УДК 517.53

НАИЛУЧШИЕ МЕТОДЫ ПРИБЛИЖЕНИЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ С ПОГРЕШНОСТЬЮ

ОСИПЕНКО К. Ю.

Введение

Пусть $L, l_1, \dots, l_n$ — линейные функционалы на вещественном линейном пространстве X, W — множество из X. В работах [1], [2] была поставлена задача о наилучшем приближении функционала L на множестве W по значениям функционалов $l_1, \dots, l_n$. Погрешностью наилучшего приближения называлась величина

$$r(L, l) = \inf_T \sup_{x \in W} |L(x) - T(lx)|,$$

где $lx = (l_1(x), \dots, l_n(x))$, а $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Метод T_0 назывался наилучшим методом приближения, если выполнялось равенство

$$\sup_{x \in W} |L(x) - T_0(lx)| = r(L, l).$$

В этих же работах было доказано, что в случае, когда W — выпуклое и центрально-симметричное множество с центром симметрии 0, имеет место равенство

$$r(L, l) = \sup_{x \in W_0} |L(x)|,$$

где $W_0 = \{x \in W : lx = 0\}$, причем среди наилучших методов существует линейный $\left(\text{т. е. имеющий вид } T(lx) = \sum_{j=1}^{n} D_j l_j(x)\right)$.

Эта задача, а также задача минимизации величины $r(L, l)$ за счет выбора функционалов $l_1, \dots, l_n$ из некоторого множества рассматривались в работах [3–9].

В работе [10] после обобщения данной постановки и соответствующих результатов на комплексный случай рассматривалась задача приближения аналитических функций по точным значениям в конечном числе точек.

В силу того, что в задачах приближения функционалы $l_1, \dots, l_n$ часто бывают известны с погрешностью, в работе [11] было предложено рассматривать задачу приближения функционала L по значениям $\widetilde{l}_1, \dots, \widetilde{l}_n$ таким, что $\widetilde{l}_i(x) = l_i(x) + \rho_i(x)$, где при всех $x \in W$ для $\rho(x) = (\rho_1(x), \dots, \rho_n(x))$ справедливо неравенство $\|\rho(x)\| \le \delta$, а

$\|\cdot\|$ — какая-либо норма в $\mathbb{R}^n$. Погрешностью наилучшего приближения в этом случае называлась величина

$$r(L,l,\delta)=\inf_T\sup_{x\in W}\sup_{\|\rho\|\leq\delta}|L(x)-T(\widetilde{l}x)|, \tag{0.1}$$

а наилучшим методом — метод, на котором достигается нижняя грань в равенстве (0.1).

Дальнейшее обобщение на бесконечномерный случай, а также многочисленные примеры применения данных задач к конкретным классам функций можно найти в работах [12–14] (см. также [15], [16]).

Сформулируем теперь результат, вытекающий из работ [10–12].

Теорема А. *Пусть $L, l_1, \dots, l_n$ — линейные функционалы на вещественном (комплексном) линейном пространстве X. Множество $W\subset X$ является выпуклым и центрально-симметричным с центром симметрии 0 (выпуклым и круговым). Тогда при всех $\delta\geq 0$:*

1) *справедливо равенство*

$$r(L,l,\delta)=\sup_{x\in W_\delta}|L(x)|,$$

где $W_\delta=\{x\in W : \|lx\|\leq\delta\}$, причем среди наилучших методов приближения существует линейный, т. е. имеющий вид

$$L(x)\approx\sum_{j=1}^n D_j(\delta)\widetilde{l}_j(x); \tag{0.2}$$

2) *если функция $\varphi_j(\varepsilon,\delta)=\sup\limits_{x\in A_j(\varepsilon,\delta)}\operatorname{Re}L(x)$ (и $\psi_j(\varepsilon,\delta)=\varphi_j(i\varepsilon,\delta)$), где $A_j(\varepsilon,\delta)=\{x\in W : \operatorname{Im}L(x)=0,\ \|lx-\varepsilon e_j\|\leq\delta\|\}$, $\{e_j\}=\begin{cases}0, & j\neq k,\\ 1, & j=k,\end{cases}$ дифференцируема в нуле по ε, то коэффициент $D_j(\delta)$ в линейном наилучшем методе (0.2) определен однозначно: $D_j(\delta)=\dfrac{\partial\varphi_j(0,\delta)}{\partial\varepsilon}$ $\left(D_j(\delta)=\dfrac{\partial\varphi_j(0,\delta)}{\partial\varepsilon}-i\dfrac{\partial\psi_j(0,\delta)}{\partial\varepsilon}\right)$;*

3) *имеет место соотношение*

$$r(L,l,\delta)=\min_{D_j\in\mathbb{R}(\mathbb{C})}\left\{\sup_{x\in W}\left|L(x)-\sum_{j=1}^n D_jl_j(x)\right|+\delta\|D\|_*\right\}, \tag{0.3}$$

где

$$\|D\|_*=\sup_{\substack{y\in\mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)\\ \|y\|\leq 1}}\left|\sum_{j=1}^n D_jy_j\right|,$$

а метод (0.2) является наилучшим тогда и только тогда, когда $D_1(\delta),\dots,D_n(\delta)$ минимизируют правую часть равенства (0.3).

Для задач приближения по функционалам $l_1, \dots, l_n$, заданным с погрешностью, характерен случай, когда информация о некоторых функционалах является лишней. Можно рассмотреть задачу приближения функционала L по приближенным значениям некоторой подсистемы функционалов $l_\tau = (l_{i_1}, \dots, l_{i_k})$, $\tau = (i_1, \dots, i_k)$, назвав погрешностью наилучшего приближения величину

$$r(L, l_\tau, \delta) = \inf_T \sup_{x \in W} \sup_{\|\rho\| \le \delta} |L(x) - T(P_\tau \widetilde{l} x)|,$$

где $T\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, а $P_\tau \widetilde{l} x = (\widetilde{l}_{i_1}, \dots, \widetilde{l}_{i_k})$. Для погрешности наилучшего приближения по подсистеме l_τ выполнено очевидное неравенство

$$r(L, l_\tau, \delta) \ge r(L, l, \delta). \tag{0.4}$$

В работе [17] было введено понятие порядка информативности системы $\mathrm{In}(l_1, \dots, l_n, \delta)$ как наименьшего числа функционалов в подсистемах, для которых соотношение (0.4) обращается в равенство. Подсистемы, обладающие этим свойством, число функционалов в которых равнялось порядку информативности, назывались полными информативными системами. Работа [17] была посвящена исследованию этих понятий для случая, когда X — гильбертово пространство.

Эффект "лишней информации" был отмечен также в работе [18], в которой изучалась задача наилучшей интерполяции на классе гладких функций по неточным данным. Результаты этой работы и результаты, полученные в данной статье, несмотря на различия исследуемых классов функций, аналогичны. Аналогия между задачами приближения по точным данным на классах гладких функций, где существенную роль играют идеальные сплайны, и задачами приближения на классах аналитических функций, где соответствующую роль играют произведения Бляшке, отмечалась в работе [14]. Оказывается, что эта аналогия сохраняется и в случае приближения по неточным данным.

Следует отметить, что ситуация, когда информация о некоторых из функционалов не уменьшает погрешности наилучшего приближения, имеет место и для приближения по точным данным, хотя, видимо, не столь характерна, как в случае приближения по неточным данным. Так, например, если через $W^{(2n)}(M; a, b)$ обозначить класс функций, определенных на отрезке $[a, b]$ и удовлетворяющих неравенству $|f^{(2n)}(x)| \le M$, $x \in [a, b]$, то наилучшим методом приближения функционала $L(f) = \displaystyle\int_a^b f(x)p(x)\,dx$, $p(x) > 0$, по точным значениям $f(x_1), f'(x_1), \dots, f(x_n), f'(x_n)$ является проинтегрированная интерполяционная формула Эрмита

$$\int_a^b f(x)p(x)\,dx \approx \sum_{j=1}^n C_j f(x_j) + \sum_{j=1}^n D_j f'(x_j) \tag{0.5}$$

с погрешностью

$$r(x_1,\dots,x_n) = \frac{M}{(2n)!}\int_a^b \prod_{j=1}^{n}(x-x_j)^2 p(x)\,dx.$$

Этот результат нетрудно получить, используя метод, описанный в работе [11] (коэффициенты C_j и D_j легко выписываются в явном виде).

Если теперь рассмотреть оптимальную квадратурную формулу (оптимальным называют метод, погрешность которого минимизирована за счет выбора узлов), то коэффициенты D_j обратятся в нуль, и в полученной формуле, являющейся квадратурной формулой Гаусса, информация о значениях $f'(x_1^0),\dots,f'(x_n^0)$ учитываться не будет. Интересно, что аналогичная ситуация возникает при построении оптимальной квадратурной формулы на классе аналитических функций (см. [5]).

Рассмотрим постановку задачи, которая будет исследоваться в данной работе. Пусть B — класс аналитических в единичном круге $K=\{z:|z|<1\}$ функций, удовлетворяющих условию $|f(z)|\le 1$, $z\in K$. Положим в (0.1) $W=B$, $L(f)=f(z_0)$, $l_j(f)=f(z_j)$, $j=1,\dots,n$, где $z_0\in K$, $z_1,\dots,z_n$ — различные точки из круга K, а $\|\rho\|=\max\limits_j|\rho_j|$. Погрешность наилучшего приближения в силу этого будем обозначать через $r(z_0,z_1,\dots,z_n,\delta)$. Требуется найти величину $r(z_0,z_1,\dots,z_n,\delta)$, наилучший метод приближения, порядок информативности системы $f(z_1),\dots,f(z_n)$, который будем обозначать через $\operatorname{In}(z_0,z_1,\dots,z_n,\delta)$, и полные информативные системы (узлы). Будем рассматривать поставленную задачу для случая, когда точки $z_0,z_1,\dots,z_n$ лежат на вещественной оси.

В сформулированной задаче большую роль играет обобщенная экстремальная задача Хейнса–Уолша (см. [19]) о нахождении величины

$$\sup_{\substack{f\in B\\ |f(z)|\le\delta<1,\ z\in E}} |f(z_0)|. \tag{0.6}$$

Теорема B. *Пусть $E\subset(-1,1)$ — замкнутое множество. При $\delta>0$ экстремальная функция $f^*(z)$ в задаче (0.6), где $z_0\in(-1,1)\setminus E$, единственна с точностью до множителя $e^{i\alpha}$, $\alpha\in\mathbb{R}$, и имеет вид*

$$f^*(z)=e^{i\alpha}\prod_{j=1}^{m}\frac{z-\alpha_j}{1-\alpha_j z},\quad \alpha_j\in(-1,1).$$

При этом существует множество $D_N=\{z_1,\dots,z_N\}$, $z_j\in E$, такое, что $|f(z)|=\delta$, $z\in D_N$, и решение задачи (0.6) на множестве E совпадает с решением на множестве D_N.

