УДК 517.5

НАИЛУЧШЕЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ С ПОГРЕШНОСТЬЮ В КОНЕЧНОМ ЧИСЛЕ ТОЧЕК

А. Г. МАРЧУК, К. Ю. ОСИПЕНКО

Доказывается, что для выпуклых и центрально-симметричных классов функций среди наилучших в определенном смысле методов приближения по значениям, заданным с погрешностью в конечном числе точек, существует линейный метод. Для некоторых простейших классов строятся линейные наилучшие методы и оценивается их погрешность. Библ. 3 назв.

1. Рассмотрим задачу приближения функции $f(x)$, $x \in [a,b]$ из некоторого класса W по ее приближенным значениям $f_k = f(x_k) + \rho_k$, $x_k \in [a,b]$, $k = 1, \dots, n$, при условии $\|\rho\| \le \delta$; здесь $\|\cdot\|$ — какая-либо норма в пространстве векторов $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_n)$. Всякий метод приближения функции $f(x)$, использующий информацию только о значениях $f_1, \dots, f_n$, может быть представлен в виде некоторой функции $f(x) \approx S(x, \delta, f_1, \dots, f_n)$. Погрешностью данного метода в точке $x \in [a,b]$ на классе W назовем величину

$$r_S(x, \delta, x_1, \dots, x_n) = \sup_{\substack{f \in W \\ \|\rho\| \le \delta}} |f(x) - S(x, \delta, f_1, \dots, f_n)|.$$

Величину

$$r(x, \delta, x_1, \dots, x_n) = \inf_S r_S(x, \delta, x_1, \dots, x_n)$$

будем называть наилучшей оценкой погрешности в точке x, а метод $S_0(x, \delta, f_1, \dots, f_n)$ — наилучшим методом, если при всех $x \in [a,b]$ имеет место равенство

$$r(x, \delta, x_1, \dots, x_n) = r_{S_0}(x, \delta, x_1, \dots, x_n).$$

Интересно рассмотреть задачу минимизации наилучшей оценки погрешности в точках $x \in [a,b]$ за счет выбора точек $x_1, \dots, x_n$. Назовем величину

$$r_n(\delta) = \inf_{\{x_k\}} \|r(x, \delta, x_1, \dots, x_n)\|_{C[a,b]}$$

наилучшей оценкой погрешности приближения на $[a,b]$, а точки $x_1^0, \dots, x_n^0$ — оптимальными узлами, если имеет место равенство

$$r_n(\delta) = \|r(x, \delta, x_1^0, \dots, x_n^0)\|_{C[a,b]}.$$

Для случая $\delta = 0$ (приближение по точным значениям) соответствующие задачи для класса функций, аналитически продолжаемых в некоторую односвязную и симметричную относительно вещественной оси область и ограниченных в ней, рассматривались в работе [1].

2. Задача построения наилучшего метода приближения функции по ее значениям, заданным с погрешностью, и нахождения его погрешности может быть сформулирована в более общем виде. Пусть $L, l_1, \ldots, l_n$ — линейные функционалы на линейном пространстве X. Ставится задача приближения функционала $L(x)$ на некотором множестве $W \subset X$ на основании информации о значениях $\widetilde{l}_k(x) = l_k(x) + \rho_k$, где $x \in W$, $\|\rho\| \le \delta$. Оказывается, что для довольно широкого класса множеств W среди наилучших методов приближения (в смысле данного выше определения) существует линейный.

Теорема 1. *Пусть W — выпуклое, центрально-симметричное подмножество линейного пространства X с центром симметрии 0. Тогда справедливо равенство*

$$\inf_S \sup_{\substack{x\in W\\ \|\rho\|\le\delta}} |L(x) - S(\delta, \widetilde{l}_1(x), \ldots, \widetilde{l}_n(x))| = \sup_{\substack{x\in W\\ \|\bar{l}(x)\|\le\delta}} |L(x)|,$$

где $\bar{l}(x) = (l_1(x), \ldots, l_n(x))$; причем существуют числа $D_j(\delta)$ такие, что

$$\sup_{\substack{x\in W\\ \|\rho\|\le\delta}} \left| L(x) - \sum_{j=1}^{n} D_j(\delta)\widetilde{l}_j(x) \right| = \sup_{\substack{x\in W\\ \|\bar{l}(x)\|\le\delta}} |L(x)|.$$

