 0$ , получаем

$$(1 - k\delta^2)C_k^2 \geq (1 - k\delta^2)C_{k+1}^2 > \delta^2 \left( \|y\|^2 - \sum_{i=1}^k C_i^2 \right).$$

Отсюда следует (23).

Тем самым минимальное значение функции  $\varphi(B_1, \dots, B_n)$  на точках, удовлетворяющим условиям (18), (19), есть

$$(25) \quad \varphi_{k_l} = \sqrt{1 - k_l\delta^2} \sqrt{\|y\|^2 - \sum_{i=1}^{k_l} C_i^2} + \delta \sum_{i=1}^{k_l} |C_i|,$$

если  $y \neq \sum_{i=1}^n C_i x_i$ , и есть  $\min(\varphi_{k_l}, \varphi_{k_r})$ , если точка  $(|C_1|, \dots, |C_n|)$  удовлетворяет условиям (18), (19); здесь  $k_l$ ,  $0 \leq l \leq r$ , — максимальный порядок подсистемы  $(C_1, \dots, C_{k_l})$  такой, что  $\sum_{i=1}^{k_l} C_i^2 < \|y\|^2$

и

$$(26) \quad |C_{k_l}| > \delta \sqrt{\left( \|y\|^2 - \sum_{i=1}^{k_l} C_i^2 \right) / (1 - k_l \delta^2)}.$$

При этом минимум достигается в точке  $(|C_1|, \dots, |C_n|)$  либо в точке  $(B_1, \dots, B_n)$ , где

$$(27) \quad B_i = \begin{cases} |C_i| - \delta \sqrt{\left( \|y\|^2 - \sum_{i=1}^{k_l} C_i^2 \right) / (1 - k_l \delta^2)}, & 1 \leq i \leq k_l, \\ 0, & i > k_l. \end{cases}$$

Единственность минимизирующей точки вытекает из того, что неравенство (20) является строгим, если хотя бы одно из неравенств  $|C_{j_s}| \geq |C_{i_s}|$ ,  $s = 1, \dots, k$ , строгое.

Выясним, при каких  $\delta$  имеет место неравенство (26). Положим  $\mu_0 = \infty$ ,

$$\mu_l = \begin{cases} 0, & y = 0, \\ A_l \left( \|y\|^2 - \sum_{i=1}^{k_l} C_i^2 + k_l A_l^2 \right)^{-1/2}, & y \neq 0, \end{cases} \quad l = 1, \dots, r+1.$$

При  $y = 0$  утверждение теоремы очевидно; поэтому будем считать, что  $y \neq 0$ . Нетрудно убедиться в справедливости равенств

$$\left( \frac{\|y\|^2 - \sum_{i=1}^{k_l} C_i^2}{1 - k_l \delta^2} \right)^{1/2} = \frac{A_l}{\mu_l} \left( \frac{1 - k_l \mu_l^2}{1 - k_l \delta^2} \right)^{1/2}, \quad l = 1, \dots, r.$$

Отсюда следует, что точки, определенные равенством (27), а также точка  $(|C_1|, \dots, |C_n|)$  при  $y = \sum_{i=1}^n C_i x_i$  и  $l = r$  будут иметь вид

$$B_i = \begin{cases} |C_i| - \frac{\delta A_l}{\mu_l} \sqrt{\frac{1 - k_l \mu_l^2}{1 - k_l \delta^2}}, & 1 \leq i \leq k_l, \\ 0, & i > k_l. \end{cases}$$

В силу введенных обозначений неравенство (26) эквивалентно неравенству  $\mu_l > \delta \sqrt{(1 - k_l \mu_l^2) / (1 - k_l \delta^2)}$ , которое имеет место при

$$\|y\|^2 > \sum_{i=1}^{k_l} C_i^2, \text{ если } \delta < \mu_l.$$

Итак, если  $y \neq \sum_{i=1}^n C_i x_i$ , то при  $\mu_{l+1} \leq \delta < \mu_l$ ,  $l = 0, \dots, r$ , максимальный порядок подсистемы, удовлетворяющей неравенству (26), равен  $k_l$ , а значит, имеют место равенства (12), (13). Остальные утверждения теоремы в рассматриваемом случае вытекают из леммы.

Пусть  $y = \sum_{i=1}^n C_i x_i$ . Предположим, что  $\mu_{l+1} \leq \delta < \mu_l$ ,  $0 \leq l \leq r-1$ . Чтобы найти минимальное значение функции  $\varphi(B_1, \dots, B_n)$ ,  $B_i \geq 0$ , достаточно сравнить значение, определяемое равенством (25), со значением  $\varphi(|C_1|, \dots, |C_n|) = \delta \sum_{i=1}^n |C_i|$ . Из неравенства

$$(28) \quad \sum_{i=k_l+1}^n C_i^2 \leq A_{l+1} \sum_{i=k_l+1}^n |C_i|$$

следует, что

$$(29) \quad \delta^2 \left( \sum_{i=k_l+1}^n |C_i| \right)^2 \geq \delta^2 \left( \sum_{i=k_l+1}^n C_i^2 \right)^2 A_{l+1}^{-2}.$$

Вследствие соотношения

$$\begin{aligned} \delta \geq \mu_{l+1} &= A_{l+1} \left( \|y\|^2 - \sum_{i=1}^{k_l+1} C_i^2 + k_{l+1} A_{l+1}^2 \right)^{-1/2} \\ &= A_{l+1} \left( \sum_{i=k_l+1}^n C_i^2 + k_l A_{l+1}^2 \right)^{-1/2} \end{aligned}$$