Доказательство. Из теоремы 4.7 работы [19] следует, что экстремальная функция $f^*(z)$ в задаче (0.6) единственна с точностью до множителя $e^{i\alpha}$ и имеет вид

$$f^*(z) = e^{i\alpha} \prod_{j=1}^{m} \frac{z-\alpha_j}{1-\overline{\alpha}_j z}, \quad |\alpha_j| < 1.$$

Существование множества D_N вытекает из теоремы 6.1 той же работы. Остается доказать вещественность нулей $f^*(z)$. Рассмотрим функцию

$$g(z) = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{m} \frac{z-\alpha_j}{1-\overline{\alpha}_j z} \cdot \frac{z-\overline{\alpha}_k}{1-\alpha_k z}.$$

Из очевидного равенства при $z \in (-1, 1)$

$$\left| \frac{z-\overline{\alpha}_k}{1-\alpha_k z} \right| = \left| \frac{z-\alpha_k}{1-\overline{\alpha}_k z} \right|$$

следует, что $g(z)$ также является экстремальной функцией в задаче (0.6). Таким образом, при некотором $\beta \in \mathbb{R}$ должно выполняться равенство $e^{i\beta} g(z) = f^*(z)$, из которого следует, что $\alpha_k = \overline{\alpha}_k$. Теорема доказана. $\square$

§1. Погрешность наилучшего приближения и порядок информативности

Докажем сначала несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 1.1. *Положим*

$$B_1(z) = e^{i\alpha} \prod_{j=1}^{n} \frac{z-\alpha_j}{1-\overline{\alpha}_j z}, \ |\alpha_j| < 1, \quad B_2(z) = e^{i\beta} \prod_{j=1}^{k} \frac{z-\beta_j}{1-\overline{\beta}_j z}, \ |\beta_j| < 1.$$

Пусть разность $\Phi(z) = B_1(z) - B_2(z)$ обращается в нуль в l точках на единичной окружности $|z| = 1$. Тогда если $B_1(z) \not\equiv B_2(z)$, то число нулей m (с учетом кратности) функции $\Phi(z)$ в круге $K = \{z : |z| < 1\}$ удовлетворяет неравенству

$$m \leq \frac{n+k-l}{2}. \tag{1.1}$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что

$$\Phi(z) = p(z) \left[\prod_{j=1}^{n} (1-\overline{\alpha}_j z) \prod_{j=1}^{k} (1-\overline{\beta}_j z) \right]^{-1},$$

где

$$p(z) = e^{i\alpha} \prod_{j=1}^{n} (z-\alpha_j) \prod_{j=1}^{k} (1-\overline{\beta}_j z) - e^{i\beta} \prod_{j=1}^{k} (z-\beta_j) \prod_{j=1}^{n} (1-\overline{\alpha}_j z).$$

При всех $z \neq 0$ имеем

$$\overline{p\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)} = -e^{-i(\alpha+\beta)}p(z)z^{-(n+k)}. \tag{1.2}$$

В силу того, что $p(z)$ является многочленом степени не выше $n+k$, справедливо представление

$$p(z) = Cz^p\prod_{j=1}^{s}(z-a_j)^{k_j}, \quad p+\sum_{j=1}^{s}k_j \leq n+k,$$

где $a_1, \ldots, a_s$ различны и не равны нулю. Из равенства (1.2) имеем

$$\overline{C}z^{-p}\prod_{j=1}^{s}\left(\frac{1}{z}-\overline{a}_j\right)^{k_j} = -e^{-i(\alpha+\beta)}z^{-(n+k)}Cz^p\prod_{j=1}^{s}(z-a_j)^{k_j}.$$

Отсюда получаем

$$z^{n+k}\prod_{j=1}^{s}\left(z-\frac{1}{\overline{a}_j}\right)^{k_j} = z^{2p+\sum\limits_{j=1}^{s}k_j}\prod_{j=1}^{s}(z-a_j)^{k_j}.$$

Следовательно, $n+k = 2p+\sum\limits_{j=1}^{s}k_j$ и, если a_j — корень $p(z)$ кратности k_j, то $\overline{a}_j^{-1}$ также корень кратности k_j. Пусть r — число нулей функции $\Phi(z)$, а следовательно, и функции $p(z)$, лежащих в круге K и отличных от нуля. Тогда

$$p+2r+l \leq p+\sum_{j=1}^{s}k_j = n+k-p.$$

Из последнего соотношения, учитывая, что общее число нулей в круге K равно $p+r$, получаем неравенство (1.1). Лемма доказана. $\square$

Лемма 1.2. *Пусть* $-1 < a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < a_3 < b_3 < 1$, $z_0 \in (b_2, a_3)$ *и* $f(z) = \dfrac{z-\alpha_1}{1-\alpha_1 z}\cdot\dfrac{z-\alpha_2}{1-\alpha_2 z}$, *где* $b_1 < \alpha_1 \leq \alpha_2 < a_2$. *Тогда существует функция* $g(z) \in B$, *удовлетворяющая неравенствам*

$$|g(z)| \leq |f(z)|, \ z \in [a_i, b_i], \ i = 1,2,3, \quad |g(z_0)| > |f(z_0)|. \tag{1.3}$$

При $b_2 < \alpha_1 \leq \alpha_2 < a_3$ *и* $z_0 \in (b_1, a_2)$ *также существует функция* $g(z) \in B$, *удовлетворяющая неравенствам* (1.3).

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда $b_1 < \alpha_1 < \alpha_2 < a_2$ и $z_0 \in (b_2, a_3)$. Положим $z_1 = b_2$, $z_2 = a_3$,

$$A_i = f(z_i), \quad A_i(\beta) = A_i\frac{1-\beta z_i}{\beta - z_i}, \quad i = 1,2.$$

Покажем, что при β, достаточно близких к единице, существуют γ_1, γ_2, близкие к α_1, α_2, такие, что

$$\frac{z_i-\gamma_1}{1-\gamma_1 z_i}\cdot\frac{z_i-\gamma_2}{1-\gamma_2 z_i}=A_i(\beta),\quad i=1,2. \tag{1.4}$$

Равенства (1.4) эквивалентны системе

$$z_i\left[A_i(\beta)-1\right]p+\left[1-A_i(\beta)z_i^2\right]q=A_i(\beta)-z_i^2,\quad i=1,2,$$

где $p=\gamma_1+\gamma_2$, $q=\gamma_1\gamma_2$. Можно убедиться, что определитель этой системы при $\beta\to 1$ стремится к величине, отличной от нуля. Следовательно, при β, достаточно близких к единице, значения p и q будут определены и близки к значениям $\alpha_1+\alpha_2$ и $\alpha_1\alpha_2$. В силу того, что $\alpha_1\neq\alpha_2$, при β, достаточно близких к единице, $p^2-4q>0$. Таким образом, γ_1, γ_2 будут вещественны и близки к α_1, α_2. Выберем $\beta\in(b_3,1)$ так, чтобы $\gamma_1,\gamma_2\in(b_1,a_2)$.

Рассмотрим теперь функцию

$$g(z)=\frac{z-\gamma_1}{1-\gamma_1 z}\cdot\frac{z-\gamma_2}{1-\gamma_2 z}\cdot\frac{\beta-z}{1-\beta z}.$$

Вследствие выбора γ_1, γ_2 разность $g(z)-f(z)$ обращается в нуль при $z=b_2,a_3,-1$. Из леммы 1.1 следует, что в круге K у этой разности лишь два корня b_2 и a_3 (оба кратности единица). Следовательно, $g(z)-f(z)\leq 0$ при $z\in[a_i,b_i]$, $i=1,2,3$, и $g(z)-f(z)>0$ при $z\in(b_2,a_3)$. Из того, что $\gamma_1,\gamma_2\in(b_1,a_2)$, а $\beta\in(b_3,1)$, вытекает неравенство $g(z)>0$ при $z\in[a_i,b_i]$, $i=1,2,3$. Тем самым неравенства (1.3) для функции $g(z)$ доказаны.

Пусть теперь $b_1<\alpha_1=\alpha_2<a_2$, $z_0\in(b_2,a_3)$. Рассмотрим функцию

$$f_1(z)=\frac{f(z)-\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2 f(z)}=\frac{z-\widetilde{\alpha}_1}{1-\widetilde{\alpha}_1 z}\cdot\frac{z-\widetilde{\alpha}_2}{1-\widetilde{\alpha}_2 z},$$

где $\widetilde{\alpha}_1=\dfrac{\alpha_1+\varepsilon}{1+\varepsilon\alpha_1}$, $\widetilde{\alpha}_2=\dfrac{\alpha_1-\varepsilon}{1-\varepsilon\alpha_1}$. При достаточно малых $\varepsilon>0$ будут выполнены неравенства $b_1<\widetilde{\alpha}_1<\widetilde{\alpha}_2<a_2$. Следовательно, найдется функция $g_1(z)\in B$ такая, что

$$0<g_1(z)\leq f_1(z),\ z\in[a_i,b_i],\ i=1,2,3,\quad g_1(z_0)>f_1(z_0). \tag{1.5}$$

Рассмотрим функцию $g(z)=\dfrac{g_1(z)+\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2 g_1(z)}$. Из неравенств (1.5) и того, что $f(z)=\dfrac{f_1(z)+\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2 f_1(z)}$, следует справедливость неравенств (1.5) для функций $g(z)$ и $f(z)$, а тем самым справедливость соотношений (1.3) для рассматриваемого случая.