Доказательство. Обозначим через Y замыкание множества точек $(n+1)$-мерного пространства

$$(y_0, y_1, \ldots, y_n) = (L(x), \widetilde{l}_1(x), \ldots, \widetilde{l}_n(x)),$$

где $x \in W$, $\|\rho\| \le \delta$. Нетрудно показать, что множество Y будет выпуклым и центрально-симметричным с центром симметрии в начале координат. Положим

$$D_0(\delta) = \sup_{(y_0, 0, \ldots, 0)\in Y} y_0.$$

Нетрудно показать, что

$$D_0(\delta) = \sup_{\substack{x\in W\\ \|\bar{l}(x)\|\le\delta}} |L(x)|. \tag{1}$$

Действительно,

$$D_0(\delta) = \sup_{\substack{x\in W\\ \widetilde{l}_k(x)=0,\ k=1,\ldots,n\\ \|\rho\|\le\delta}} L(x) = \sup_{\substack{x\in W\\ \bar{l}(x)=-\rho\\ \|\rho\|\le\delta}} L(x) = \sup_{\substack{x\in W\\ \|\bar{l}(x)\|\le\delta}} L(x).$$

Так как множество W центрально-симметрично, то

$$\sup_{\substack{x\in W\\ \|\bar{l}(x)\|\le\delta}} L(x) = \sup_{\substack{x\in W\\ \|\bar{l}(x)\|\le\delta}} |L(x)|.$$

Пусть $D_0(\delta) < \infty$. Вследствие выпуклости множества Y через каждую его граничную точку можно провести опорную гиперплоскость. Уравнение опорной гиперплоскости, проходящей через точку $(D_0(\delta), 0, \ldots, 0)$, можно записать в виде

$$y_0 = \sum_{j=1}^{n} D_j(\delta) y_j + D_0(\delta).$$

Плоскостью, симметричной этой плоскости относительно начала координат, будет плоскость

$$y_0 = \sum_{j=1}^{n} D_j(\delta) y_j - D_0(\delta).$$

Из симметричности множества Y относительно начала координат следует, что эта плоскость также будет опорной к множеству Y. Множество Y находится между этими плоскостями и поэтому для всех точек Y

$$\left| y_0 - \sum_{j=1}^{n} D_j(\delta) y_j \right| \le D_0(\delta);$$

вспоминая смысл координат y_j, перепишем это неравенство в виде

$$\left| L(x) - \sum_{j=1}^{n} D_j(\delta) \widetilde{l}_j(x) \right| \le D_0(\delta)$$

при всех $x \in W$, $\|\rho\| \le \delta$. Таким образом,

$$\sup_{\substack{x\in W\\ \|\rho\|\le\delta}} \left| L(x) - \sum_{j=1}^{n} D_j(\delta) \widetilde{l}_j(x) \right| \le D_0(\delta). \tag{2}$$

Из равенства (1) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует элемент $x_\varepsilon \in W$ такой, что $|L(x_\varepsilon)| > D_0(\delta) - \varepsilon$ и $\widetilde{l}_1(x_\varepsilon) = \ldots = \widetilde{l}_n(x_\varepsilon) = 0$. Теми же свойствами будет обладать элемент $-x_\varepsilon$. Пусть задан произвольный метод приближения, тогда для элементов $\pm x_\varepsilon$ приближенное значение функционала $L(\pm x_\varepsilon)$ равно $S(\delta, \widetilde{l}_1(\pm x_\varepsilon), \ldots, \widetilde{l}_n(\pm x_\varepsilon)) = S(\delta, 0, \ldots, 0) = S^0$. Из неравенств

$$\begin{aligned} |L(x_\varepsilon) - S^0| + |L(-x_\varepsilon) - S^0| &\ge |L(x_\varepsilon) - S^0 + (S^0 - L(-x_\varepsilon))| \\ &> 2(D_0(\delta) - \varepsilon) \end{aligned}$$

следует, что для одного из элементов $\pm x_\varepsilon$ ошибка приближенного значения больше $D_0(\delta)-\varepsilon$. В силу произвольности ε и рассматриваемого метода получаем неравенство

$$\inf_S \sup_{\substack{x\in W\\ \|\rho\|\le\delta}} |L(x)-S(\delta,\widetilde{l}_1(x),\dots,\widetilde{l}_n(x))| \ge D_0(\delta).$$

Сравнивая последнее неравенство с неравенством (2) и замечая, что множество всевозможных методов содержит линейные, получаем утверждение теоремы.