получаем

$$(30) \quad \delta^2 \sum_{i=k_l+1}^n C_i^2 \geq A_{l+1}^2 (1 - k_l \delta^2).$$

Учитывая неравенство (29), будем иметь

$$\delta^2 \left( \sum_{i=k_l+1}^n |C_i| \right)^2 \geq (1 - k_l \delta^2) \sum_{i=k_l+1}^n C_i^2 = (1 - k_l \delta^2) \left( \|y\|^2 - \sum_{i=1}^{k_l} C_i^2 \right).$$

Отсюда следует, что

$$\sqrt{1 - k_l \delta^2} \sqrt{\|y\|^2 - \sum_{i=1}^{k_l} C_i^2} + \delta \sum_{i=1}^{k_l} |C_i| \leq \delta \sum_{i=1}^n |C_i|.$$

Последнее неравенство всегда строгое, если  $\delta \neq \mu_r$ . Действительно, при  $\mu_{l+1} \leq \delta < \mu_l$ ,  $0 \leq l \leq r-2$ , неравенство (28) строгое, а при  $\mu_r \leq \delta < \mu_{r-1}$  неравенство (30) строгое. Итак, если  $\mu_{l+1} \leq \delta < \mu_l$ ,  $0 \leq l \leq r-1$ ,  $\delta \neq \mu_r$ , единственной точкой, минимизирующей функцию

$\varphi(B_1, \dots, B_n)$ ,  $B_i \geq 0$ , является точка, определяемая равенствами (27). При  $0 = \mu_{r+1} \leq \delta < \mu_r$  нетрудно показать, что выполняется неравенство

$$\sqrt{1 - k_{r-1}\delta^2} \sqrt{\|y\|^2 - \sum_{i=1}^{k_{r-1}} C_i^2} + \delta \sum_{i=1}^{k_{r-1}} |C_i| > \delta \sum_{i=1}^n |C_i|.$$

Тем самым единственной точкой, в которой достигается минимум функции  $\varphi(B_1, \dots, B_n)$ ,  $B_i \geq 0$ , в этом случае является точка  $(|C_1|, \dots, |C_n|)$ . Применяя теорему 1 и лемму, получаем утверждение теоремы в рассматриваемом случае.

Пусть, наконец,  $y = \sum_{i=1}^n C_i x_i$  и  $\delta = \mu_r$ . В силу равенств

$$\delta \left( \frac{\|y\|^2 - \sum_{i=1}^{k_{r-1}} C_i^2}{1 - k_{r-1}\delta^2} \right)^{1/2} = \delta \left( \frac{\|y\|^2 - \sum_{i=1}^{k_{r-1}+1} C_i^2}{1 - (k_{r-1} + 1)\delta^2} \right)^{1/2} = A_r$$

максимальный порядок подсистемы, удовлетворяющей неравенству (26), равен  $k_{r-1}$ . Следовательно, минимальное значение  $\varphi(B_1, \dots, B_n)$  среди точек, удовлетворяющих условиям (18), (19), есть

$$\varphi_{k_{r-1}} = \sqrt{1 - k_{r-1}\delta^2} \sqrt{\|y\|^2 - \sum_{i=1}^{k_{r-1}} C_i^2} + \delta \sum_{i=1}^{k_{r-1}} |C_i|,$$

которое достигается в единственной точке  $(B_1^*, \dots, B_n^*)$ ,

$$B_i^* = \begin{cases} |C_i| - \delta \sqrt{\left( \|y\|^2 - \sum_{i=1}^{k_{r-1}} C_i^2 \right) / (1 - k_{r-1}\delta^2)}, & 1 \leq i \leq k_{r-1}, \\ 0, & i > k_{r-1}. \end{cases}$$

Однако необходимо рассмотреть также значения  $\varphi(B_1, \dots, B_n)$  в точках  $(B_1^\lambda, \dots, B_n^\lambda)$

$$(31) \quad B_i^\lambda = \begin{cases} |C_i| - \delta\lambda, & 1 \leq i \leq k_r, \\ 0, & i > k_r, \end{cases}$$

при всех  $\lambda \in [0, A_r \sqrt{k_r}]$ . Нетрудно проверить, что точка  $(B_1^\lambda, \dots, B_n^\lambda)$  при  $\lambda = A_r \sqrt{k_r}$  совпадает с точкой  $(B_1^*, \dots, B_n^*)$  и,

кроме того,  $\varphi(B_1^\lambda, \dots, B_n^\lambda) = \frac{1}{\sqrt{k_r}} \sum_{i=1}^n A_i = \delta \sum_{i=1}^n |C_i|$  при всех

$\lambda \in [0, A_r \sqrt{k_r}]$ . Таким образом, минимальное значение функции

$\varphi(B_1, \dots, B_n)$ ,  $B_i \geq 0$ , в этом случае достигается на точках, определенных равенством (31), при всех  $\lambda \in [0, A_r \sqrt{k_r}]$ , и только на них. Из теоремы 1 и леммы вытекает утверждение теоремы в этом случае. Теорема доказана.  $\square$

