УДК 517.5

ОПТИМАЛЬНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

К. Ю. ОСИПЕНКО

Для одного класса аналитических функций строится оптимальная интерполяционная формула по заданной совокупности узлов, причем оптимизация производится по множеству произвольных, не обязательно линейных, способов интерполяции. Для оптимальной интерполяционной формулы находятся оптимальные узлы и норма погрешности. Библ. 6 назв.

Пусть задан класс функций H, определенных в области Q, и совокупность линейных функционалов $l_1(z, a_1, \dots, a_N, f), \dots, l_m(z, a_1, \dots, a_N, f)$, где $f \in H$, а $a_1, \dots, a_N$ — элементы некоторого множества Ω. Будем рассматривать задачу приближения функции из заданного класса на основании информации о значениях $l_1, \dots, l_m$. Интерполяционной формулой будем называть произвольную функцию $S(z, l_1, \dots, l_m)$ при $z \in Q$. Погрешностью интерполяционной формулы S в точке $z \in Q$ назовем величину

$$r(z, S, a_1, \dots, a_N) = \sup_{f \in H} |f(z) - S(z, l_1, \dots, l_m)|.$$

Будем называть S_0 оптимальной интерполяционной формулой при заданных параметрах, если при всех $z \in Q$ выполняется равенство

$$r(z, S_0, a_1, \dots, a_N) = \inf_S r(z, S, a_1, \dots, a_N).$$

Нормой погрешности интерполяционной формулы S назовем величину

$$T(S, a_1, \dots, a_N) = \sup_{z \in Q} r(z, S, a_1, \dots, a_N).$$

Назовем $a_1^0, \dots, a_N^0$ оптимальными параметрами для интерполяционной формулы S, если

$$T(S, a_1^0, \dots, a_N^0) = \inf_{a_1, \dots, a_N \in O} T(S, a_1, \dots, a_N).$$

Интересно рассмотреть задачу нахождения оптимальной интерполяционной формулы при заданных параметрах и задачу минимизации нормы погрешности оптимальной формулы за счет выбора параметров.

Постановки рассматриваемых задач принадлежат Н. С. Бахвалову.

Приведем решение этих задач для класса $A(G,M)$ функций $f(x)$, определенных на отрезке вещественной оси $[a,b]$, допускающих аналитическое продолжение в односвязную, симметричную относительно вещественной оси область G, содержащую отрезок $[a,b]$, и удовлетворяющих условию $|f(z)| < M$ при $z \in G$. В качестве параметров будем рассматривать точки $z_1,\ldots,z_N$ из отрезка $[a,b]$, а в качестве функционалов возьмем значения $f(z_1),\ldots,f^{(k_1)}(z_1),\ldots,f(z_N),\ldots,f^{(k_N)}(z_N)$.

§ 1. Оптимизация интерполяционной формулы. Для нахождения оптимальной интерполяционной формулы и ее погрешности на классе $A(G,M)$ нам потребуется лемма и следствие из нее из [1], [2]. Сформулируем их сразу для класса $A(G,M)$.

Лемма 1. *При всех $z \in [a,b]$ справедливо равенство*

$$\rho(z) = \inf_{S} \sup_{f\in A(G,M)} \left| f(z) - S\left(z, f(z_1),\ldots,f^{(k_N)}(z_N)\right)\right| = \sup_{\substack{f\in A(G,M) \\ f(z_1)=\ldots=f^{(k_N)}(z_N)=0}} |f(z)|,$$

причем существуют такие $D_{ij}(z)$, что

$$\rho(z) = \sup_{f\in A(G,M)} \left| f(z) - \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=0}^{k_j} D_{ij}(z) f^{(i)}(z_j)\right|.$$

Следствие. *При $z \in [a,b]$ положим*

$$\varphi_{ij}(\varepsilon, z) = \sup_{\substack{f\in A(G,M),\ f^{(k)}(z_l)=\delta_{ik}\delta_{jl}\varepsilon \\ l=1,\ldots,N;\ k=0,\ldots,k_l}} f(z).$$

Если $\varphi_{ij}(\varepsilon, z)$ непрерывно дифференцируема по ε в нуле, то

$$D_{ij}(z) = \frac{\partial \varphi_{ij}(0,z)}{\partial \varepsilon}.$$

Иными словами, лемма 1 утверждает, что для класса $A(G,M)$ существуют такие $D_{ij}(z)$, что оптимальная интерполяционная формула имеет вид

$$S_0 = \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=0}^{k_j} D_{ij}(z) f^{(i)}(z_j),$$

причем

$$r(z, S_0, z_1,\ldots,z_N) = \sup_{\substack{f\in A(G,M) \\ f(z_1)=\ldots=f^{(k_N)}(z_N)=0}} |f(z)|.$$

Следствие из леммы 1 дает способ отыскания $D_{ij}(z)$.