Пусть $b_2<\alpha_1\leq\alpha_2<a_3$, $z_0\in(b_1,a_2)$. Рассматривая отрезки $[-b_i,-a_i]$, $i=1,2,3$, точку $-z_0\in(-a_2,-b_1)$ и функцию

$f_1(z) = \dfrac{z+\alpha_1}{1+\alpha_1 z} \cdot \dfrac{z+\alpha_2}{1+\alpha_2 z}$, можно построить функцию $g_1(z) \in B$, удовлетворяющую неравенствам

$$|g_1(z)| \le |f_1(z)|,\ z \in [-b_i, -a_i],\ i = 1,2,3, \quad |g_1(-z_0)| > |f_1(-z_0)|.$$

Нетрудно видеть, что функция $g(z) = g_1(-z)$ будет удовлетворять неравенствам (1.3), так как $f(z) = -f_1(-z)$. Лемма доказана. □

Лемма 1.3. *Пусть* $-1 < a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < 1$, $z_0 \in (b_1, a_2)$ *и* $f(z) = \dfrac{z-\alpha}{1-\alpha z}$, *где* $\alpha \in (b_1, a_2)$. *Тогда существует функция* $g(z) \in B$, *удовлетворяющая неравенствам*

$$(1.6) \qquad |g(z)| \le |f(z)|,\ z \in [a_i, b_i],\ i = 1,2, \quad |g(z_0)| > |f(z_0)|.$$

Доказательство. Предположим, что $\alpha \le z_0$. Положим

$$\gamma = \frac{a_2 - A}{1 - Aa_2}, \quad A = \frac{a_2-\alpha}{1-\alpha a_2} \cdot \frac{1-\beta a_2}{\beta - a_2}.$$

В силу того, что $\gamma \to \alpha - 0$, если $\beta \to 1-0$, можно выбрать $\beta \in (b_2, 1)$ так, чтобы $\gamma \in (b_1, \alpha)$. Рассмотрим функцию

$$g(z) = \frac{z-\gamma}{1-\gamma z} \cdot \frac{\beta - z}{1-\beta z}.$$

Вследствие выбора γ разность $g(z) - f(z)$ обращается в нуль при $z = a_2, -1$. Из леммы 1.1 следует, что в круге K у этой разности лишь один корень a_2. Следовательно, $f(z) - g(z) \ge 0$ при $a_2 \le z < 1$ и $f(z) - g(z) \le 0$ при $-1 < z \le a_2$. Так как $g(z) > 0$ при $z \in (\gamma, b_2)$, имеем

$$|g(z)| \le |f(z)|,\ z \in [a_2, b_2], \quad |g(z_0)| > |f(z_0)|.$$

Неравенство $|g(z)| \le |f(z)|$, $z \in [a_1, b_1]$, следует из того, что $f(z) \le g(z) < 0$ при $z \in (-1, b_1]$.

Случай $\alpha > z_0$ рассматривается путем перехода к отрезкам $[-b_i, -a_i]$, $i = 1, 2$, аналогично тому, как это было сделано при доказательстве леммы 1.2. Лемма доказана. □

Обозначим через B_0 класс функций из B, вещественных на интервале $(-1, 1)$.

Лемма 1.4. *Пусть* $-1 = z_0 < z_1 < \ldots < z_n < z_{n+1} = 1$.

1) *Если функция* $f(z) \in B_0$, *удовлетворяющая условиям*

$$(1.7) \qquad f(z_j) = \delta_j^{(0)}, \quad j = 1, \ldots, n,$$

единственна, то она имеет вид

$$f(z) = \lambda \prod_{j=1}^{k} \frac{z - \alpha_j}{1 - \overline{\alpha}_j z}, \quad |\alpha_j| < 1,$$

где $k < n$, *а* $\lambda = 1$ *или* -1.

2) *Если множество функций из* B_0, *удовлетворяющих условиям* (1.7), *содержит более одной функции, то оно содержит функцию вида*

$$g_0(z) = (-1)^{n+p} \prod_{j=1}^{n} \frac{z-\alpha_j}{1-\overline{\alpha}_j z}, \quad |\alpha_j| < 1, \quad 0 \le p \le n, \tag{1.8}$$

которая может быть получена из рекуррентных соотношений

$$g_{m-1}(z) = \left[\frac{z-z_m}{1-z_m z} g_m(z) + \delta_m^{(m-1)}\right] \left[1 + \delta_m^{(m-1)} \frac{z-z_m}{1-z_m z} g_m(z)\right]^{-1}, \tag{1.9}$$

где $g_n(z) = (-1)^{n+p}$,

$$\delta_k^{(m)} = \frac{1-z_m z_k}{z_k - z_m} \cdot \frac{\delta_k^{(m-1)} - \delta_m^{(m-1)}}{1-\delta_m^{(m-1)} \delta_k^{(m-1)}}, \; k = m+1, \ldots, n, \; m = 1, \ldots, n-1.$$

3) *Если функция* $g_0 \in B_0$ *имеет вид* (1.8), *то для любой функции* $g(z) \in B_0$, *удовлетворяющей условиям*

$$\begin{gathered} (-1)^{j+p}[g(z_j) - g_0(z_j)] \le 0, \quad j = 1, \ldots, p, \\ (-1)^{j+p+1}[g(z_j) - g_0(z_j)] \le 0, \quad j = p+1, \ldots, n, \end{gathered} \tag{1.10}$$

и для любого $z^* \in (z_p, z_{p+1})$ *справедливо неравенство*

$$g(z^*) \le g_0(z^*).$$

Доказательство. Для того чтобы существовала функция $f(z) \in B_0$, удовлетворяющая условиям (1.7), необходимо и достаточно выполнение одного из следующих двух условий:

$$|\delta_1^{(0)}| < 1, \ldots, |\delta_k^{(k-1)}| < 1, \quad |\delta_{k+1}^{(k)}| = 1, \quad \delta_{k+1}^{(k)} = \ldots = \delta_n^{(k)}; \tag{1.11}$$

$$|\delta_1^{(0)}| < 1, \ldots, |\delta_n^{(n-1)}| < 1. \tag{1.12}$$

В случае выполнения условий (1.11) функция $f(z)$ единственна и получается из формул (1.9) при $m = 1, \ldots, k$, где $g_k(z) = \delta_{k+1}^{(k)}$, а $f(z) = g_0(z)$. В случае выполнения условий (1.12) функция $f(z)$ не единственна. Все такие функции и только такие функции получаются из формул (1.9), где $g_n(z)$ — произвольная функция из B_0, а $f(z) = g_0(z)$. Эти утверждения очевидным образом вытекают из соответствующих утверждений для класса B (см. [20, с. 344]).

Для доказательства первых двух пунктов леммы остается доказать, что для функции

$$g(z) = \frac{B_m(z) + \alpha}{1 + \alpha B_m(z)}, \quad \alpha \in (-1, 1),$$

где $B_m(z) \in B_0$ и имеет вид

$$B_m(z) = \lambda \prod_{j=1}^{m} \frac{z-\beta_j}{1-\overline{\beta}_j z}, \quad |\beta_j| < 1,$$

а $\lambda = 1$ или -1, справедливо представление

$$g(z) = \lambda \prod_{j=1}^{m} \frac{z-\alpha_j}{1-\overline{\alpha}_j z}, \quad |\alpha_j| < 1.$$

Последнее нетрудно установить, пользуясь равенством $\overline{B_m(1/\overline{z})} = B_m^{-1}(z)$.

Пусть существует более одной функции из класса B_0, удовлетворяющей равенствам (1.7). Положим $\varphi(t) = g_0(z^*)$, где $g_0(z^*)$ определяется из равенств (1.9) при $g_n(z^*) = t$. Имеем

$$\varphi'(t) = \prod_{j=1}^{n} \frac{z^*-z_j}{1-z_j z^*} \left[1 - \left(\delta_j^{(j-1)}\right)^2\right] \left[1 + \delta_j^{(j-1)} \frac{z^*-z_j}{1-z_j z^*} g_j(z^*)\right]^{-2}.$$

Таким образом, при $z^* \in (z_p, z_{p+1})$ функция $\varphi(t)$ принимает максимальное значение на отрезке $[-1,1]$ в точке $t = (-1)^{n+p}$. Следовательно, среди всех функций из класса B_0, удовлетворяющих равенствам (1.7) (если существует более одной такой функции), максимальное значение в точке $z^* \in (z_p, z_{p+1})$ принимает функция вида (1.8).

Предположим, что для некоторой функции $g(z) \in B_0$, удовлетворяющей условиям (1.10), где $g_0(z) \in B_0$ и имеет вид (1.8), выполняется неравенство $g(z^*) > g_0(z^*)$. Покажем, что разность $\Phi(z) := g(z) - g_0(z)$ при $z \in (-1,1)$ имеет не менее n нулей. Положим $u_j = z_j$, $j = 1,\ldots,p$, $u_{p+1} = z^*$, $u_j = z_{j-1}$, $j = p+2,\ldots,n+1$. Тогда $(-1)^{j+p}\Phi(u_j) \le 0$, $j = 1,\ldots,n+1$. Если

$$\Phi(u_k) \ne 0, \quad \Phi(u_{k+1}) = \ldots = \Phi(u_{k+s}) = 0, \quad \Phi(u_{k+s+1}) \ne 0, \tag{1.13}$$

то $\Phi(u_k)$ и $(-1)^{s+1}\Phi(u_{k+s+1})$ имеют одинаковые знаки. Поэтому число нулей разности $\Phi(z)$ в интервале (u_k, u_{k+s+1}) имеет ту же четность, что и число $s+1$. Из (1.13) следует, что число нулей в интервале (u_k, u_{k+s+1}) есть по крайней мере $s+1$. Если $\Phi(u_1) = \ldots = \Phi(u_{k-1}) = 0$, $\Phi(u_k) \ne 0$ или $\Phi(u_{n-k+2}) \ne 0$, $\Phi(u_{n-k+3}) = \ldots = \Phi(u_{n+1}) = 0$, то на промежутке $[u_1, u_k)$ или, соответственно, $(u_{n-k+2}, u_{n+1}]$ число нулей есть по крайней мере $k-1$. Тем самым доказано, что функция $\Phi(z)$ имеет не менее n нулей в интервале $(-1,1)$.

Если множество функций из класса B_0, принимающих в точках z_j значения $g(z_j)$, состоит лишь из одной функции $g(z)$, то, как было показано,

$$g(z) = \lambda \prod_{j=1}^{k} \frac{z-\beta_j}{1-\overline{\beta}_j z},$$

где $k < n$. Из леммы 1.1 следует, что число нулей функции $\Phi(z) = g(z) - g_0(z)$ в круге K должно быть меньше n.