**Теорема 6.** В условиях теоремы 5 имеет место равенство

$$(32) \quad r_1(x_1, \dots, x_n, \delta) = \begin{cases} \frac{\sqrt{k_l - \delta^2}}{k_l} \sqrt{k_l \left( \|y\|^2 - \sum_{i=k_l+1}^n C_i^2 \right) - \left( \sum_{i=1}^{k_l} |C_i| \right)^2} + \frac{\delta}{k_l} \sum_{i=1}^{k_l} |C_i|, & \mu_{l-1} \leq \delta < \mu_l, \quad l = 1, \dots, r, \\ \|y\|, & \mu_r \leq \delta < \mu_{r+1}, \end{cases}$$

где  $\mu_{r+1} = \infty$ ,  $\mu_0 = 0$ ,

$$\mu_l = \begin{cases} \frac{\sum_{i=1}^{k_l} (|C_i| - A_{l+1})}{\left( \|y\|^2 - \sum_{i=1}^n C_i^2 + \sum_{i=1}^{k_l} (|C_i| - A_{l+1})^2 \right)^{1/2}}, & y \neq 0, \quad l = 1, \dots, r. \\ 0, & y = 0, \end{cases}$$

При  $\delta = \mu_1 = 1/\sqrt{k_1}$  всякий линейный наилучший метод приближения имеет вид  $L(x) \approx D \sum_{i=1}^{k_1} \text{sign } C_i \tilde{l}_i(x) + \sum_{i=k_1+1}^{k_2} C_i \tilde{l}_i(x)$ , где  $D \in [A_2, A_1]$ . В противном случае при  $\mu_{l-1} \leq \delta < \mu_l$ ,  $l = 1, \dots, r+1$ , единственным линейным наилучшим методом является метод

$$(33) \quad L(x) \approx D(\delta) \sum_{i=1}^{k_l} \text{sign } C_i \tilde{l}_i(x) + \sum_{i=k_l+1}^{k_r} C_i \tilde{l}_i(x),$$

где

$$D(\delta) = \begin{cases} \left( \frac{1}{k_l} \sum_{i=1}^{k_l} (|C_i| - A_{l+1}) \right) \left( 1 - \frac{\delta}{\mu_l} \sqrt{\frac{k_l - \mu_l^2}{k_l - \delta^2}} \right) + A_{l+1}, & l \neq r+1, \\ 0, & l = r+1. \end{cases}$$

Для порядка информативности имеет место равенство

$$\text{In}(x_1, \dots, x_n, \delta) = \begin{cases} k_r, & 0 \leq \delta < \mu_r, \\ 0, & \delta \geq \mu_r, \end{cases}$$

а единственной полной информативной системой при  $0 \leq \delta < \mu_r$  является система  $x_1, \dots, x_{k_r}$ .

*Доказательство.* Из теоремы 1 имеем

$$(34) \quad r_1(x_1, \dots, x_n, \delta) = \min_{D_i} \left( \sqrt{\|y\|^2 - 2 \sum_{i=1}^n C_i D_i + \sum_{i=1}^n D_i^2} + \delta \max_{1 \leq i \leq n} |D_i| \right).$$

Нетрудно видеть, что  $r_1(x_1, \dots, x_n, \delta) = \min_{B_i \geq 0} \varphi(B_1, \dots, B_n)$ , где

$$\varphi(B_1, \dots, B_n) = \sqrt{\|y\|^2 - 2 \sum_{i=1}^n |C_i| B_i + \sum_{i=1}^n B_i^2} + \delta \max_{1 \leq i \leq n} B_i.$$

При этом точка  $(B_1, \dots, B_n)$  минимизирует функцию  $\varphi(B_1, \dots, B_n)$ ,  $B_i \geq 0$ , тогда и только тогда, когда точка  $(B_1 \operatorname{sign} C_1, \dots, B_n \operatorname{sign} C_n)$  минимизирует правую часть равенства (34).

Пусть точка  $(B_1, \dots, B_n)$  минимизирует функцию  $\varphi(B_1, \dots, B_n)$ ,  $B_i \geq 0$ , и  $B_i = D_i$ ,  $i \in \tau = (i_1, \dots, i_k)$ ,  $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ , а  $B_i < D_i$ ,  $i \notin \tau$ . В силу неравенства

$$\sum_{i \notin \tau} B_i^2 - 2 \sum_{i \notin \tau} |C_i| B_i \geq - \sum_{i \notin \tau} C_i^2,$$

которое обращается в равенство только при  $B_i = |C_i|$ ,  $i \notin \tau$ , имеем

$$\varphi(B_1, \dots, B_n) = \psi(D) = \sqrt{\|y\|^2 - \sum_{i \notin \tau} C_i^2 + kD^2 - 2D \sum_{i \in \tau} |C_i|} + \delta D$$

и  $|C_i| < D$ ,  $i \notin \tau$ . Из того, что точка  $D$  является минимумом функции  $\psi(D)$ ,  $D \geq 0$ , следует, что либо

$$(35) \quad \psi'(D) = \frac{kD - \sum_{i \in \tau} |C_i|}{\sqrt{\|y\|^2 - \sum_{i \notin \tau} C_i^2 + kD^2 - 2D \sum_{i \in \tau} |C_i|}} + \delta = 0,$$

либо  $D = B_1 = \dots = B_n = 0$ , либо  $\|y\|^2 - \sum_{i \notin \tau} C_i^2 + kD^2 - 2D \sum_{i \in \tau} |C_i| = 0$ . Последнее равенство, согласно условию  $D > \max_{i \notin \tau} |C_i|$ , имеет

место только, если  $y = \sum_{i=1}^n C_i x_i$ ,  $D = A_1$  и  $\tau = (1, \dots, k_1)$ . Из