Теорема 1. *Погрешность оптимальной интерполяционной формулы*

$$r(z, S_0, z_1, \ldots, z_N) = M \prod_{i=1}^{N} |W_i(z)|^{k_i+1},$$

где $W_i(z)$ — конформное отображение G на внутренность единичного круга, переводящее точки вещественной оси в точки вещественной оси и точку z_i в нуль.

Доказательство. Пусть $f(z) \in A(G, M)$ и $f(z_1) = \ldots = f^{(k_N)}(z_N) = 0$.

Рассмотрим функцию $\varphi(z) = f(z) \Big/ \left(M \prod_{i=1}^{N} W_i^{k_i+1}(z) \right)$. Учитывая, что $\varphi(z)$ аналитична в G, из принципа максимума модуля для аналитических функций имеем $|\varphi(z)| \le 1$ при $z \in G$. Отсюда $|f(z)| \le M \prod_{i=1}^{N} |W_i(z)|^{k_i+1}$ при $z \in G$. Пример функции $f(z) = M \prod_{i=1}^{N} W_i^{k_i+1}(z)$ показывает неулучшаемость оценки. □

Для построения оптимальной интерполяционной формулы нам потребуются две леммы.

При $z \in [a, b]$ положим

$$\varphi^j_{f_0,\ldots,f_n}(\varepsilon, z) = \sup_{\substack{\varphi \in A(G,M),\ \varphi^{(i)}(z_j) = f_i(\varepsilon) \\ (i=0,\ldots,n)}} \varphi(z),$$

где $f_i(\varepsilon)$ непрерывно дифференцируема в окрестности нуля и $f_0(0) = \ldots, f_n(0) = 0$.

Лемма 2. *При всех $z \in [a, b]$ функция $\varphi^j_{f_0,\ldots,f_n}(\varepsilon, z)$ непрерывно дифференцируема по ε в окрестности нуля и для достаточно малых $|\varepsilon|$ справедливо равенство*

$$\varphi^j_{f_0,\ldots,f_n}(\varepsilon, z) = \frac{|W_j(z)| \varphi^j_{f^1_0,\ldots,f^1_{n-1}}(\varepsilon, z) + f_0(\varepsilon)}{1 + \dfrac{f_0(\varepsilon)}{M^2} |W_j(z)| \varphi^j_{f^1_0,\ldots,f^1_{n-1}}(\varepsilon, z)}, \tag{1}$$

где

$$\begin{pmatrix} f^1_0 \\ \vdots \\ f^1_{n-1} \end{pmatrix} = A^{-1}_{n,j} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial z} \psi(z_j, \varepsilon) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial^n}{\partial z^n} \psi(z_j, \varepsilon) \end{pmatrix} \operatorname{sign} W_j(z), \ \ \psi(z, \varepsilon) = \frac{\varphi(z) - f_0(z)}{1 - \dfrac{f_0(\varepsilon)}{M^2} \varphi(z)},$$

$\varphi(z) \in A(G, M)$ и $\varphi^{(k)}(z_j) = f_k(\varepsilon)$ $(k = 0, \ldots, n)$, а элементы матрицы $A_{n,j}$ задаются формулой

$$a_{lm} = \begin{cases} C_l^{m-1} W_j^{(l-m+1)}(z_j), & m \le l, \\ 0, & m > l \end{cases} \quad (1 \le m, l \le n).$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $\varphi(z) \in A(G, M)$, которая удовлетворяет соотношениям $\varphi^{(i)}(z_j) = f_i(\varepsilon)$ $(i = 0, \ldots, n)$. Функция

$$\psi(z, \varepsilon) = \frac{\varphi(z) - f_0(\varepsilon)}{1 - \dfrac{f_0(\varepsilon)}{M^2} \varphi(z)}$$