Если множество функций из класса B_0, принимающих в точках z_j значения $g(z_j)$, состоит более, чем из одной функции, то в нем содержится функция вида

$$g_1(z) = (-1)^{n+p} \prod_{j=1}^{n} \frac{z-\beta_j}{1-\overline{\beta}_j z},$$

для которой $g_1(z^*) \geq g(z^*) > g_0(z^*)$. Следовательно, разность $\Phi_1(z) = g_1(z) - g_0(z)$ имеет не менее n нулей в интервале $(-1,1)$. По лемме 1.1 число нулей функции $\Phi_1(z)$ в круге K меньше n (имеется два корня $z = \pm 1$ на окружности $|z| = 1$). Полученные противоречия доказывают п. 3 леммы. Лемма доказана. □

Теорема 1.1. *Пусть* $E = \{z_1, \ldots, z_n\}$, $E \subset (-1,1)$, $z_0 \in (-1,1) \setminus E$ *и* $z_1 < \ldots < z_n$. *Функция*

$$f^*(z) = \lambda \prod_{j=1}^{m} \frac{z-\alpha_j}{1-\alpha_j z}, \quad \alpha_j \in (-1,1),$$

нормированная условием $f^*(z_0) > 0$, *является экстремальной в задаче* (0.6) *тогда и только тогда, когда при всех* $z \in E$ *выполнено неравенство* $|f^*(z)| \leq \delta$ *и найдутся точки* $z_{i_1} < \ldots < z_{i_m}$ *такие, что*

$$f^*(z_{i_k}) = \begin{cases} (-1)^{p+k}\delta, & k = 1, \ldots, p, \\ (-1)^{p+k+1}\delta, & k = p+1, \ldots, m, \end{cases} \tag{1.14}$$

где p *таково, что* $z_0 \in (z_{i_p}, z_{i_{p+1}})$, *а* $\lambda = (-1)^{m+p}$; *здесь* $z_{i_0} = -1$, $z_{i_{m+1}} = 1$.

Доказательство. Пусть $f^*(z)$ — экстремальная функция в задаче (0.6), нормированная условием $f^*(z_0) > 0$. При $\delta = 0$ утверждение теоремы следует из равенства

$$f^*(z) = (-1)^{n+p} \prod_{j=1}^{n} \frac{z-z_j}{1-z_j z}$$

(см. [10]), где p таково, что $z_0 \in (z_p, z_{p+1})$. Пусть $0 < \delta < 1$. Из теоремы B следует, что найдутся такие точки $u_1 < \ldots < u_N$, $u_j \in E$, для которых $|f^*(u_j)| = \delta$, $j = 1, \ldots, N$, и решения задачи (0.6) на множествах E и $D = \{u_1, \ldots, u_N\}$ совпадают. Положим $u_0 = -1$, $u_{N+1} = l$. Пусть s таково, что $z_0 \in (u_s, u_{s+1})$. Покажем, что $f^*(z)$ не имеет нулей при $z \in (u_s, u_{s+1})$. Пусть при некотором j $\alpha_j \in (u_s, u_{s+1})$. Введем обозначения

$$a_1 = [\min(u_1, z_0, \alpha_j) - 1]/2, \quad b_1 = [\max(z_0, \alpha_j) + \max(u_s, a_1)]/2,$$
$$b_2 = [\max(u_N, z_0, \alpha_j) + 1]/2, \quad a_2 = [\max(z_0, \alpha_j) + \min(u_{s+1}, b_2)]/2.$$

Поскольку $D \subset [a_1, b_1] \cup [a_2, b_2]$ и $\alpha_j, z_0 \in (b_1, a_2)$, то в силу леммы 1.3 найдется функция $g(z) \in B$ такая, что

$$|g(z)| \leq \left|\frac{z - \alpha_j}{1 - \alpha_j z}\right|, \ z \in D, \quad |g(z_0)| > \left|\frac{z_0 - \alpha_j}{1 - \alpha_j z_0}\right|. \tag{1.15}$$

Рассмотрим функцию

$$f_1(z) = g(z) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{m} \frac{z - \alpha_i}{1 - \alpha_i z}.$$

Из (1.15) имеем

$$|f_1(z)| \leq \delta, \ z \in D, \quad |f_1(z_0)| > |f^*(z_0)|, \tag{1.16}$$

т.е. $f^*(z)$ не является экстремальной функцией. Полученное противоречие показывает, что в интервале (u_s, u_{s+1}) нет нулей функции $f^*(z)$.

Покажем теперь, что между любыми двумя нулями функции $f^*(z)$ найдется по крайней мере одна точка из множества D. Пусть $\alpha_i \leq \alpha_j$ и в интервале (α_i, α_j) нет точек множества D. Тогда найдется k, $0 \leq k \leq N$, такое, что $u_k < \alpha_i \leq \alpha_j < u_{k+1}$. Очевидно, что $k \neq s$, так как на интервале (u_s, u_{s+1}) нет нулей функции $f^*(z)$. Пусть $k < s$. Положим

$$a_1 = (\min(u_1, \alpha_i) - 1)/2, \quad b_1 = (\max(u_k, a_1) + \alpha_i)/2,$$
$$a_2 = (\alpha_j + u_{k+1})/2, \quad b_2 = (u_s + z_0)/2,$$
$$b_3 = (\max(u_N, z_0) + 1)/2, \quad a_3 = (z_0 + \min(u_{s+1}, b_3)/2.$$

Тогда $D \subset [a_1, b_1] \cup [a_2, b_2] \cup [a_3, b_3]$, $\alpha_i, \alpha_j \in (b_1, a_2)$, а $z_0 \in (b_2, a_3)$. По лемме 1.2 найдется функция $g(z) \in B$ такая, что

$$|g(z)| \leq \left|\frac{z - \alpha_i}{1 - \alpha_i z} \frac{z - \alpha_j}{1 - \alpha_j z}\right|, \ z \in D, \quad |g(z_0)| > \left|\frac{z_0 - \alpha_i}{1 - \alpha_i z_0} \frac{z_0 - \alpha_j}{1 - \alpha_j z_0}\right|.$$

Положим

$$f_1(z) = g(z) \prod_{\substack{r=1 \\ r \neq i,j}}^{m} \frac{z - \alpha_r}{1 - \alpha_r z}.$$

Для функции $f_1(z)$ выполнены неравенства (1.16), что противоречит экстремальности $f^*(z)$. Аналогично рассматривается случай $k > s$.

Итак, доказано, что все нули функции $f^*(z)$ простые и между любыми двумя найдется хотя бы одна точка множества D.

Пусть нули функции $f^*(z)$ упорядочены по возрастанию: $\alpha_1 < \ldots < \alpha_m$ и $z_0 \in (\alpha_p, \alpha_{p+1})$, $0 \leq p \leq m$ $(\alpha_0 = -1, \ \alpha_{m+1} = 1)$. Поскольку в интервале (u_s, u_{s+1}) нет нулей функции $f^*(z)$, то $\alpha_p \leq u_s < z_0 < u_{s+1} \leq \alpha_{p+1}$. Положим $z_{i_p} = u_s$, $z_{i_{p+1}} = u_{s+1}$. В каждом интервале (α_k, α_{k+1}), $k = 1, \ldots, p-1$, (α_{k-1}, α_k), $k = p+2, \ldots, m$, найдется точка $z_{i_k} \in D$. Нетрудно видеть, что в точках $z_{i_1}, \ldots, z_{i_m}$

будут выполнены равенства (1.14). Равенство $\lambda = (-1)^{m+p}$ вытекает из нормировки $f^*(z_0) > 0$.

Пусть есть функция

$$f^*(z) = \lambda \prod_{j=1}^{m} \frac{z - \alpha_j}{1 - \alpha_j z}$$

такая, что $|f^*(z)| \le \delta$, $z \in E$, и существуют точки $z_{i_1} < \ldots < z_{i_m}$, $z_{i_k} \in E$, удовлетворяющие условию (1.14), причем $\lambda = (-1)^{m+p}$. Из теоремы В следует, что в задаче о нахождении величины

$$R = \sup_{\substack{f \in B \\ |f(z_{i_k})| \le \delta,\ k=1,\ldots,m}} |f(z_0)| \tag{1.17}$$

существует экстремальная функция из класса B_0. Таким образом, из п. 3 леммы 1.4 вытекает, что $f^*(z)$ является экстремальной функцией в задаче (1.17). В силу очевидного неравенства

$$R \ge \sup_{\substack{f \in B \\ |f(z)| \le \delta,\ z \in E}} |f(z_0)|$$

и того, что $|f^*(z)| \le \delta$, $z \in E$, функция $f^*(z)$ является экстремальной и в задаче (0.6). Теорема доказана. □

Теорема 1.2. *Пусть $z_1, \ldots, z_n$ — различные точки из интервала $(-1, 1)$, $E = \{z_1, \ldots, z_n\}$ и $z_0 \in (-1, 1)$. Для порядка информативности справедливо равенство*

$$\operatorname{In}(z_0, z_1, \ldots, z_n, \delta) = \begin{cases} 0 & \text{при } \delta \ge 1, \\ 1 & \text{при } 0 \le \delta < 1,\ z_0 \in E, \\ m & \text{при } 0 \le \delta < 1,\ z_0 \notin E, \end{cases} \tag{1.18}$$

где m — число листов многолистного круга, на который экстремальная функция $f^*(z)$ в задаче (0.6) отображает единичный круг K.

При $0 \le \delta < 1$ и $z_0 = z_k$, $1 \le k \le n$, единственной полной информативной системой является система из одной точки z_k. При $0 \le \delta < 1$ и $z_0 \notin E$ точки $z_{i_1} < \ldots < z_{i_m}$ являются полной информативной системой тогда и только тогда, когда для экстремальной функции $f^*(z)$, нормированной условием $f^*(z) > 0$, выполняется равенство (1.14), где $z_0 \in (z_{i_p}, z_{i_{p+1}})$ $(z_{i_0} = -1,\ z_{i_{m+1}} = 1)$.

Доказательство. Из теоремы А следует равенство

$$r(z_0, z_1, \ldots, z_n, \delta) = \sup_{\substack{f \in B \\ |f(z)| \le \delta,\ z \in E}} |f(z_0)|. \tag{1.19}$$

При $\delta \ge 1$ $r(z_0, z_1, \ldots, z_n, \delta) = 1$ и утверждение теоремы очевидно. Пусть $0 \le \delta < 1$ и $z_0 = z_k$, $1 \le k \le n$. Из равенства (1.19) следует, что

$$r(z_0, z_1, \ldots, z_n, \delta) = r(z_0, z_k, \delta) = \delta.$$

С другой стороны, при $l \neq k$ функция

$$f(z) = \frac{\delta + W(z)}{1 + \delta W(z)}, \text{ где } W(z) = \frac{z - z_l}{1 - z_l z} \operatorname{sign} \frac{z_0 - z_l}{1 - z_l z_0}$$

принадлежит классу B и удовлетворяет условию $f(z_l) = \delta$. Следовательно,

$$r(z_0, z_l, \delta) \geq f(z_0) > \delta.$$

Пусть теперь $0 \leq \delta < 1$, $z_0 \notin E$, а m — число листов многолистного круга, на который экстремальная функция $f^*(z)$ в задаче (0.6) отображает единичный круг. По теореме 1.1 найдутся точки $z_{i_1} < \ldots < z_{i_m}$ такие, что решения задачи (0.6) на множествах E и $E_1 = \{z_{i_1}, \ldots, z_{i_m}\}$ совпадают. Таким образом,

$$r(z_0, z_{i_1}, \ldots, z_{i_m}, \delta) = r(z_0, z_1, \ldots, z_n, \delta).$$

Для любых узлов $z_{j_1}, \ldots, z_{j_k}$, $k < m$, из теоремы 1.1 имеем

$$r(z_0, z_{j_1}, \ldots, z_{j_k}, \delta) = \prod_{j=1}^{l} \left| \frac{z_0 - \beta_j}{1 - \beta_j z_0} \right|,$$

где $l \leq k$. В силу единственности экстремальной функции с точностью до множителя $e^{i\alpha}$ имеем

$$r(z_0, z_{j_1}, \ldots, z_{j_k}, \delta) > r(z_0, z_1, \ldots, z_n, \delta).$$

Тем самым равенство (1.18) доказано.