В случае, когда $D_0(\delta)=\infty$, легко показать, что

$$\inf_S \sup_{\substack{x\in W\\ \|\rho\|\le\delta}} |L(x)-S(\delta,\widetilde{l}_1(x),\dots,\widetilde{l}_n(x))| = \infty.$$

Тогда всякий метод, в частности всякий линейный метод, будет наилучшим, и утверждение теоремы остается в силе. $\square$

Следствие. *Положим*

$$\varphi_j^\delta(\varepsilon) = \sup_{\substack{x\in W\\ \|\bar{l}(x)-\varepsilon e_j\|\le\delta}} L(x),$$

где $e_j=(\underbrace{0,\dots,0}_{j-1},1,0,\dots,0)$. *Если функция* $\varphi_j^\delta(\varepsilon)$ *дифференцируема в нуле, то*

$$D_j(\delta)=\left.\frac{d\varphi_j^\delta(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}.$$

Доказательство следствия непосредственно вытекает из доказательства теоремы при рассмотрении сечения множества точек Y плоскостью (y_0,y_j).

Доказательство теоремы 1 является модификацией доказательства соответствующего утверждения для случая $\delta=0$ из работы [2] (см. также [3]).

Из теоремы 1 и следствия вытекает

Теорема 1′. *Пусть W — выпуклый и центрально-симметричный с центром симметрии 0 класс функций. Тогда среди наилучших методов существует линейный*

$$S_0(x,\delta,f_1,\dots,f_n)=\sum_{j=1}^n D_j(\delta,x)f_j$$

с погрешностью

$$r(x,\delta,x_1,\dots,x_n)=\sup_{\substack{f\in W\\ \|\bar{f}\|\le\delta}} |f(x)|,$$

где $\overline{f} = (f(x_1), \dots, f(x_n))$*; причем если функция*

$$\varphi_j^\delta(\varepsilon, x) = \sup_{\substack{f\in W \\ \|\overline{f}-\varepsilon e_j\|\le\delta}} f(x)$$

дифференцируема в нуле по ε*, то* $D_j(\delta, x) = \left.\dfrac{d\varphi_j^\delta(\varepsilon, x)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}$.

Рассмотрим некоторые простейшие классы функций и построим для них линейные наилучшие методы приближения. В дальнейшем мы будем использовать следующие нормы в пространстве векторов:

$$\|\rho\|_p = \left(\sum_{j=1}^n |\rho_j|^p\right)^{1/p}, \quad 1 \le p \le \infty,$$

а наилучшие оценки погрешности снабжать соответствующим индексом.

3. Рассмотрим типичный для классической интерполяции класс $W^{(n)}(M; a, b)$ функций, имеющих непрерывную производную порядка n, ограниченную константой M, где n — число точек, в которых заданы приближенные значения.

Теорема 2. *При измерении погрешности данных в* $\|\cdot\|_p$ *интерполяция Лагранжа*

$$S_0(x, \delta, f_1, \dots, f_n) = \sum_{j=1}^n P_j(x) f_j,$$

$$P_j(x) = \prod_{i\ne j} \frac{x - x_i}{x_j - x_i},$$

является наилучшим методом приближения в классе $W^{(n)}(M; a, b)$*. При всех* $1 \le p \le \infty$*. Для погрешности наилучшего метода имеет место равенство*

$$r_p(x, \delta, x_1, \dots, x_n) = \frac{M|\omega_n(x)|}{n!} + \delta\|\overline{P}(x)\|_q; \tag{3}$$

здесь $\omega_n(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i)$*,* $\overline{P}(x) = (P_1(x), \dots, P_n(x))$ *и* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

Доказательство. Очевидно, $W^{(n)}(M; a, b)$ удовлетворяет условиям теоремы $1'$, следовательно,

$$r_p(x, \delta, x_1, \dots, x_n) = \sup_{\substack{f\in W^{(n)}(M;a,b) \\ \|\overline{f}\|_p\le\delta}} |f(x)|.$$