для достаточно малых $|\varepsilon|$ принадлежит классу $A(G, M)$, причем $\psi(z_j, \varepsilon) = 0$, поэтому

$$\psi(z, \varepsilon) \le \varphi^j_{0, g_1, \ldots, g_n}(\varepsilon, z),$$

где

$$g_k(\varepsilon) = \frac{\partial^k \psi(z_j, \varepsilon)}{\partial z^k} \quad (k = 1, \ldots, n).$$

Найдем $\varphi^j_{0, g_1, \ldots, g_n}(\varepsilon, z)$. Пусть $\varphi_1(z) \in A(G, M)$ и $\varphi_1(z_j) = 0$, $\varphi_1^{(i)}(z_j) = g_i(\varepsilon)$ $(i = 1, \ldots, n)$. Функцию $\varphi_1(z)$ можно представить в виде $\varphi_1(z) = \widetilde{\varphi}(z) W_j(z)$, где $\widetilde{\varphi}(z) \in A(G, M)$. Значения $\widetilde{\varphi}(z_j), \ldots, \widetilde{\varphi}^{(n-1)}(z_j)$ могут быть найдены из системы, полученной дифференцированием предыдущего равенства в точке z_j,

$$A_{n,j} \begin{pmatrix} \widetilde{\varphi}(z_j) \\ \vdots \\ \widetilde{\varphi}^{(n-1)}(z_j) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$\varphi^j_{0, g_1, \ldots, g_n}(\varepsilon, z) = \sup_{\substack{\widetilde{\varphi} \in A(G, M) \\ \begin{pmatrix} \widetilde{\varphi}(z_j) \\ \vdots \\ \widetilde{\varphi}^{(n-1)}(z_j) \end{pmatrix} = A_{n,j}^{-1} \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix}}} \varphi(z)$$
$$= |W_j(z)| \varphi^j_{f_0^1, \ldots, f_{n-1}^1}(\varepsilon, z).$$

Таким образом,

$$\psi(z, \varepsilon) \le \frac{\varphi(z) - f_0(\varepsilon)}{1 - \dfrac{f_0(\varepsilon)}{M^2} \varphi(z)} = |W_j(z)| \varphi^j_{f_0^1, \ldots, f_{n-1}^1}(\varepsilon, z).$$

Следовательно, для достаточно малых $|\varepsilon|$

$$\varphi(z) \leq \frac{|W_j(z)|\varphi^j_{f_0^1,\ldots,f_{n-1}^1}(\varepsilon,z) + f_0(\varepsilon)}{1 + \dfrac{f_0(\varepsilon)}{M^2}|W_j(z)|\varphi^j_{f_0^1,\ldots,f_{n-1}^1}(\varepsilon,z)}.$$

Нетрудно показать существование функции, на которой достигается оценка в произвольной точке $z \in [a,b]$, и непрерывную дифференцируемость $\varphi^j_{f_0,\ldots,f_n}(\varepsilon,z)$ по ε в окрестности нуля. $\square$

Лемма 3. *Имеет место равенство*

$$\frac{\partial\varphi^j_{f_0,\ldots,f_n}(0,z)}{\partial\varepsilon} = \sum_{k=0}^{n} W_j^k(z)\left[1 - W_j^{2(n-k+1)}(z)\right](T_k^j, F_0);$$

здесь (T_k^j, F_0) — *скалярное произведение вектора* $F_0 = \left(\dfrac{df_0(0)}{d\varepsilon}, \ldots, \dfrac{df_n(0)}{d\varepsilon}\right)^T$ *на вектор* T_k^j, *где* $T_0^j = (1,0,\ldots,0)^T$, $(T_k^j)^T$ — $k+1$ *строка матрицы* $\displaystyle\prod_{i=k-1}^{0} B_i^j$ *при* $k = 1,\ldots,n$,

$$B_i^j = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & A^{-1}_{n-i,j} \end{array}\right)$$

— *квадратные матрицы порядка* $n+1$, *а матрицы* $A_{n-i,j}$ *определены в лемме* 2.