Система $z_{i_1} < \ldots < z_{i_m}$ является полной информативной системой тогда и только тогда, когда решения задачи (0.6) на множествах E и E_1 совпадают. Последнее имеет место тогда и только тогда, когда для точек $z_{i_1}, \ldots, z_{i_m}$ и экстремальной функции $f^*(z)$, нормированной условием $f^*(z) > 0$, справедливы равенства (1.14). Теорема доказана. □

2. Наилучший метод приближения

Задача построения линейного наилучшего метода приближения значения $f(z_0)$ по значениям $f(z_1), \ldots, f(z_n)$, заданным с погрешностью δ, на классе функций B эквивалентна соответствующей задаче на классе B_0 в силу следующей теоремы.

Теорема 2.1. *Если точки $z_0, z_1, \ldots, z_n$ лежат в интервале $(-1, 1)$, то метод*

$$f(z_0) \approx \sum_{j=1}^{n} D_j(\delta) \widetilde{f}(z_j) \tag{2.1}$$

является наилучшим методом приближения значения $f(z_0)$ по значениям $f(z_1), \ldots, f(z_n)$, заданным с погрешностью δ, на классе B тогда и только тогда, когда он является наилучшим методом для соответствующей задачи на классе B_0.

Доказательство. Обозначим погрешность наилучшего приближения на классе B_0 через $r_0(z_0, z_1, \ldots, z_n, \delta)$. В силу теоремы B существует экстремальная функция в задаче (0.6), принадлежащая классу B_0. Из теоремы A имеем

$$r(z_0, z_1, \ldots, z_n, \delta) = r_0(z_0, z_1, \ldots, z_n, \delta) = R;$$

кроме того, из той же теоремы следует, что

$$\min_{C_j \in S}\left[\sup_{f \in H}\left|f(z_0) - \sum_{j=1}^{n} C_j f(z_j)\right| + \delta \sum_{j=1}^{n} |C_j|\right] = R \tag{2.2}$$

для $H = B$, $S = \mathbb{C}$ и $H = B_0$, $S = \mathbb{R}$; причем метод (2.1) является наилучшим для соответствующего класса тогда и только тогда, когда коэффициенты $D_1(\delta), \ldots, D_n(\delta)$ минимизируют левую часть равенства (2.2).

Пусть метод (2.1) является наилучшим на классе B. Тогда справедливы соотношения

$$\begin{aligned} R &= \sup_{f \in B}\left|f(z_0) - \sum_{j=1}^{n} D_j(\delta) f(z_j)\right| + \delta \sum_{j=1}^{n} |D_j(\delta)| \\ &\geq \sup_{f \in B_0}\left|f(z_0) - \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Re} D_j(\delta) f(z_j)\right| + \delta \sum_{j=1}^{n} |\operatorname{Re} D_j(\delta)|. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Если хотя бы для одного коэффициента $\operatorname{Im} D_j(\delta) \neq 0$, то неравенство в соотношении (2.3) строгое, чего не может быть в силу равенств (2.2). Таким образом, все коэффициенты $D_1(\delta), \ldots, D_n(\delta)$ вещественны и метод (2.1) является наилучшим методом на классе B_0.

Пусть теперь метод (2.1) наилучший на классе B_0, т. е. справедливо равенство

$$\sup_{f \in B_0}\left|f(z_0) - \sum_{j=1}^{n} D_j(\delta) f(z_j)\right| + \delta \sum_{j=1}^{n} |D_j(\delta)| = R$$

и $D_1(\delta), \ldots, D_n(\delta)$ вещественны. Если доказать равенство

$$\sup_{f \in B_0}\left|f(z_0) - \sum_{j=1}^{n} D_j(\delta) f(z_j)\right| = \sup_{f \in B}\left|f(z_0) - \sum_{j=1}^{n} D_j(\delta) f(z_j)\right|, \tag{2.4}$$

то отсюда будет следовать, что метод (2.1) является наилучшим на классе B. В силу включения $B_0 \subset B$ достаточно доказать неравенство

$$\sup_{f \in B_0}\left|f(z_0) - \sum_{j=1}^{n} D_j(\delta) f(z_j)\right| \geq \sup_{f \in B}\left|f(z_0) - \sum_{j=1}^{n} D_j(\delta) f(z_j)\right|. \tag{2.5}$$

Пусть $f(z) \in B$. Положим $\alpha = \arg\Big[f(z_0) - \sum\limits_{j=1}^{n} D_j(\delta) f(z_j)\Big]$ и рассмотрим функции $f^*(z) = e^{-i\alpha} f(z)$, $f_1(z) = \Big[f^*(z) + \overline{f^*(\overline{z})}\Big]\Big/2$. Очевидно, что $f_1(z) \in B_0$. Из равенств

$$\Big|f_1(z_0) - \sum_{j=1}^{n} D_j(\delta) f_1(z_j)\Big| = \frac{1}{2}\Big|f^*(z_0) - \sum_{j=1}^{n} D_j(\delta) f^*(z_j) + \overline{f^*(z_0)} - \sum_{j=1}^{n} D_j(\delta)\overline{f^*(z_j)}\Big| = \Big|f(z_0) - \sum_{j=1}^{n} D_j(\delta) f(z_j)\Big|$$

при всех $f \in B$ имеем

$$\sup_{f\in B_0}\Big|f(z_0) - \sum_{j=1}^{n} D_j(\delta) f(z_j)\Big| \geq \Big|f(z_0) - \sum_{j=1}^{n} D_j(\delta) f(z_j)\Big|.$$

Отсюда следует неравенство (2.5). Теорема доказана. □

Теорема 2.2. *Пусть $z_{i_1} < \ldots < z_{i_m}$ — полная информативная система на множестве $E = \{z_1, \ldots, z_n\}$, $E \subset (-1, 1)$, для задачи наилучшего приближения на классе B величины $f(z_0)$ по значениям $f(z_1), \ldots, f(z_n)$, заданным с погрешностью $\delta < 1$. Тогда метод*

$$f(z_0) \approx \sum_{j=1}^{m} \frac{\omega_j(z_0)}{\omega_j(z_{i_j})}\left[1 - W_j^2(z_0)\right] \frac{q_{j0}^2(z_{i_j}, \delta)}{q_{j0}^2(z_0, \delta)} \widetilde{f}(z_{i_j}) \tag{2.6}$$

является наилучшим методом. Если в задаче (0.6) существует экстремальная функция $f^*(z)$ такая, что $|f^*(z)| < \delta$ при $z \in E\{z_{i_1}, \ldots, z_{i_m}\}$, то метод (2.6) является единственным линейным наилучшим методом. В частности, так будет, если $m = n$ или $z_0 \in E$.

Для погрешности наилучшего метода имеют место равенства

$$r(z_0, z_1, \ldots, z_n, \delta) = \frac{p_{10}(z_0, \delta)}{q_{10}(z_0, \delta)} = \ldots = \frac{p_{m0}(z_0, \delta)}{q_{m0}(z_0, \delta)}. \tag{2.7}$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$\omega_j(z) = \prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{m} W_k(z), \quad W_k(z) = \frac{z - z_{i_k}}{1 - z_{i_k} z},$$

величины $p_{j0}(z, \delta)$ и $q_{j0}(z, \delta)$ находятся из рекуррентных соотношений

$$\begin{gathered} p_{j,k-1}(z, \delta) = W_{jk}(z) p_{jk}(z, \delta) + \delta_{jk}^{(k-1)} q_{jk}(z, \delta), \\ q_{j,k-1}(z, \delta) = q_{jk}(z, \delta) + \delta_{jk}^{(k-1)} W_{jk}(z) p_{jk}(z, \delta), \quad k = 1, \ldots, m, \\ p_{jm}(z, \delta) = \operatorname{sign} \prod_{k=1}^{m} W_k(z_0), \quad q_{jm}(z, \delta) = 1, \end{gathered} \tag{2.8}$$

где

$$\delta_{jk}^{(l)} = W_{jl}^{-1}(u_{jk}) \frac{\delta_{jk}^{(l-1)} - \delta_{jl}^{(l-1)}}{1 - \delta_{jl}^{(l-1)} \delta_{jk}^{(l-1)}}, \quad k = l+1, \ldots, m, \quad l = 1, \ldots, m,$$

$$\delta_{jk}^{(0)}, W_{jk}, u_{jk} = \begin{cases} \Delta_k, W_k, z_{i_k} & \textit{при } k \neq j, m, \\ \Delta_m, W_m, z_{i_m} & \textit{при } k = j, \\ \Delta_j, W_j, z_{i_j} & \textit{при } k = m, \end{cases}$$

$$\Delta_l = \delta \operatorname{sign} \frac{\omega_l(z_0)}{\omega_l(z_{i_l})}, \quad l = 1, \ldots, m.$$

Доказательство. В силу теоремы 2.1 достаточно доказать, что метод (2.6) является наилучшим для класса B_0. При $z_0 = z_k$, $1 \leq k \leq n$ из теоремы 1.2 вытекают равенства

$$r(z_0, z_1, \ldots, z_n, \delta) = r(z_0, z_0, \delta) = \delta.$$

Рассмотрим функцию

$$\varphi(\varepsilon, \delta) = \sup_{\substack{f \in B_0 \\ |f(z_0) - \varepsilon| \leq \delta}} f(z_0) = \min\{\delta + \varepsilon, 1\}.$$

Вследствие равенства $\partial\varphi(0, \delta)/\partial\varepsilon = 1$ из теоремы А получаем, что метод (2.6), который в данном случае имеет вид $f(z_0) \approx \widetilde{f}(z_0)$, является наилучшим методом.