равенства (35) получаем

$$(36) \quad D^2(k^2 - k\delta^2) - 2D(k - \delta^2) \sum_{i \in \tau} |C_i| - \left( \sum_{i \in \tau} |C_i| \right)^2 = \delta^2 \left( \|y\|^2 - \sum_{i \notin \tau} C_i^2 \right) = 0$$

при условии  $\max_{i \notin \tau} |C_i| < D \leq \frac{1}{k} \sum_{i \in \tau} |C_i|$ . Можно показать, что уравнение (36) при  $\delta = \sqrt{k}$  имеет решение только когда  $\tau = (1, \dots, k_1)$ . Следовательно,  $k = k_1$ , а решением является любое  $D \in (A_2, A_1]$ . Если  $\delta \neq \sqrt{k}$ , уравнение (36) при условии  $D \leq \frac{1}{k} \sum_{i \in \tau} |C_i|$  имеет решение

$$(37) \quad D = \frac{1}{k} \sum_{i \in \tau} |C_i| - \frac{\delta}{k} \sqrt{\frac{k \left( \|y\|^2 - \sum_{i \notin \tau} C_i^2 \right) - \left( \sum_{i \in \tau} |C_i| \right)^2}{k - \delta^2}}.$$

Таким образом, если  $y \neq \sum_{i=1}^n C_i x_i$  или  $y = \sum_{i=1}^n C_i x_i$ , но  $\delta \neq \sqrt{k_1}$ , минимум функции  $\varphi(B_1, \dots, B_n)$ ,  $B_i \geq 0$ , достигается среди точек  $(0, \dots, 0)$ ,  $(B_1, \dots, B_n)$ , где

$$(38) \quad B_i = \begin{cases} D, & i \in \tau, \\ |C_i|, & i \notin \tau, \end{cases}$$

а  $D$  определяется равенством (37). Кроме того, для подсистемы  $(C_{i_1}, \dots, C_{i_k})$  выполнено неравенство

$$(39) \quad \max_{i \notin \tau} |C_i| < \frac{1}{k} \sum_{i \in \tau} |C_i| - \frac{\delta}{k} \sqrt{\frac{k \left( \|y\|^2 - \sum_{i \notin \tau} C_i^2 \right) - \left( \sum_{i \in \tau} |C_i| \right)^2}{k - \delta^2}}.$$

При  $y = \sum_{i=1}^n C_i x_i$ ,  $\delta = \sqrt{k_1}$  к рассматриваемым точкам необходимо добавить точки  $(B_1, \dots, B_n)$ ,

$$B_i = \begin{cases} D, & i = 1, \dots, k_1, \\ |C_i|, & i = k_1 + 1, \dots, n, \end{cases}$$

где  $D \in (A_2, A_1]$ .

Пусть есть подсистема  $(C_{i_1}, \dots, C_{i_k})$ ,  $\tau = (i_1, \dots, i_k)$ , удовлетворяющая условию (39). Положим  $j = \max_{i \notin \tau} i$ . Предположим, что при

некотором  $s$ ,  $1 \leq s \leq k$ , выполнено условие  $i_{s-1} < j < i_s$ ,  $i_0 = 0$ . Покажем, что подсистема  $(C_{i_1}, \dots, C_{i_{s-1}}, x, C_{i_{s+1}}, \dots, C_{i_k})$  при всех  $x$ ,  $|C_{i_s}| \leq |x| \leq |C_j|$ , будет удовлетворять неравенству (40)

$$|x| < \frac{1}{k} \sum_{i \in \tau} |g_i| - \frac{\delta}{k} \sqrt{\frac{k \left( \|y\|^2 - \sum_{i=1}^n C_i^2 \right) + k \sum_{i \in \tau} g_i^2 - \left( \sum_{i \in \tau} |g_i| \right)^2}{k - \delta^2}},$$

где

$$g_i = \begin{cases} C_i, & i \neq i_s, \\ x, & i = i_s, \end{cases} \quad i \in \tau.$$

Из неравенства (39) и того, что  $\max_{i \notin \tau} |C_i| = |C_j|$ , имеем

$$|C_{i_s}| \leq |x| \leq |C_j| < \frac{1}{k} \sum_{i \in \tau} |C_i| \leq \frac{1}{k} \sum_{i \in \tau} |g_i|.$$

Отсюда получаем

$$|x| + |C_{i_s}| < \frac{1}{k} \left( \sum_{i \in \tau} |C_i| + \sum_{i \in \tau} |g_i| \right).$$

Из определения  $g_i$  следует, что

$$\sum_{i \in \tau} |g_i| - \sum_{i \in \tau} |C_i| = |x| + |C_{i_s}| \geq 0.$$

Следовательно, имеет место неравенство

$$k(x^2 - C_{i_s}^2) \leq \left( \sum_{i \in \tau} |g_i| \right)^2 - \left( \sum_{i \in \tau} |C_i| \right)^2,$$

из которого вытекает, что

$$k \sum_{i \in \tau} g_i^2 - \left( \sum_{i \in \tau} |g_i| \right)^2 \leq k \sum_{i \in \tau} C_i^2 - \left( \sum_{i \in \tau} |C_i| \right)^2.$$