Доказательство. Будем последовательно применять формулу (1), тогда на $k+1$ шаге будут получаться $f_0^{k+1},\ldots,f_{n-k-1}^{k+1}$, которые выражаются через $f_0^k,\ldots,f_{n-k}^k$ следующим образом:

$$\begin{pmatrix} f_0^{k+1} \\ \vdots \\ f_{n-k-1}^{k+1} \end{pmatrix} = A^{-1}_{n-k,j} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial z}\psi_k(z_j,\varepsilon) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial^{n-k}}{\partial z^{n-k}}\psi_k(z_j,\varepsilon) \end{pmatrix} \operatorname{sign} W_j(z),$$

где

$$\psi_k(z,\varepsilon) = \frac{\varphi(z) - f_0^k(\varepsilon)}{1 - \dfrac{f_0^k(\varepsilon)}{M^2}\varphi(z)}, \quad \varphi(z) \in A(G,M) \text{ и } \varphi^{(l)}(z_j) = f_l^k(\varepsilon)$$

$$(l = 0,\ldots,n-k).$$

Представляя $\dfrac{\partial^l}{\partial z^l}\psi_k(z,\varepsilon)$ в виде

$$\frac{\partial^l}{\partial z^l}\psi_k(z,\varepsilon) = \frac{\varphi^{(l)}(z)}{1-\dfrac{f_0^k(\varepsilon)}{M^2}\varphi(z)} + f_0^k(\varepsilon)K_l(z,\varepsilon),$$

где $K_l(z_j,0)=0$, находим

$$\frac{d}{d\varepsilon}\frac{\partial^l}{\partial z^l}\psi_k(z_j,\varepsilon)\bigg|_{\varepsilon=0} = \frac{d}{d\varepsilon}f_l^k(0).$$

Таким образом,

$$\begin{pmatrix} \dfrac{d}{d\varepsilon}f_0^{k+1}(0) \\ \vdots \\ \dfrac{d}{d\varepsilon}f_{n-k-1}^{k+1}(0) \end{pmatrix} = A_{n-k,j}^{-1} \begin{pmatrix} \dfrac{d}{d\varepsilon}f_1^{k}(0) \\ \vdots \\ \dfrac{d}{d\varepsilon}f_{n-k}^{k}(0) \end{pmatrix} \operatorname{sign} W_j(z).$$

Вводя матрицы B_k^j и векторы $F_k = \Bigg(\underbrace{0,\dots,0}_{k\ \text{раз}}, \dfrac{d}{d\varepsilon}f_0^k(0),\dots, \dfrac{d}{d\varepsilon}f_{n-k}^k(0)\Bigg)^T$, предыдущее равенство преобразуем к виду

$$F_{k+1} = B_k^j F_k \operatorname{sign} W_j(z) = \ldots = \prod_{i=k}^{0} B_i^j F_0 \operatorname{sign} W_j^{k+1}(z).$$

Отсюда

$$\frac{d}{d\varepsilon}f_0^{k+1}(0) = (T_{k+1}^j, F_0)\operatorname{sign} W_j^{k+1}(z). \tag{2}$$

Дифференцируя равенство (1) и учитывая, что

$$\varphi^j_{f_0^1,\dots,f_{n-1}^1}(0,z) = M|W_j^n(z)|,$$

имеем

$$\frac{\partial \varphi^j_{f_0,\dots,f_n}(0,z)}{\partial\varepsilon} = |W_j(z)|\frac{\partial \varphi^j_{f_0^1,\dots,f_{n-1}^1}(0,z)}{\partial\varepsilon} + \frac{df_0(0)}{d\varepsilon}\left[1-W_j^{2(n+1)}(z)\right].$$

Применяя полученную формулу к $\dfrac{\partial \varphi^j_{f_0^1,\dots,f_{n-1}^1}(0,z)}{\partial\varepsilon}$ и т. д., находим

$$\frac{\partial \varphi^j_{f_0,\dots,f_n}(0,z)}{\partial\varepsilon} = \sum_{k=0}^{n}\frac{df_0^k(0)}{d\varepsilon}|W_j(z)|^k\left[1-W_j^{2(n-k+1)}(z)\right].$$