Пусть $z_0 \notin E$. Тогда найдется такое p, $0 \leq p \leq m$, что $z_0 \in (z_{i_p}, z_{i_{p+1}})$ ($z_{i_0} = -1$, $z_{i_{m+1}} = 1$). Рассмотрим функцию

$$\varphi_j(\varepsilon, \delta) = \sup_{f \in A_j(\varepsilon, \delta)} f(z_0),$$

где $A_j(\varepsilon, \delta) = \{f \in B_0 : |f(z_{i_k})| \leq \delta,\ k \neq j,\ |f(z_{i_j}) - \varepsilon| \leq \delta\}$. Из теоремы 1.2 следует существование в задаче (0.6) экстремальной функции, удовлетворяющей условиям (1.14). В силу п. 1 леммы 1.4 существует более одной функции из класса B_0, удовлетворяющей условиям (1.14), которые в принятых обозначениях можно записать в виде $f^*(z_{i_k}) = \Delta_k$, $k = 1, \ldots, m$. Необходимым и достаточным условием существования более одной функции из класса B_0, удовлетворяющей последним равенствам, является положительная определенность матрицы

$$\left\| \frac{1 - \Delta_k \Delta_l}{1 - z_{i_k} z_{i_l}} \right\|_1^m$$

(см. [21, с. 100, 273]). Из того, что эта матрица будет положительно определенная в некоторой окрестности точки $(\Delta_1, \ldots, \Delta_m)$, следует существование более одной функции из класса B_0, удовлетворяющей при достаточно малых $|\varepsilon|$ условиям

$$f(z_{i_k}) = \Delta_k, \quad k \neq j, \quad f(z_{i_j}) = \Delta_j + \varepsilon.$$

Из леммы 1.4 получаем, что при достаточно малых $|\varepsilon|$ $\varphi_j(\varepsilon,\delta) = g_{j0}(z_0,\varepsilon)$, где

$$g_{j,k-1}(z,\varepsilon) = \left[W_{jk}(z)g_{j,k}(z,\varepsilon) + d_{jk}^{(k-1)}\right]\left[1 + d_{jk}^{(k-1)}W_{jk}(z)g_{j,k}(z,\varepsilon)\right]^{-1}, \quad k = 1,\ldots,m,$$

$$g_{j,m}(z,\varepsilon) = (-1)^{m+p} = \operatorname{sign}\prod_{j=1}^{m} W_k(z_0),$$

$$d_{jk}^{(l)} = W_{jl}^{-1}(u_{jk})\frac{d_{jk}^{(l-1)} - d_{jl}^{(l-1)}}{1 - d_{jl}^{(l-1)}d_{jk}^{(l-1)}}, \quad k = l+1,\ldots,m, \quad l = 1,\ldots,m,$$

$$d_{jk}^{(0)} = \delta_{jk}^{(0)}, \quad k = 1,\ldots,m-1, \quad d_{jm}^{(0)} = \delta_{jm}^{(0)} + \varepsilon.$$

Введя функции $s_{jk}(z,\delta,\varepsilon)$, $t_{jk}(z,\delta,\varepsilon)$, определенные равенствами (2.9)

$$s_{j,k-1}(z,\delta,\varepsilon) = W_{jk}(z)s_{jk}(z,\delta,\varepsilon) + d_{jk}^{(k-1)}t_{jk}(z,\delta,\varepsilon),$$

$$t_{j,k-1}(z,\delta,\varepsilon) = t_{jk}(z,\delta,\varepsilon) + d_{jk}^{(k-1)}W_{jk}(z)s_{jk}(z,\delta,\varepsilon), \quad k = 1,\ldots,m,$$

$$s_{jm}(z,\delta,\varepsilon) = \operatorname{sign}\prod_{k=1}^{m} W_k(z_0), \quad t_{jm}(z,\delta,\varepsilon) = 1,$$

можно показать, что

$$\varphi_j(\varepsilon,\delta) = \frac{s_{j0}(z_0,\delta,\varepsilon)}{t_{j0}(z_0,\delta,\varepsilon)}. \tag{2.10}$$

Рассмотрим функции

$$\Phi_j(z,\delta,\varepsilon) = \frac{s_{j0}(z,\delta,\varepsilon)}{t_{j0}(z,\delta,\varepsilon)}.$$

Из соотношений (2.8), (2.9) и равенств

$$s_{jk}(z,\delta,0) = p_{jk}(z,\delta), \quad t_{jk}(z,\delta,0) = q_{jk}(z,\delta), \quad k = 0,\ldots,m,$$

учитывая, что $d_{jk}^{(k-1)}$ при $k < m$ не зависят от ε, имеем

$$\frac{\partial\Phi_j(z,\delta,0)}{\partial\varepsilon} = \omega_j(z)\left[1 - W_j^2(z)\right]\frac{\alpha(\delta)}{q_{j0}^2(z,\delta)},$$

где

$$\alpha(\delta) = \left.\frac{\partial d_{jm}^{(m-1)}}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}\prod_{k=1}^{m-1}\left[1 - \left(\delta_{jk}^{(k-1)}\right)^2\right].$$

В силу равенства $\Phi_j(z_{i_j},\delta,\varepsilon) = \Delta_j + \varepsilon$ получаем

$$\frac{\partial\Phi_j(z_{i_j},\delta,0)}{\partial\varepsilon} = \omega_j(z_{i_j})\frac{\alpha(\delta)}{q_{j0}^2(z_{i_j},\delta)} = 1.$$

Отсюда находится $\alpha(\delta)$. Тем самым

$$\frac{\partial \varphi_j(0,\delta)}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial \Phi_j(z_0,\delta,0)}{\partial \varepsilon} = \frac{\omega_j(z_0)}{\omega_j(z_{i_j})}\left[1 - W_j^2(z_0)\right]\frac{q_{j0}^2(z_{i_j},\delta)}{q_{j0}^2(z_0,\delta)}. \tag{2.11}$$

Из теоремы А следует, что метод (2.6) является наилучшим для задачи приближения величины $f(z_0)$ по значениям $f(z_{i_1}),\dots,f(z_{i_m})$, заданным с погрешностью δ, а вследствие полной информативности системы $z_{i_1},\dots,z_{i_m}$ и для исходной задачи. Равенства (2.7) вытекают из (2.10), теоремы А и очевидных равенств

$$\varphi_1(0,\delta) = \ldots = \varphi_m(0,\delta).$$

Покажем, что при $z_0 = z_k$, $1 \le k \le n$, в задаче (0.6) найдется экстремальная функция $f^*(z) \in B_0$, для которой будет выполнено неравенство $|f^*(z)| < \delta$, $z \in E \setminus \{z_k\}$. Искомой функцией будет любая функция из класса B_0, удовлетворяющая при достаточно малом $\varepsilon > 0$ равенствам $f(z_j) = \delta - \varepsilon$, $j \ne k$, $f(z_k) = \delta$. Существование таких функций следует из положительной определенности матрицы

$$\left\| \frac{1-\delta^2}{1 - z_i z_j} \right\|_1^n.$$

Предположим, что в задаче (0.6) существует экстремальная функция $f^*(z)$, удовлетворяющая условию: $|f^*(z)| < \delta$, $z \in E \setminus \{z_{i_1},\dots,z_{i_m}\}$. В силу теоремы В и предыдущих рассуждений можно считать, что $f^*(z) \in B_0$. Рассмотрим функции

$$\psi_j(\varepsilon,\delta) = \sup_{f \in C_j(\varepsilon,\delta)} f(z_0),$$

где $C_j(\varepsilon,\delta) = \{f \in B_0 : |f(z_k)| \le \delta,\ k \ne j,\ |f(z_j) - \varepsilon| \le \delta\}$. Пусть j таково, что $z_j \in E \setminus \{z_{i_1},\dots,z_{i_m}\}$. Тогда при достаточно малых $|\varepsilon|$ $\psi_j(\varepsilon,\delta) = |f^*(z_0)|$ и, следовательно,

$$\frac{\partial \psi_j(0,\delta)}{\partial \varepsilon} = 0.$$

Таким образом, всякий линейный наилучший метод для исходной задачи на классе B_0 является линейным наилучшим методом для задачи приближения величины $f(z_0)$ на классе B_0 по значениям $f(z_{i_1}),\dots,f(z_{i_m})$, заданным с погрешностью δ. Последний единствен в силу равенств (2.11) и теоремы А. Единственность для класса B вытекает из теоремы 2.1. Теорема доказана. $\square$

Существенной частью в построении наилучшего метода приближения является нахождение полной информативной системы. Из теоремы 1.2 следует, что порядок информативности $\mathrm{In}(u, z_1,\dots,z_n, \delta)$ при фиксированных $z_1 < \ldots < z_n$ и $\delta < 1$ зависит лишь от того, в какой из интервалов $(-1,z_1),(z_1,z_2),\dots,(z_n,1)$ попадает значение u. Поэтому в дальнейшем удобнее обозначить порядок информативности через $\mathrm{In}_s(z_1,\dots,z_n,\delta)$ при $z_1 < \ldots < z_n$, $u \in (z_s, z_{s+1})$,

$0 \le s \le n$ ($z_0 = -1$, $z_{n+1} = 1$). Отметим также, что если $u \in (z_s, z_{s+1})$ и $f^*(z)$ — экстремальная функция в задаче (0.6) при $z_0 = u$, нормированная условием $f^*(u) > 0$, то точки z_{i_p}, $z_{i_{p+1}}$ в равенствах (1.14) совпадают с точками z_s, z_{s+1} соответственно. Это следует из того, что у функции $[f^*(z)]'$ число нулей в круге K равно $m-1$ (см. [19, теорема 7.2]) и, следовательно, $f^*(z) > \delta$, $z \in (z_{i_p}, z_{i_{p+1}})$.

Докажем две леммы, с помощью которых будет описан алгоритм построения полной информативной системы.