Оценим $r_p(x, \delta, x_1, \dots, x_n)$ снизу. Рассмотрим функцию

$$f(y) = \frac{M|\omega_n(y)|}{n!} \operatorname{sign} \omega_n(x) + \sum_{j=1}^n P_j(y) \operatorname{sign} P_j(x);$$

здесь при $p=1$

$$\rho_j = \begin{cases} 0 & \text{при } |P_j(x)| \neq \max\limits_k |P_k(x)|, \\ \delta & \text{при } |P_j(x)| = \max\limits_k |P_k(x)|; \end{cases}$$

при $1 < p < \infty$ $\rho_j = \delta \dfrac{|P_j(x)|^{q-1}}{\|\overline{P}(x)\|_q^{q-1}}$; при $p=\infty$ $\rho_j = \delta$.

Нетрудно проверить, что $f(y) \in W^{(n)}(M,a,b)$ и $\|\overline{f}\|_p = \|\rho\|_p = \delta$. Таким образом,

$$r_p(x,\delta,x_1,\dots,x_n) \geq f(x) = \frac{M|\omega_n(x)|}{n!} + \delta\|\overline{P}(x)\|_q. \tag{4}$$

Оценим погрешность интерполяционной формулы Лагранжа на классе $W^{(n)}(M,a,b)$:

$$\begin{aligned} \left| f(x) - \sum_{j=1}^n P_j(x) f_j \right| &\leq \left| f(x) - \sum_{j=1}^n P_j(x) f(x_j) \right| + \left| \sum_{j=1}^n P_j(x)\rho_j \right| \\ &\leq \frac{M|\omega_n(x)|}{n!} + \|\rho\|_p \|\overline{P}(x)\|_q \leq \frac{M|\omega_n(x)|}{n!} + \delta\|\overline{P}(x)\|_q. \end{aligned} \tag{5}$$

Отсюда следует

$$r_p(x,\delta,x_1,\dots,x_n) \leq \frac{M|\omega_n(x)|}{n!} + \delta\|\overline{P}(x)\|_q,$$

что вместе с неравенством (4) доказывает равенство (3). Оценка (5) показывает, что интерполяция Лагранжа является наилучшим методом приближения. □

4. Обозначим через H_ω класс функций, модуль непрерывности которых не превосходит фиксированного модуля непрерывности $\omega(\varepsilon)$. Для этого класса можно построить целое множество линейных наилучших методов, если погрешность данных измеряется в $\|\rho\|_\infty = \max\limits_{1\leq j\leq n} |\rho_j|$.

Теорема 3. *Пусть $a \leq x_1 < x_2 < \ldots < x_n \leq b$. При измерении погрешности данных в $\|\cdot\|_\infty$ методы*

$$S_0^\lambda(x,\delta,f_1,\dots,f_n) \tag{6}$$

$$= \begin{cases} f_1 & \textit{при } x \in \left[a, \dfrac{x_1+x_2}{2}\right), \\ f_k & \textit{при } x \in \left(\dfrac{x_{k-1}+x_k}{2}, \dfrac{x_k+x_{k+1}}{2}\right), \\ & \qquad\qquad k = 2,\dots,n-1, \\ f_n & \textit{при } x \in \left(\dfrac{x_{n-1}+x_n}{2}, b\right], \\ \lambda_k f_k + (1-\lambda_k) f_{k+1} & \textit{при } x = \dfrac{x_k+x_{k+1}}{2},\ k=1,\dots,n-1, \end{cases}$$

являются наилучшими методами для класса H_ω при всех $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$, $\lambda_k \in [0,1]$, $k = 1, \dots, n-1$; для наилучшей оценки погрешности имеет место равенство

$$r_\infty(x, \delta, x_1, \dots, x_n) = \delta + \omega\left(\min_{1\le i\le n} |x - x_i|\right). \tag{7}$$

Доказательство. Из теоремы $1'$ следует, что для доказательства равенства (7) достаточно доказать равенство

$$\sup_{\substack{f\in H_\omega\\ \|\overline{f}\|_\infty\le\delta}} |f(x)| = \delta + \omega\left(\min_{1\le i\le n} |x - x_i|\right).$$