Подставив $\dfrac{df_0^k(0)}{d\varepsilon}$ из равенства (2), получим утверждение леммы. $\square$

Теорема 2. *Оптимальная интерполяционная формула имеет вид*

$$S_0 = \sum_{j=1}^{N} \omega_j(z) \sum_{k=0}^{k_j} W_j^k(z) \left[1 - W_j^{2(k_j-k+1)}(z)\right] (T_k^j, A_j^{-1}\overline{f}_j);$$

здесь

$$\overline{f}_j = (f(z_j), \dots, f^{(k_j)}(z_j))^T, \quad \omega_j(z) = \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{N} W_i^{k_i+1}(z),$$

а элементы матрицы A_j *задаются формулой*

$$a_{lm} = \begin{cases} C_{l-1}^{m-1}\omega_j^{(l-m)}(z_j), & m \le l, \\ 0, & m > l \end{cases} \quad (1 \le m, l \le k_j + 1).$$

Доказательство. Из леммы 1 следует, что

$$S_0 = \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=0}^{k_j} D_{ij}(z) f^{(i)}(z_j), \tag{3}$$

где $D_{ij}(z) = \dfrac{\partial \varphi_{ij}(0,z)}{\partial \varepsilon}$. Пусть $f(z) \in A(G, M)$ и

$$f^{(k)}(z_l) = \delta_{ki}, \delta_{lj}\varepsilon \quad (l = 1, \dots, N; \quad k = 0, \dots, k_l).$$

Тогда $f(z)$ представима в виде $f(z) = \varphi(z)\omega_j(z)$, где $\varphi(z) \in A(G, M)$. Дифференцируя последнее равенство в точке z_j, получим

$$A_j \begin{pmatrix} \varphi(z_j) \\ \vdots \\ \varphi^{(k_j)}(z_j) \end{pmatrix} = \varepsilon e_i, \text{ где } e_i = (\underbrace{0, \dots, 0}_{i \text{ раз}}, 1, 0, \dots, 0)^T.$$

Отсюда

$$\varphi_{ij}(\varepsilon, z) = \sup_{\substack{\varphi \in A(G,M) \\ \begin{pmatrix} \varphi(z_j) \\ \vdots \\ \varphi^{(k_j)}(z_j) \end{pmatrix} = \varepsilon A_j^{-1} e_i}} \omega_j(z)\varphi(z) = |\omega_j(z)| \varphi^j_{f_0,\dots,f_{k_j}}(\varepsilon, z)$$

и $(f_0, \dots, f_{k_j})^T = \varepsilon A_j^{-1} e_i \operatorname{sign} \omega_j(z)$. Из леммы 2

$$\frac{\partial \varphi_{ij}(0,z)}{\partial \varepsilon} = |\omega_j(z)| \sum_{k=0}^{k_j} W_j^k(z) \left[1 - W_j^{2(k_j-k+1)}(z)\right] (T_k^j, F_0),$$

где $F_0 = A_j^{-1} e_i \operatorname{sign} \omega_j(z)$. Следовательно,

$$D_{ij}(z) = \frac{\partial \varphi_{ij}(0,z)}{\partial \varepsilon} = \omega_j(z) \sum_{k=0}^{k_j} W_j^k(z) \left[1 - W_j^{2(k_j-k+1)}(z)\right] (T_k^j, A_j^{-1} e_i).$$

Отсюда и из равенства (3) следует утверждение теоремы. $\square$

Можно показать, что полученная оптимальная формула является интерполяционной формулой в обычном смысле, т. е.

$$S_0^{(i)}(z_j) = f^{(i)}(z_j).$$

Рассмотрим некоторые частные случаи.

I. Пусть заданы $f(z_1), f(z_2), \ldots, f(z_N)$, тогда из теоремы 2 оптимальная интерполяционная формула имеет вид

$$S_0 = \sum_{j=1}^{N} \frac{\omega_j(z)}{\omega_j(z_j)} \left[1 - W_j^2(z)\right] f(z_j), \text{ где } \omega_j(z) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N} W_i(z),$$

а из теоремы 1 $r(z, S_0, z_1, \ldots, z_N) = M \prod\limits_{i=1}^{N} |W_j(z)|$.