Лемма 2.1. *Пусть для точек* $z_{i_1} < \ldots < z_{i_k}$ *из множества* $E = \{z_1, \ldots, z_n\}$ *существует функция* $f(z) \in B_0$, *имеющая вид*

$$f(z) = (-1)^{k+s} \prod_{j=1}^{k} \frac{z - \alpha_j}{1 - \alpha_j z}, \quad \alpha_j \in (-1, 1),$$

и удовлетворяющая равенствам

(2.12)
$$f(z_{i_j}) = \begin{cases} (-1)^{j+s}\delta, & j = 1, \ldots, s, \\ (-1)^{j+s+1}\delta, & j = s+1, \ldots, k, \end{cases} \quad \text{где } i_s = p, \quad i_{s+1} = p+1.$$

Тогда

$$\mathrm{In}_p(z_1, \ldots, z_n, \delta) \ge k - \nu_p;$$

здесь

$$\nu_p = \begin{cases} 0, & \text{при } p = 0, n, \\ 2, & \text{при } 0 < p < n. \end{cases}$$

Доказательство. Предположим, что $\mathrm{In}_p(z_1, \ldots, z_n, \delta) = m$. Тогда существует функция

$$f^*(z) = \lambda \prod_{j=1}^{m} \frac{z - \beta_j}{1 - \beta_j z}, \quad \beta_j \in (-1, 1),$$

$\lambda = 1$ или -1, для которой выполняются неравенства $|f^*(z)| \le \delta$, $z \in E$, $f^*(z) > 0$, $z \in (z_p, z_{p+1})$. По теореме 1.1 для функции $f(z)$ также справедливо неравенство

$$f(z) > 0, \quad z \in (z_p, z_{p+1}). \tag{2.13}$$

Рассмотрим функцию $\Phi(z) = f(z) - f^*(z)$. Имеем

$$(-1)^{j+s}\Phi(z_{i_j}) \ge 0,\ j = 1, \ldots, s, \quad (-1)^{j+s+1}\Phi(z_{i_j}) \ge 0,\ j = s+1, \ldots, k. \tag{2.14}$$

Предположим, что $\lambda = (-1)^{k+s+1}$. В силу неравенства (2.13) $p < n$. Таким образом,

$$(-1)^{k+s+1}\Phi(z_{i_k}) \ge 0, \quad (-1)^{k+s}\Phi(1) > 0.$$

Если $\lambda = (-1)^{k+s}$, а m и n разной четности, то $p > 0$ и

$$(-1)^{s+1}\Phi(z_{i_1}) \geq 0, \quad (-1)^s\Phi(-1) > 0.$$

Аналогично тому, как это было сделано при доказательстве леммы 1.4, можно показать, что в рассматриваемых случаях у функции $\Phi(z)$ число нулей в интервале $(-1,1)$ по крайней мере равно $k-1$, а при $p = 0, n$ равно k. Из (1.1) получаем $m \geq k-2$ и $m \geq k$, если $p = 0, n$. В случае $\lambda = (-1)^{k+s}$, а m и n одинаковой четности из (2.14) следует, что число нулей у функции $\Phi(z)$ в интервале $(-1,1)$ не менее $k-2$, а при $p = 0, n$ — не менее $k-1$. Учитывая, что $\Phi(\pm 1) = 0$, из неравенства (1.1) получаем утверждение леммы в этом случае. Лемма доказана. □

Лемма 2.2. *Пусть* $\mathrm{In}_p(z_1, \ldots, z_n, \delta) = k$. *Тогда при* $z^* \in (-1, z_1)$, $0 < p \leq n$ *имеют место неравенства*

$$k - \nu_p \leq \mathrm{In}_{p+1}(z^*, z_1, \ldots, z_n, \delta) \leq k + 1.$$

Эти же неравенства справедливы для $\mathrm{In}_p(z_1, \ldots, z_n, z^*, \delta)$ *при* $z^* \in (z_n, 1)$, $0 \leq p < n$.

Доказательство. Оценки снизу непосредственно вытекают из леммы 2.1. Докажем оценки сверху. Пусть $z^* \in (-1, z_1)$ и $p > 0$. Предположим, что $\mathrm{In}_{p+1}(z^*, z_1, \ldots, z_n, \delta) = m$. Тогда существует функция

$$f^*(z) = (-1)^{m+s} \prod_{j=1}^{m} \frac{z - \alpha_j}{1 - \alpha_j z}, \quad \alpha_j \in (-1, 1),$$

и точки $u_1 < \ldots < u_m$ из множества $\{z^*, z_1, \ldots, z_n\}$ такие, что

$$f^*(u_j) = \begin{cases} (-1)^{j+s}\delta, & j = 1, \ldots, s, \\ (-1)^{j+s+1}\delta, & j = s+1, \ldots, m, \end{cases}$$

где $u_s = z_p$, $u_{s+1} = z_{p+1}$. Кроме того, так как $\mathrm{In}_p(z_1, \ldots, z_n\delta) = k$, то существует функция

$$f(z) = \lambda \prod_{j=1}^{k} \frac{z - \beta_j}{1 - \beta_j z}, \quad \beta_j \in (-1, 1),$$

$\lambda = 1$ или -1, для которой $|f(z_j)| \leq \delta$, $j = 1, \ldots, n$, и $f(z) > 0$, $z \in (z_p, z_{p+1})$. Для функции $f(z)$ будут также выполнены неравенства $|f(u_j)| \leq \delta$, $j = 2, \ldots, m$, $f(u) \geq f^*(u)$, $u \in (z_p, z_{p+1})$. Отсюда следует, что для разности $\Phi(z) = f^*(z) - f(z)$ справедливы соотношения

$$(2.15) \qquad \begin{gathered} (-1)^{j+s}\Phi(u_j) \geq 0, \ j = 2, \ldots, s, \quad \Phi(u) \leq 0, \ u \in (z_p, z_{p+1}), \\ (-1)^{j+s+1}\Phi(u_j) \geq 0, \ j = s+1, \ldots, m. \end{gathered}$$

Тем самым число нулей функции $\Phi(z)$ на отрезке $[u_2, u_m]$ не менее $m - 1$. Из неравенства (1.1) имеем оценку $m \leq k + 2$.

Покажем, что случай $m = k+2$ невозможен. Если $\lambda = (-1)^{m+s+1}$, то $p < n$ и

$$(-1)^{m+s+1}\Phi(u_m) \geq 0, \quad (-1)^{m+s}\Phi(1) > 0.$$

Последнее соотношение вместе с неравенствами (2.15) показывает, что функция $\Phi(z)$ имеет в интервале $(-1,1)$ не менее m нулей, а это противоречит неравенству (1.1). При $\lambda = (-1)^{m+s}$ функция $\Phi(z)$ обращается в нуль в точках ± 1, что снова противоречит неравенству (1.1). Аналогично рассматривается случай, когда $z^* \in (z_n, 1)$ и $p < n$. Лемма доказана. □

Из леммы 2.2 вытекает алгоритм построения полной информативной системы. Пусть для точек $z_r < \ldots < z_p < z_{p+1} < \ldots < z_{p+s}$ уже построена полная информативная система $z_{i_1}, \ldots, z_{i_k}$. Если она не остается таковой при добавлении точки $z_{r-1} < z_r$ (или $z_{p+s+1} > z_{p+s}$), то в полную информативную систему на новом множестве будут входить точки z_{r-1} (или z_{p+s+1}), z_p, z_{p+1}. Остальные точки находятся из множества $z_r, \ldots, z_{p-1}, z_{p+2}, \ldots, z_{p+s}$ перебором по m точкам, где $m = k-2, k-3, k-4, k-5$ при $0 < p < n$ и $m = k-1, k-2$ при $p = 0, n$, используя следующий факт, вытекающий из теорем 1.1, 1.2. Точки $z_{i_1}, \ldots, z_{i_k}$ являются полной информативной системой при заданных p и δ на множестве $E = \{z_1, \ldots, z_n\}$ тогда и только тогда, когда существует более одной функции $f(z) \in B_0$, удовлетворяющей условиям (2.12) (что эквивалентно выполнению неравенств вида (1.12)), и для функции $g_0(z)$, определенной равенствами, аналогичными (1.9), справедливо неравенство $|g_0(z)| \leq \delta$, $z \in E$.

Для нахождения приближенного значения $f(z_0)$ по значениям $f(z_1), \ldots, f(z_n)$, заданным с погрешностью δ, можно воспользоваться методом, являющимся наилучшим при $\delta = 0$, построенным в работе [10] (этот метод может быть получен при $\delta = 0$ из теоремы 2.2:

$$f(z_0) \approx \sum_{j=1}^{n} \frac{\omega_j(z_0)}{\omega_j(z_j)} \left[1 - W_j^2(z_0)\right] \widetilde{f}(z_j), \tag{2.16}$$

здесь $W_j(z) = \dfrac{z - z_j}{1 - z_j z}$, $\omega_j(z) = \prod\limits_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} W_k(z)$. Для погрешности этого метода справедливо равенство

$$r_T(z_0, z_1, \ldots, z_n\delta) = |W(z_0)| + \delta \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\omega_j(z_0)}{\omega_j(z_j)} \left[1 - W_j^2(z_0)\right] \right|,$$

где $W(z) = \prod\limits_{k=1}^{n} W_k(z)$.

С помощью равенств (2.7), (2.8) можно показать, что для погрешности наилучшего приближения справедливо равенство

$$r(z_0, z_1, \ldots, z_n\delta) = |W(z_0)| + \delta \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\omega_j(z_0)}{\omega_j(z_j)} \left[1 - W_j^2(z_0)\right] \right| + O(\delta^2).$$

Тем самым метод (2.16) дает погрешность, отличающуюся от погрешности наилучшего приближения на величину $O(\delta^2)$.

3. Зависимость порядка информативности от погрешности задания функции

Пусть H — класс функций, аналитических и ограниченных в единичном круге K, принимающих вещественные значения на вещественной оси. Положим

$$\|f\| = \sup_{|z|<1} |f(z)|.$$

Известно (см. [20, § 10.3]), что среди функций из класса H, принимающих значения $\delta_1^{(0)}, \ldots, \delta_n^{(0)}$ в различных точках $z_1, \ldots, z_n$ из интервала $(-1, 1)$, существует единственная функция $f_0(z)$, для которой норма принимает минимальное значение. Величина $M = \|f_0\|$ может быть найдена из определенным образом записанного уравнения

$$|\delta_n^{(n-1)}| = M, \tag{3.1}$$

где

$$\delta_k^{(m)} = M^2 \frac{1 - z_m z_k}{z_k - z_m} \cdot \frac{\delta_k^{(m-1)} - \delta_m^{(m-1)}}{M^2 - \delta_m^{(m-1)} \delta_k^{(m-1)}}, \quad k = m+1, \ldots, n,$$
$$m = 1, \ldots, n-1.$$

Искомое значение M является тем наименьшим корнем уравнения (3.1), для которого при некотором $m \le n-1$ выполнены соотношения

$$|\delta_1^{(0)}| < M, \ldots, |\delta_m^{(m-1)}| < M, \quad |\delta_{m+1}^{(m)}| = M, \quad \delta_{m+1}^{(m)} = \ldots = \delta_n^{(m)}.$$

Рассматриваемая величина M может быть найдена также как наибольший корень уравнения

$$\det \left\| \frac{M^2 - \delta_m^{(0)} \delta_k^{(0)}}{1 - z_k z_m} \right\|_1^n = 0$$

(см. [21, с. 100]).