Учитывая последнее неравенство, получаем

$$\begin{aligned} |C_{i_s}| \leq |x| \leq |C_j| &< \frac{1}{k} \sum_{i \in \tau} |C_i| \\ &- \frac{\delta}{k} \sqrt{\frac{k \left( \|y\|^2 - \sum_{i=1}^n C_i^2 \right) + k \sum_{i \in \tau} g_i^2 - \left( \sum_{i \in \tau} |g_i| \right)^2}{k - \delta^2}} \\ &\leq \frac{1}{k} \sum_{i \in \tau} |g_i| - \frac{\delta}{k} \sqrt{\frac{k \left( \|y\|^2 - \sum_{i=1}^n C_i^2 \right) + k \sum_{i \in \tau} g_i^2 - \left( \sum_{i \in \tau} |g_i| \right)^2}{k - \delta^2}}. \end{aligned}$$

Тем самым неравенство (40) доказано при всех  $x$ ,  $|C_{i_s}| \leq |x| \leq |C_j|$ . Из неравенства (40) при  $x = C_j$ , а также из соотношения  $\max_{i \notin \tau'} |C_i| = |C_{i_s}| < |C_j|$ , где  $\tau' = (i_1, \dots, i_{s-1}, j, i_{s+1}, \dots, i_k)$ , вытекает, что подсистема  $\tau'$  удовлетворяет условию (39).

Подставив значения, определенные равенством (38), в функцию  $\varphi(B_1, \dots, B_n)$ , для подсистемы  $\tau$  получим значение  $\alpha(C_{i_s})$ , а для  $\tau'$  — значение  $\alpha(C_j)$ , где

$$\alpha(x) = \frac{\sqrt{k - \delta^2}}{k} \sqrt{k \left( \|y\|^2 - \sum_{i=1}^n C_i^2 \right) + k \sum_{i \in \tau} g_i^2 - \left( \sum_{i \in \tau} |g_i| \right)^2} + \frac{\delta}{k} \sum_{i \in \tau} |g_i|.$$

Докажем, что

$$(41) \quad \alpha(C_j) \leq \alpha(C_{i_s}).$$

Пусть  $|C_{i_s}| < |C_j|$ , в противном случае неравенство (41) очевидным образом обращается в равенство. Рассмотрим производную функции  $\alpha(x)$  при  $|C_j| > |x| > |C_{i_s}|$  (нетрудно показать, что она определена)

$$\alpha'(x) = \sqrt{k - \delta^2} \left[ \frac{|x| - \frac{1}{k} \sum_{i \in \tau} |g_i|}{\sqrt{k \left( \|y\|^2 - \sum_{i=1}^n C_i^2 \right) + k \sum_{i \in \tau} g_i^2 - \left( \sum_{i \in \tau} |g_i| \right)^2}} + \frac{\delta}{k \sqrt{k - \delta^2}} \right] \text{sign } x.$$

Из неравенства (40) следует, что  $\alpha'(x) \text{sign } x < 0$ . Отсюда и из непрерывности  $\alpha(x)$  вытекает неравенство (41).

Тем самым доказано, что минимум функции  $\varphi(B_1, \dots, B_n)$  среди точек вида (38) при фиксированном  $k$  равен

$$\varphi_k = \frac{\sqrt{k - \delta^2}}{k} \sqrt{k \left( \|y\|^2 - \sum_{i=1}^n C_i^2 \right) + k \sum_{i=1}^k C_i^2 - \left( \sum_{i=1}^k |C_i| \right)^2} + \frac{\delta}{k} \sum_{i=1}^k |C_i|.$$

причем  $k \geq k_1$ .

Пусть подсистемы  $(C_1, \dots, C_k)$  и  $(C_1, \dots, C_{k+1})$  удовлетворяют условию (39) и либо  $y \neq \sum_{i=1}^n C_i x_i$ , либо, если  $y = \sum_{i=1}^n C_i x_i$  и  $k = k_1$  выполнены равенства  $|C_{k+1}| = |C_{k+2}| = A_2$ . Докажем, что тогда  $\varphi_k < \varphi_{k+1}$ . Покажем сначала, что  $k - \delta^2 > 0$ . Если  $y \neq \sum_{i=1}^n C_i x_i$  или  $k \neq k_1$  это следует из неравенства

$$k \left( \|y\|^2 - \sum_{i=1}^n C_i^2 \right) + k \sum_{i=1}^k C_i^2 - \left( \sum_{i=1}^k |C_i| \right)^2 > 0.$$

В случае, когда  $y = \sum_{i=1}^n C_i x_i$ ,  $k = k_1$  и  $|C_{k+1}| = |C_{k+2}| = A_2$ , из условия (39) для системы  $(C_1, \dots, C_{k+1})$  легко показать, что  $k_1 - \delta^2 > 0$ . В силу того, что  $k - \delta^2 > 0$ , справедливо неравенство

$$(42) \quad \left( \sqrt{k - \delta^2} f_k - \delta e_k \right)^2 > 0,$$

где

$$f_k = \sum_{i=1}^k |C_i| - k |C_{k+1}|,$$

$$e_k = \sqrt{k \left( \|y\|^2 - \sum_{i=1}^n C_i^2 \right) + k \sum_{i=1}^k C_i^2 - \left( \sum_{i=1}^k |C_i| \right)^2}.$$

Умножив неравенство (42) на  $k + 1$ , получим

$$(k + 1) \delta^2 e_k^2 - 2 \delta (k + 1) \sqrt{k - \delta^2} e_k f_k + (k + 1) (k - \delta^2) f_k^2 > 0.$$