II. Пусть G — внутренность единичного круга и заданы $f(0)$, $f'(0), \ldots, f^{(n)}(0)$. Из теоремы 2

$$S_0 = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \left[1 - z^{2(n-k+1)}\right] f^{(k)}(0),$$

а из теоремы 1 $r(z, S_0, 0) = M|z|^{n+1}$.

Любопытно, что интерполяционная формула Тейлора $S = \sum\limits_{k=0}^{n} (z^k/k!) f^{(k)}(0)$ не является оптимальной.

§ 2. Оптимизация параметров. Из теоремы 1 следует, что норма погрешности оптимальной интерполяционной формулы

$$T(S_0, z_1, \ldots, z_N) = M \sup_{z \in [a,b]} \prod_{j=1}^{N} |W_j(z)|^{k_j+1}.$$

Для случая, когда все k_j равны некоторому k, рассмотрим задачу минимизации нормы погрешности оптимальной формулы за счет выбора $z_1, \ldots, z_N$.

Если $\Phi(z)$ — какое-нибудь конформное отображение области G на внутренность единичного круга, переводящее точки вещественной оси в точки вещественной оси, то $W_j(z)$ можно представить в виде

$$W_j(z) = \frac{\Phi(z) - \Phi(z_j)}{1 - \Phi(z_j)\Phi(z)}.$$

Таким образом, задача сводится к нахождению

$$(4) \quad T_0 = \inf_{z_1, \ldots, z_N} T(S_0, z_1, \ldots, z_N)$$

$$= M \left[\inf_{z_1, \ldots, z_N} \sup_{z \in [a,b]} \prod_{i=1}^{N} \left| \frac{\Phi(z) - \Phi(z_j)}{1 - \Phi(z_j)\Phi(z)} \right| \right]^{k+1}$$

и $z_1^0, \ldots, z_N^0$, на которых достигается нижняя грань.

Пусть эта задача решена для некоторой области G_1, содержащей отрезок $[a_1, b_1]$. Из равенства (4) следует, что если $W(z)$ — конформное отображение области G_1 на внутренность области G, переводящее точки вещественной оси в точки вещественной оси, а отрезок $[a_1, b_1]$ в отрезок $[a, b] \subset G$, то значение T_0 одно и то же для областей G и G_1, а $W(z_1^0), \dots, W(z_N^0)$ являются оптимальными узлами в области G, если $z_1^0, \dots, z_N^0$ являлись оптимальными узлами в области G_1. Следовательно, достаточно решить задачу для какой-нибудь одной области.

Введем для удобства функцию $\tau(x) = (1-x)/(1+x)$.

Лемма 4. *Пусть G — внутренность единичного круга, содержащая отрезок $[a, b]$. Тогда справедливы утверждения:*

а) оптимальные узлы имеют вид

$$z_j^0 = \frac{\mathrm{dn}\left[\dfrac{2j-1}{2N}K, k\right] - \tau(b)}{\mathrm{dn}\left[\dfrac{2j-1}{2N}K, k\right] + \tau(b)},$$

где K — полный эллиптический интеграл первого рода для модуля k:

$$K = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \quad k = \sqrt{1 - \frac{\tau^2(b)}{\tau^2(a)}};$$

б) норма погрешности

$$T_0 = M 2^{k+1} h^{-(k+1)N} + O\left(h^{-(k+5)N}\right),$$

где $h = \exp(\pi K'/(2K))$, а K' — полный эллиптический интеграл первого рода для дополнительного модуля $k' = \sqrt{1-k^2}$.

Доказательство. Если G — внутренность единичного круга, то

$$T_0 = M\left[\inf_{z_1,\dots,z_N} \sup_{z\in[a,b]} \prod_{j=1}^N |(z-z_j)/(1-z_j z)|\right]^{k+1}.$$

Из работ [3], [4] можно извлечь решение задачи о нахождении

$$T = \inf_{z_1,\dots,z_N} \sup_{z\in[a,b]} \prod_{j=1}^N |(z-z_j)/(1-z_j z)|.$$

Решение этой задачи:

$$z_j^0 = \frac{\mathrm{dn}\left[\dfrac{2j-1}{2N}K, k\right] - \tau(b)}{\mathrm{dn}\left[\dfrac{2j-1}{2N}K, k\right] + \tau(b)}, \quad k = \sqrt{1 - \tau^2(b)/\tau^2(a)};$$