Пусть $z_1 < \ldots < z_n$ — различные точки из интервала $(-1, 1)$. Для данного p, $0 \le p \le n$, положим

$$\delta_{p1} = 1, \quad \delta_{pk}^{-1} = \min_{(i_1, \ldots, i_k) \in I_k^p} \min_{f \in A_{i_1, \ldots, i_k}^p} \|f\|, \quad k = 2, \ldots, n,$$

где $A^p_{i_1,\dots,i_k}$ — множество функций из H, удовлетворяющих равенствам

$$f(z_{i_j}) = \begin{cases} (-1)^{j+s}, & j = 1,\dots,s, \\ (-1)^{j+s+1}, & j = s+1,\dots,k, \end{cases}$$

при $i_s = p$, $i_{s+1} = p+1$ ($i_0 = 0$, $i_{k+1} = n+1$), а I^p_k — множество индексов $1 \le i_1 \le \dots \le i_k \le n$, для которых определены $A^p_{i_1,\dots,i_k}$. Отметим, что подобные величины при $k = n$ для аналогичных задач на классах гладких функций вводились в работе [18].

Нетрудно убедиться, что $\delta_{p2} = 1$ при $p = 1,\dots,n-1$. Кроме того, из включений $A^p_{i_1,\dots,i_{k+1}} \subset A^p_{i_2,\dots,i_{k+1}}$ при $i_1 < p$ и $A^p_{i_1,\dots,i_{k+1}} \subset A^p_{i_1,\dots,i_k}$ при $i_1 \ge p$ (через $A^p_{i_1}$ будем обозначать множество функций из H, удовлетворяющих равенству $f(z_{i_1}) = 1$) следуют неравенства $\delta_{p,k+1} \le \delta_{pk}$, $k = 1,\dots,n-1$.

Лемма 3.1. *Имеют место неравенства*

$$\delta_{p,k+2} < \delta_{pk}, \quad k = 1,\dots,n-2.$$

При $p = 0, n$

$$\delta_{p,k+1} < \delta_{pk}, \quad k = 1,\dots,n-1.$$

Доказательство. Предположим, что при некотором k и r, $1 \le k \le n-r$, $1 \le r \le 2$, $\delta_{p,k+r} = \delta_{pk}$. Пусть $i_1,\dots,i_{k+r}$ таковы, что

$$\delta^{-1}_{p,k+r} = \min_{f \in A^p_{i_1,\dots,i_{k+r}}} \|f\|. \tag{3.2}$$

Если $i_1 < p$, $i_{k+r} > p+1$, то $A^p_{i_1,\dots,i_{k+r}} \subset A^p_{i_1,\dots,i_{k+1}}$, если $i_1 \ge p$, то $A^p_{i_1,\dots,i_{k+r}} \subset A^p_{i_1,\dots,i_k}$, наконец, если $i_{k+r} \le p+1$, то $A^p_{i_1,\dots,i_{k+r}} \subset A^p_{i_{r+1},\dots,i_{k+r}}$. Таким образом, всегда найдутся $j_1,\dots,j_k$ такие, что

$$A^p_{i_1,\dots,i_{k+r}} \subset A^p_{j_1,\dots,j_k}. \tag{3.3}$$

Отсюда имеем

$$\delta^{-1}_{p,k+r} \ge \min_{f \in A^p_{j_1,\dots,j_k}} \|f\| \ge \delta^{-1}_{pk}.$$

Следовательно,

$$\min_{f \in A^p_{i_1,\dots,i_{k+r}}} \|f\| = \min_{f \in A^p_{j_1,\dots,j_k}} \|f\|. \tag{3.4}$$

Пусть $f^*(z)$ — функция, на которой достигается минимум в равенстве (3.2). Из равенства (3.4) и включения (3.3) следует минимальность $\|f^*\|$ среди функций из множества $A^p_{j_1,\dots,j_k}$. Из единственности функции $f^*(z)$ следует, что она является рациональной функцией степени, строго меньшей k. С другой стороны, $f^* \in A^p_{i_1,\dots,i_{k+r}}$ и имеет не менее $k+r-2$ нулей, если $0 < p < n$, и не менее $k+r-1$ нулей, если $p = 0, n$. Отсюда следует утверждение леммы. Лемма доказана. □

Теорема 3.1. *Пусть при некоторых p и k, $0 \le p \le n$, $1 \le k \le n-1$, выполнено неравенство $\delta_{p,k+1} \le \delta < \delta_{pk}$. Тогда для порядка информативности справедливо соотношение*

$$k - \nu_p \le \mathrm{In}_p(z_1, \dots, z_n, \delta) \le k,$$

где ν_p определены в лемме 2.1. *При $0 \le \delta < \delta_{pn}$ имеет место равенство*

$$\mathrm{In}_p(z_1, \dots, z_n, \delta) = n.$$

Доказательство. Пусть $\mathrm{In}_p(z_1, \dots, z_n, \delta) = k$. Тогда существует функция

$$f^*(z) = (-1)^{k+s} \prod_{j=1}^{k} \frac{z - \alpha_j}{1 - \alpha_j z}, \quad \alpha_j \in (-1, 1), \tag{3.5}$$

и точки $z_{i_1} < \ldots < z_{i_k}$ такие, что имеют место равенства (2.12). Из леммы 1.4 вытекает существование функции $f(z) \in B_0$, удовлетворяющей равенствам (2.12) и неравенству $\|f\| < 1$. Тогда для функции $\delta^{-1} f \in A^p_{i_1,\dots,i_k}$ имеем $\delta^{-1}_{pk} \le \|\delta^{-1} f\| < \delta^{-1}$. Тем самым доказано, что $\mathrm{In}_p(z_1, \dots, z_n, \delta) \le k$ при $\delta \ge \delta_{p,k+1}$.

Пусть теперь $\delta < \delta_{pk}$. Тогда существуют точки $z_{i_1}, \dots, z_{i_k}$, для которых

$$\min_{f \in A^p_{i_1,\dots,i_k}} \|f\| < \delta^{-1}. \tag{3.6}$$

Пусть минимум в левой части неравенства (3.6) достигается для функции $f_1 \in A^p_{i_1,\dots,i_k}$. Тогда функция $\delta f_1(z) \in B_0$ удовлетворяет равенствам (2.12), причем является не единственной такой функцией из класса B_0. Из леммы 1.4 следует существование функции вида (3.5), удовлетворяющей равенствам (2.12). В силу леммы 2.1 имеем

$$\mathrm{In}_p(z_1, \dots, z_n, \delta) \ge k - \nu_p.$$

При $k = n$ из теоремы 1.2 следует, что $\mathrm{In}_p(z_1, \dots, z_n, \delta) = n$. Теорема доказана. □

Следует отметить, что теорема 3.1 в силу равенства (1.18) дает оценку для числа листов многолистного круга, на который экстремальная функция в задаче (0.6) при $E = \{z_1, \dots, z_n\}$ отображает единичный круг K.

Литература

1. *Смоляк С. А.* Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них: Канд. дисс. М: МГУ, 1965.
2. *Бахвалов Н. С.* Об оптимальности линейных методов приближения операторов на выпуклых классах функций. — ЖВМ и МФ., 1971, т. 11, №4, с. 1014–1018.
3. *Осипенко К. Ю.* Оптимальная интерполяция аналитических функций. — Матем. заметки, 1972, т. 12, вып. 4, с. 465–476.

4. *Боянов Б. Д.* Оптимальная скорость интегрирования и ε-энтропия одного класса аналитических функций. — Матем. заметки, 1973, т. 14, вып. 1, с. 3–10.
5. *Bojanov B. D.* Best quadrature formula for a certain class of analytic functions. — Zastos Mat., 1974, v. 14, № 3, p. 441–447.
6. *Bojanov B. D.* Optimal methods of interpolation in $W^{(r)}L_q(M; a, b)$. — ДАН Болг., 1974, т. 27, № 7, с. 885–888.
7. *Боянов Б. Д.* Наилучшие методы интерполирования для некоторых классов дифференцируемых функций. — Матем. заметки, 1975, т. 17, вып. 4, с. 511–524.
8. *Micchelli C. A., Rivlin T. J., Winograd S.* The optimal recovery of smooth functions. — Numer. Math., 1976, v. 26, № 2, p. 191–200.
9. *Тихомиров В. М., Боянов Б. Д.* О некоторых выпуклых задачах теории приближений. — Сердика. Бълг. мат. списание, 1979, т. 5, № 1, с. 83–86.
10. *Осипенко К. Ю.* Наилучшее приближение аналитических функций по информации об их значениях в конечном числе точек. — Матем. заметки. 1976, т. 19, вып. 1, с. 29–40.
11. *Марчук А. Г., Осипенко К. Ю.* Наилучшее приближение функций, заданных с погрешностью в конечном числе точек.— Матем. заметки. 1975, т. 17, вып. 3, с. 359–368.
12. *Micchelli C. A., Rivlin T. J.* A survey of optimal recovery, Optimal estimation in approximation theory. N. Y.: Plenum press, 1977, 1–54.
13. *Melkman A. A., Micchelli C. A.* Optimal estimation of linear operators in Hilbert spaces from inaccurate data. — SIAM J. Numer. Anal., 1979, v. 16, № 1, p. 87–105.
14. *Rivlin T. J.* A survey of recent results on optimal recovery. Polynom and spline approximat. Proc. NATO Adv. Study Inst., Calgary, 1978, Dordrecht e. a., 1979, p. 225–245.
15. *Габушин В. Н.* Оптимальные методы вычисления значений оператора Ux, если x задано с погрешностью. Дифференцирование функций, определенных с ошибкой. — Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, т. CXLV, 1980, 63–78.
16. *Субботин Ю. Н.* Экстремальные задачи теории приближения функций при неполной информации. — Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 1980, т. CXLV, с. 152–168.
17. *Осипенко К. Ю.* Наилучшие методы приближения и порядок информативности систем. — Матем. сб., 1980, т. 111 (153), с. 532–556.
18. *Micchelli C. A.* Optimal estimation of smooth functions from inaccurate data. — J. Inst. Math. and Appl., 1979, v. 23, № 4, p. 473–495.
19. *Хавинсон С. Я.* Теория экстремальных задач для ограниченных аналитических функций, удовлетворяющих дополнительным условиям внутри области. — УМН. 1963. т. 18, вып. 2 (110), с. 25–98.
20. *Уолш Дж. Л.* Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области. М.: ИЛ, 1961.
21. *Крейн М. Г., Нудельман А. А.* Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. М.: Наука, 1973.

Москва

Поступила в редакцию
17.IV.1981