Используя очевидные равенства

$$k(k + 1)(k + 1 - \delta^2) - (k + 1)^2(k - \delta^2) = (k + 1)\delta^2,$$

$$k(k + 1 - \delta^2) - \delta^2 = (k + 1)(k - \delta^2),$$

последнее неравенство можно записать в виде

$$(43) \quad k^2(k + 1 - \delta^2) \left( \frac{k + 1}{k} e_k^2 + \frac{1}{k} f_k^2 \right) > (k + 1)^2(k - \delta^2) e_k^2 + 2 \delta (k + 1) \sqrt{k - \delta^2} e_k f_k + \delta^2 f_k^2.$$

Легко показать справедливость равенства

$$(44) \quad e_{k+1}^2 = \frac{k + 1}{k} e_k^2 + \frac{1}{k} f_k^2.$$

Таким образом, извлекая корень из обеих частей неравенства (43), будем иметь

$$k\sqrt{k+1-\delta^2}e_{k+1} > (k+1)\sqrt{k-\delta^2}e_k + \delta f_k.$$

Отсюда в силу равенства

$$(k+1)\sum_{i=1}^k |C_i| - k\sum_{i=1}^{k+1} |C_i| = f_k$$

получаем

$$k\sqrt{k+1-\delta^2}e_{k+1} + k\delta\sum_{i=1}^{k+1} |C_i| > (k+1)\sqrt{k-\delta^2}e_k + (k+1)\delta\sum_{i=1}^k |C_i|,$$

и, следовательно,  $\varphi_{k+1} > \varphi_k$ .

Пусть подсистема  $(C_1, \dots, C_{k+1})$  удовлетворяет условию (39) и  $|C_{k+1}| = |C_{k+2}|$ . Докажем, что тогда подсистема  $(C_1, \dots, C_k)$  также удовлетворяет условию (39). Для подсистемы  $(C_1, \dots, C_{k+1})$  справедливо неравенство

$$|C_{k+2}| < \frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{k+1} |C_i| - \frac{\delta}{k+1}\frac{e_{k+1}}{\sqrt{k+1-\delta^2}}.$$

Отсюда в силу того, что  $|C_{k+2}| = |C_{k+1}|$  и  $\sum_{i=1}^{k+1} |C_i| - (k+1)|C_{k+1}| = f_k$ , вытекает неравенство  $(k+1-\delta^2)f_k^2 > \delta^2 e_{k+1}^2$ .

Воспользовавшись равенством (44), получим

$$(k+1-\delta^2)f_k^2 > \delta^2 \left( \frac{k+1}{k}e_k^2 + \frac{1}{k}f_k^2 \right),$$

а следовательно,  $(k-\delta^2)f_k^2 > \delta^2 e_k^2$ . Поэтому

$$(45) \quad |C_{k+1}| < \frac{1}{k}\sum_{i=1}^k |C_i| - \frac{\delta}{k}\frac{e_k}{\sqrt{k-\delta^2}},$$

т. е. система  $(C_1, \dots, C_k)$  удовлетворяет условию (39).

Пусть подсистема  $(C_1, \dots, C_k)$  удовлетворяет условию (39) и либо  $y \neq \sum_{i=1}^n C_i x_i$ , либо, если  $y = \sum_{i=1}^n C_i x_i$ , то  $k > k_1$ . Тогда  $e_k > 0$ , а следовательно,  $k-\delta^2 > 0$ . Повторяя проведенные рассуждения в обратном порядке, получаем, что из неравенства (45) следует неравенство

$$|C_{k+1}| < \frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{k+1} |C_i| - \frac{\delta}{k+1}\frac{e_{k+1}}{\sqrt{k+1-\delta^2}}.$$

В силу того, что  $|C_{k+2}| \leq |C_{k+1}|$ , система  $(C_1, \dots, C_{k+1})$  также удовлетворяет условию (39).

Таким образом, доказано, что минимум функции  $\varphi(B_1, \dots, B_n)$  среди точек вида (38) равен  $\varphi_{k_l}$ , если  $y \neq \sum_{i=1}^n C_i x_i$ , и равен  $\min(\varphi_{k_l}, \varphi_{k_1})$ , если  $y = \sum_{i=1}^n C_i x_i$ ,  $\delta \neq \sqrt{k_1}$ ; здесь  $k_l$ ,  $l = 1, \dots, r$ , — минимальный порядок подсистемы  $(C_1, \dots, C_{k_l})$ , удовлетворяющей условию (39), и такой, что  $k_l > k_1$  при  $y = \sum_{i=1}^n C_i x_i$ . При этом минимум достигается в точке  $(|C_1|, \dots, |C_n|)$  или в точке  $(B_1, \dots, B_n)$ , где

$$(46) \quad B_i = \begin{cases} \frac{1}{k_l} \sum_{i=1}^{k_l} |C_i| \\ -\frac{\delta}{k_l} \sqrt{\frac{k_l \left( \|y\|^2 - \sum_{i=1}^n C_i^2 \right) + k_l \sum_{i=1}^{k_l} C_i^2 - \left( \sum_{i=1}^{k_l} |C_i| \right)^2}{k_l - \delta^2}}, \\ |C_i|, \end{cases} \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, k_l, \\ i = k_l + 1, \dots, n. \end{array}$$

Единственность точки, в которой достигается минимум, вытекает из того, что неравенство (41) является строгим, если  $|C_{i_s}| < |C_j|$ .