Пусть $f(x) \in H_\omega$ и $\|\overline{f}\|_\infty \le \delta$, тогда

$$|f(x)| \le |f(x) - f(x_k)| + |f(x_k)| \le \delta + \omega(|x - x_k|).$$

Выберем x_k из условия $|x - x_k| = \min\limits_{1\le i\le n} |x - x_i|$. Имеем

$$\sup_{\substack{f\in H_\omega\\ \|\overline{f}\|_\infty\le\delta}} |f(x)| \le \delta + \omega\left(\min_{1\le i\le n} |x - x_i|\right). \tag{8}$$

Так как функция $f(x) = \delta + \omega\left(\min\limits_{1\le i\le n} |x - x_i|\right)$ принадлежит классу H_ω и $\|\overline{f}\|_\infty = \delta$, неравенство (8) обращается в равенство, что и доказывает равенство (7).

Пусть $x \in \left(\dfrac{x_{k-1}+x_k}{2}, \dfrac{x_k+x_{k+1}}{2}\right)$. Покажем, что приближение $f(x) \approx f_k$ будет наилучшим. Действительно,

$$|f(x) - f_k| \le \delta + |f(x) - f(x_k)| \le \delta + \omega(|x - x_k|) = r_\infty(x, \delta, x_1, \dots, x_n).$$

Аналогично рассматриваются случаи $x \in \left[a, \dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$ и $x \in \left(\dfrac{x_{n-1}+x_n}{2}, b\right]$. Пусть теперь $x = \dfrac{x_k+x_{k+1}}{2}$. Рассмотрим приближение $f\left(\dfrac{x_k+x_{k+1}}{2}\right) \approx \lambda_k f_k + (1-\lambda_k) f_{k+1}$, где $\lambda_k \in [0,1]$. Имеем

$$\begin{aligned}
&\left| f\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right) - \lambda_k f_k - (1-\lambda_k) f_{k+1} \right| \\
&\qquad \le \left| \lambda_k \left[f\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right) - f(x_k) \right] \right. \\
&+ (1-\lambda_k) \left. \left[f\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right) - f(x_{k+1}) \right] \right| + \delta \le \omega\left(\frac{x_{k+1}-x_k}{2}\right) + \delta \\
&\qquad = r_\infty\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}, \delta, x_1, \dots, x_n\right).
\end{aligned}$$

Следовательно, рассматриваемый метод является наилучшим при любом $k \in [0,1]$. Теорема доказана. $\square$

Следствие. *Для наилучшей оценки погрешности на* $[a,b]$ *в классе* H_ω *имеет место равенство*

$$r_n(\delta) = \delta + \omega\left(\frac{b-a}{2n}\right), \tag{9}$$

а оптимальными узлами являются узлы

$$x_j^0 = a + (2j-1)\frac{b-a}{2n}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Доказательство. Так как функция $\omega(\varepsilon)$ не убывает, задача нахождения узлов, минимизирующих $\|r_\infty(x,\delta,x_1,\ldots,x_n)\|_{C[a,b]}$, сводится к задаче нахождения узлов, минимизирующих

$$\left\|\max_{1\le i\le n}|x-x_i|\right\|_{C[a,b]}.$$

Решением последней задачи являются узлы $x_j^0 = a + (2j-1)\dfrac{b-a}{2n}$, $j = 1, \ldots, n$. Следовательно,

$$r_n(\delta) = \|r_\infty(x,\delta,x_1^0,\ldots,x_n^0)\|_{C[a,b]} = \delta + \omega\left(\frac{b-a}{2n}\right).$$

$\square$

Из равенства (9) следует, что число узлов n при приближении на классе H_ω разумно выбирать из условия $\omega\left(\dfrac{b-a}{2n}\right) \sim \delta$ (например, для класса функций, удовлетворяющих условию Липшица с константой K: $n \sim K\dfrac{b-a}{2\delta}$), дальнейшее увеличение не дает существенного выигрыша в точности приближения.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
9.IV.1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] О с и п е н к о К. Ю., Оптимальная интерполяция аналитических функций, Матем. заметки, **12**, № 4 (1972), 465–476.

[2] С м о л я к С. А., Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них, Кандид. дисс., МГУ, 1965.

[3] Б а х в а л о в Н. С., Об оптимальности линейных методов приближения операторов на выпуклых классах функций, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **11**, № 4 (1971), 1014–1018.