$T = 2q + O(q^5)$, где $q = \exp(-N(\pi K')/(2K)) = h^{-N}$. Отсюда вытекает справедливость леммы. □

Лемма 5. *Пусть G — внутренность эллипса с фокусами в точках ± 1 и суммой полуосей c, а отрезок $[a, b] = [-1, 1]$. Тогда справедливы утверждения:*

а) оптимальными узлами являются узлы Чебышева

$$z_j^0 = \cos(2j - 1)\pi/(2N);$$

б) норма погрешности

$$T_0 = M2^{k+1}c^{-(k+1)N} + O(c^{-(k+5)N}).$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$W(u) = \sin\left[\frac{\pi}{2L}\varphi\left(\frac{2u}{l(1+u^2)}\right)\right],$$

где

$$\varphi(\xi) = \int_0^\xi \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-l^2t^2)}},$$

l определяется из условия $c = \exp(\pi L'/(2L))$, а L, L' — полные эллиптические интегралы первого рода для модулей l, l'. Функция $W(u)$ конформно отображает внутренность единичного круга на внутренность эллипса G, причем точки вещественной оси переходят в точки вещественной оси, а точки $a_1 = -(1 - \sqrt{1-l^2})/l$, $b_1 = (1 - \sqrt{1-l^2})/l$ в точки -1, 1 соответственно. Легко показать, что $\tau(b_1) = \sqrt{(1-l)/(1+l)}$, а $\sqrt{1 - \tau^2(b_1)/\tau^2(a_1)} = 2\sqrt{l}/(1+l)$. Тогда, как было отмечено выше,

$$z_j^0 = W\left(\frac{\mathrm{dn}\left[\frac{2j-1}{2N}K, k\right] - \sqrt{\frac{1-l}{1+l}}}{\mathrm{dn}\left[\frac{2j-1}{2N}K, k\right] + \sqrt{\frac{1-l}{1+l}}}\right), \quad k = \frac{2\sqrt{l}}{1+l}.$$

Пользуясь известными формулами преобразований для эллиптических функций ([5], [6]), можно получить, что $z_j^0 = \cos(2j - 1)\pi/(2N)$. Справедливость утверждения б) следует из равенств $c = \exp(\pi L'/(2L)) = \exp(\pi K'/(2K)) = h$. □

Пусть $\Phi(z)$ — конформное отображение внутренности эллипса с фокусами в точках ± 1 и суммой полуосей c на внутренность области G, содержащей отрезок $[a, b]$, переводящее точки вещественной оси в точки вещественной оси, а отрезок $[-1, 1]$ в отрезок $[a, b]$.

Теорема 3. *Оптимальные узлы для оптимальной интерполяционной формулы имеют вид $z_j^0 = \Phi(\cos((2j-1)\pi/(2N)))$, а соответствующая норма погрешности $T_0 = M2^{k+1}c^{-(k+1)N} + O(c^{-(k+5)N})$.*

Доказательство этой теоремы непосредственно вытекает из леммы 5. Заметим, что в случае, когда G — внутренность эллипса с фокусами в точках ± 1 и суммой полуосей c, T_0 совпадает по порядку с нормой погрешности интерполяции многочленами в узлах Чебышева.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило 14.X.1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С м о л я к С. А., Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них, Кандид. дисс., МГУ, 1965.

[2] Б а х в а л о в Н. С., Об оптимальности линейных методов приближения операторов на выпуклых классах функций, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **11**, № 4 (1971), 1014–1018.

[3] W a c h s p r e s s E. L., Extended application of alternating direction implicit iteration model problem theory, J. Soc. Indust. and Appl. Math., **11**, № 4 (1963), 994–1016.

[4] З о л о т а р е в Е. И., Приложение эллиптических функций к вопросам о функциях, наименее и наиболее уклоняющихся от нуля, Собр. соч., т. 2, М., 1932.

[5] Б е й т м е н Г., Э р д е й н А., Высшие трансцендентные функции, М., 1937.

[6] У и т т е к е р Е. Т., В а т с о н Г. Н., Курс современного анализа, т. 2, М., 1934.