Выясним, при каких  $\delta$  система  $(C_1, \dots, C_{k_l})$  удовлетворяет условию (39). При  $r = 0$  утверждение теоремы очевидно, поэтому будем считать, что  $r > 0$ . Непосредственным вычислением можно доказать, что имеет место равенство

$$(47) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{k_l} \sum_{i=1}^{k_l} |C_i| - \frac{\delta}{k_l} \sqrt{\frac{k_l \left( \|y\|^2 - \sum_{i=1}^n C_i^2 \right) + k_l \sum_{i=1}^{k_l} C_i^2 - \left( \sum_{i=1}^{k_l} |C_i| \right)^2}{k_l - \delta^2}} \\ &= \left( \frac{1}{k_l} \sum_{i=1}^{k_l} (|C_i| - A_{l+1}) \right) \left( 1 - \frac{\delta}{\mu_l} \sqrt{\frac{k_l - \mu_l^2}{k_l - \delta^2}} \right) + A_{l+1}, \quad l = 1, \dots, r, \end{aligned}$$

где  $\mu_l$  определены в условии теоремы. Таким образом, из условия (39) получаем неравенство

$$\left( \frac{1}{k_l} \sum_{i=1}^{k_l} (|C_i| - A_{l+1}) \right) \left( 1 - \frac{\delta}{\mu_l} \sqrt{\frac{k_l - \mu_l^2}{k_l - \delta^2}} \right) > 0.$$

Отсюда вытекает, что

$$\delta \sqrt{\frac{k_l - \mu_l^2}{k_l - \delta^2}} < \mu_l.$$

Следовательно, при  $\mu_l < \sqrt{k_l}$  (а  $\mu_l$  при всех  $1 \leq l \leq r$  удовлетворяет неравенству  $\mu_l \leq \sqrt{k_l}$  причем равенство возможно лишь при  $y = \sum_{i=1}^n C_i x_i$  и  $l = 1$ ) выполнено неравенство  $\delta < \mu_l$ . Итак, если  $y = \sum_{i=1}^n C_i x_i$ , то при  $\mu_{l-1} \leq \delta < \mu_l$ ,  $l = 1, \dots, r$ , минимальный порядок подсистемы, удовлетворяющей условию (39), равен  $k_l$ , а при  $\delta \geq \mu_r$  таких подсистем нет и единственной точкой минимума функции  $\varphi(B_1, \dots, B_n)$ ,  $B_i \geq 0$ , является точка  $(0, \dots, 0)$ .

Нетрудно доказать, что

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{k - \delta^2}}{k_l} \sqrt{k_l \left( \|y\|^2 - \sum_{i=1}^n C_i^2 \right) + k_l \sum_{i=1}^{k_l} C_i^2 - \left( \sum_{i=1}^{k_l} |C_i| \right)^2} \\ + \frac{\delta}{k_l} \sum_{i=1}^{k_l} |C_i| < \|y\|. \end{aligned}$$

Таким образом, преобразуя точку  $(B_1, \dots, B_n)$ , определенную равенством (46), с помощью равенства (47), получаем соотношения (32), (33).

Пусть  $y = \sum_{i=1}^n C_i x_i$  и  $\delta \neq \mu_1$ . Если  $\delta \neq \mu_r$  при  $r > 1$  и  $\delta > \mu_r$  при

$r = 1$ , то в силу равенства  $\mu_r = \sum_{i=1}^{k_r} |C_i| / \|y\|$

$$\|y\| \leq \frac{\sum_{i=1}^{k_r} |C_i|}{\|y\|} \leq \delta A_1.$$

Последнее неравенство всегда строгое, так как либо  $\|y\|^2 < \sum_{i=1}^{k_r} |C_i| A_i$  при  $r > 1$ , либо  $\delta > \mu_r$  при  $r = 1$ . Отсюда следуют соотношения (32), (33) для этого случая.

Предположим, что  $\mu_{l-1} \leq \delta < \mu_l$ ,  $l = 2, \dots, r$ ; тогда минимальный порядок подсистемы, удовлетворяющей условию (39), строго

больший  $k_1$ , равен  $k_l$ . Докажем, что справедливо неравенство

$$(48) \quad \frac{\sqrt{k - \delta^2}}{k_l} \sqrt{k_l \left( \|y\|^2 - \left( \sum_{i=1}^{k_l} |C_i| \right)^2 \right) + \frac{\delta}{k_l} \sum_{i=1}^{k_l} |C_i|} < \delta A_1.$$

Из этого неравенства будет следовать утверждение теоремы для случая  $y = \sum_{i=1}^n C_i x_i$ ,  $\mu_1 < \delta < \mu_r$ .

Докажем сначала, что при  $y_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, k$ , и  $\sum_{i=1}^k y_i^2 > 0$  имеет место неравенство

$$(49) \quad \frac{k \sum_{i=1}^k y_i^2 - \left( \sum_{i=1}^k y_i \right)^2}{\sum_{i=1}^k (y_i - a)^2} \leq \frac{\left( \sum_{i=1}^k y_i \right)^2}{\sum_{i=1}^k y_i^2},$$

где  $a \geq y_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Введем обозначения  $\alpha^2 = \sum_{i=1}^k y_i^2$ ,  $\beta = \sum_{i=1}^k y_i$ .

Из очевидных неравенств

$$(50) \quad \alpha^2 \leq a\beta, \quad \beta^2 \leq k\alpha^2, \quad \beta \leq ak$$

следует соотношение  $(\alpha\beta - \alpha^2)[k\alpha^2 - \beta^2 + \beta(ka - \beta)] \geq 0$ . Отсюда вытекает, что  $k\alpha^4 - \alpha^2\beta^2 \leq \beta^2\alpha^2 - 2a\beta^3 + ka^2\beta^2$ , и следовательно,

$$\frac{k\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 - 2a\beta + ka^2} \leq \frac{\beta^2}{\alpha^2}.$$

Тем самым равенство (49) доказано.

Заметим, что если хотя бы два положительных числа из  $y_1, \dots, y_k$  различны, неравенства (50), а следовательно, и неравенство (49) являются строгими.

Положив  $y_i = |C_i| - A_l$ ,  $a = A_1 - A_l$  и  $k = k_l$  от неравенства (49) придем к неравенству

$$\frac{k_l \sum_{i=1}^{k_l} C_i^2 - \left( \sum_{i=1}^{k_l} |C_i| \right)^2}{\sum_{i=1}^{k_l} (|C_i| - A_1)^2} \leq \frac{\left[ \sum_{i=1}^{k_l} (|C_i| - A_l) \right]^2}{\sum_{i=1}^{k_l} (|C_i| - A_l)^2}.$$

Вследствие того, что

$$(51) \quad \delta \geq \mu_{l-1} = \frac{\sum_{i=1}^{k_{l-1}} (|C_i| - A_l)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{k_{l-1}} (|C_i| - A_l)^2}} = \frac{\sum_{i=1}^{k_l} (|C_i| - A_l)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{k_l} (|C_i| - A_l)^2}},$$

причем при  $l = 2$  неравенство в соотношении (51) является строгим, а при  $l > 2$  хотя бы два положительных числа из  $|C_1| - A_l, \dots, |C_{k_l}| - A_l$  различны, имеем

$$\frac{k_l \sum_{i=1}^{k_l} C_i^2 - \left( \sum_{i=1}^{k_l} |C_i| \right)^2}{\sum_{i=1}^{k_l} (|C_i| - A_1)^2} < \delta^2.$$

Отсюда следует неравенство

$$(k_l - \delta^2) \left[ k_l \sum_{i=1}^{k_l} C_i^2 - \left( \sum_{i=1}^{k_l} |C_i| \right)^2 \right] < \delta^2 \left( \sum_{i=1}^{k_l} |C_i| - k_l A_1 \right)^2,$$

из которого вытекает (48).

Пусть теперь  $y = \sum_{i=1}^n C_i x_i$  и  $0 \leq \delta < \mu_1 = \sqrt{k_1}$ . Соотношения (32), (33) в этом случае следуют из легко доказываемого неравенства

$$\frac{\sqrt{k_2 - \delta^2}}{k_2} \sqrt{k_2 \sum_{i=1}^{k_2} C_i^2 - \left( \sum_{i=1}^{k_2} |C_i| \right)^2} + \frac{\delta}{k_2} \sum_{i=1}^{k_2} |C_i| > \delta A_1.$$

Рассмотрим, наконец, случай, когда  $y = \sum_{i=1}^n C_i x_i$  и  $\delta = \mu_1 = \sqrt{k_1}$ . Минимальный порядок подсистемы, удовлетворяющей условию (39), равен в этом случае  $k_2$ . Следовательно, минимальное значение функции  $\varphi(B_1, \dots, B_n)$  среди точек вида (38) есть

$$\frac{\sqrt{k_2 - k_1}}{k_2} \sqrt{k_2 \sum_{i=1}^{k_2} C_i^2 - \left( \sum_{i=1}^{k_2} |C_i| \right)^2} + \frac{\sqrt{k_1}}{k_2} \sum_{i=1}^{k_2} |C_i| = \sqrt{k_1} A_1,$$

которое достигается в единственной (среди точек вида (38)) точке

$$B_i = \begin{cases} A_2, & 1 \leq i \leq k_2, \\ |C_i|, & i > k_2. \end{cases}$$

Однако следует рассмотреть также значения функции в точках, определенных равенствами

$$(52) \quad B_i = \begin{cases} D, & 1 \leq i \leq k_1, \\ |C_i|, & i > k_1, \end{cases}$$

где  $D \in (A_2, A_1]$ . Нетрудно проверить, что для всех таких точек  $\varphi(B_1, \dots, B_n) = \sqrt{k_1} A_1$ . Таким образом, минимальное значение функции  $\varphi(B_1, \dots, B_n)$ ,  $B_i \geq 0$ , в этом случае достигается на точках, определенных равенством (52) при  $D \in [A_2, A_1]$ , и только на них.

Тем самым соотношения (32), (33) доказаны. Утверждения относительно порядка информативности и полной информативной системы следуют из леммы. Теорема доказана.  $\square$

Несколько иные постановки задач, близких к рассматриваемым, приведены в работе [4].

Поступила в редакцию  
14/III 1979 г.

### Литература

1. **С. А. Micchelli, Т. J. Rivlin** A survey of optimal recovery, Optimal estimation in approximation theory, Plenum press, New York, 1977, 1–54.
2. **А. Г. Марчук, К. Ю. Осипенко** Наилучшее приближение функций, заданных с погрешностью в конечном числе точек, Матем. заметки, **17**, вып. **3** 1975, 359–368.
3. **С. М. Никольский**, Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем, Изв. АН СССР, серия матем., **10** (1946), 207–256.
4. **В. Я. Арсенин**, Об оптимальном суммировании рядов Фурье с приближенными коэффициентами, ДАН СССР, **183**, № **2** (1968), 257–260.