

НАИЛУЧШЕЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ПО ИНФОРМАЦИИ ОБ ИХ ЗНАЧЕНИЯХ В КОНЕЧНОМ ЧИСЛЕ ТОЧЕК

К. Ю. ОСИПЕНКО

Для класса ограниченных и аналитических в односвязной области функций строится линейный наилучший метод приближения по информации о значениях функции в некоторых точках области, доказывается его единственность. Найдено предельное соотношение для нижней грани нормы погрешности наилучшего метода на произвольном компакте со связным дополнением, где нижняя грань берется по узлам из области аналитичности. Библиограф. 6 назв.

1. Пусть L, l_1, \dots, l_n — линейные функционалы на комплексном линейном пространстве X . Рассмотрим задачу приближения функционала L по значениям функционалов l_1, \dots, l_n на некотором множестве $W \subset X$. Всякий метод приближения функционала L , использующий информацию только о значениях функционалов l_1, \dots, l_n на множестве W , может быть представлен в виде некоторой комплекснозначной функции от n переменных

$$L(x) \approx S(l_1(x), \dots, l_n(x)), \quad x \in W.$$

Погрешностью данного метода естественно назвать величину

$$r_n(S) = \sup_{x \in W} |L(x) - S(l_1(x), \dots, l_n(x))|.$$

Назовем метод $S_0(l_1(x), \dots, l_n(x))$ наилучшим методом приближения, если имеет место равенство

$$r_n(S_0) = \inf_S r_n(S).$$

Оказывается, что для довольно широкого класса множеств среди наилучших методов приближения существует линейный метод.

Теорема 1. Пусть множество W из комплексного линейного пространства X удовлетворяет условиям: 1) W — выпукло, 2) W — круговое множество, т. е. из $x \in W$ следует, что $e^{i\varphi}x \in W$ при всех $\varphi \in [0, 2\pi]$. Тогда существуют такие комплексные числа D_j , что метод

$$S_0(l_1(x), \dots, l_n(x)) = \sum_{j=1}^n D_j l_j(x)$$

является наилучшим методом приближения, и для его погрешности справедливо равенство

$$r_n(S_0) = \sup_{\substack{x \in W \\ l_1(x) = \dots = l_n(x) = 0}} |L(x)|.$$

Доказательство. Рассмотрим множество точек в $(2n + 2)$ -мерном вещественном пространстве

$$(x_0, y_0, x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) = (\operatorname{Re} L(x), \operatorname{Im} L(x), \\ \operatorname{Re} l_1(x), \operatorname{Im} l_1(x), \dots, \operatorname{Re} l_n(x), \operatorname{Im} l_n(x))$$

при всех $x \in W$, которое обозначим через W_n . В силу свойства 1) множества W множество точек W_n будет выпукло. Обозначим через W_n^φ множество точек, полученных из точек W_n при линейном преобразовании P_φ , задаваемом равенствами

$$\begin{aligned} x'_k &= x_k \cos \varphi - y_k \sin \varphi, \\ y'_k &= x_k \sin \varphi + y_k \cos \varphi, \end{aligned} \quad k = 0, \dots, n.$$

В силу свойства 2) множество точек W_n^φ будет совпадать с множеством W_n при всех $\varphi \in [0, 2\pi]$. Положим

$$R = \sup_{(x_0, y_0, 0, \dots, 0) \in W_n} \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$$

и предположим, что $R < \infty$. Вследствие инвариантности множества W_n относительно преобразований P_φ все точки $(x_0, y_0, 0, \dots, 0)$, где $x_0^2 + y_0^2 = R^2$ являются граничными точками множества W_n . Через каждую граничную точку выпуклого множества можно провести к нему опорную гиперплоскость. Уравнение опорной гиперплоскости к W_n , проходящей через граничную точку $(R, 0, \dots, 0)$, можно записать в виде

$$(1) \quad x_0 = \sum_{j=1}^n (a_j x_j + b_j y_j) + R.$$

При линейном преобразовании P_φ эта гиперплоскость перейдет в опорную гиперплоскость к $W_n^\varphi = W_n$, проходящую через граничную точку $(R \cos \varphi, R \sin \varphi, 0, \dots, 0)$ и имеющую вид

$$\begin{aligned} x_0 \cos \varphi + y_0 \sin \varphi &= \sum_{j=1}^n (a_j \cos \varphi - b_j \sin \varphi) x_j \\ &\quad + \sum_{j=1}^n (a_j \sin \varphi + b_j \cos \varphi) y_j + R. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что при любом $\varphi \in [0, 2\pi]$ точки множества W_n лежат в замкнутом полупространстве

$$\left(x_0 - \sum_{j=1}^n (a_j x_j + b_j y_j)\right) \cos \varphi + \left(y_0 - \sum_{j=1}^n (-b_j x_j + a_j y_j)\right) \sin \varphi \leq R.$$

Множество точек (A, B) , удовлетворяющих неравенству $A \cos \varphi + B \sin \varphi \leq R$ при любом $\varphi \in [0, 2\pi]$, лежит в круге радиуса R . Следовательно, для всех точек из W_n справедливо неравенство

$$\left(x_0 - \sum_{j=1}^n (a_j x_j + b_j y_j)\right)^2 + \left(y_0 - \sum_{j=1}^n (-b_j x_j + a_j y_j)\right)^2 \leq R^2.$$

Вспоминая определение множества W_n , перепишем последнее неравенство в виде

$$\left|L(x) - \sum_{j=1}^n (a_j - ib_j) l_j(x)\right| \leq R.$$

Поскольку это неравенство справедливо для всех $x \in W$, имеем

$$(2) \quad \sup_{x \in W} \left|L(x) - \sum_{j=1}^n D_j l_j(x)\right| \leq R, \quad D_j = a_j - ib_j.$$

Докажем теперь, что для произвольного метода $S(l_1(x), \dots, l_n(x))$ выполняется неравенство $r_n(S) \geq R$. Из определения R и множества W_n следует, что

$$(3) \quad R = \sup_{\substack{x \in W \\ l_1(x) = \dots = l_n(x) = 0}} |L(x)|.$$

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ существует $x_\varepsilon \in W$ такой, что $l_1(x_\varepsilon) = \dots = l_n(x_\varepsilon) = 0$ и $|L(x_\varepsilon)| > R - \varepsilon$. Этим же свойством будет обладать $-x_\varepsilon \in W$. Из неравенств

$$|L(x_\varepsilon) - S(0, \dots, 0)| + |L(-x_\varepsilon) - S(0, \dots, 0)| \geq 2|L(x_\varepsilon)| > 2(R - \varepsilon)$$

вытекает, что либо для x_ε , либо для $-x_\varepsilon$ погрешность приближения функционала L больше $R - \varepsilon$.

Отсюда

$$r_n(S) = \sup_{x \in W} |L(x) - S(l_1(x), \dots, l_n(x))| > R - \varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ и рассматриваемого метода получаем

$$(4) \quad \inf_S r_n(S) \geq R.$$

Неравенства (2) и (4) дают цепочку соотношений

$$(5) \quad \inf_S r_n(S) \geq R \geq r_n(S_0),$$

где $S_0(l_1(x), \dots, l_n(x)) = \sum_{j=1}^n D_j l_j(x)$. Множество всевозможных методов приближения содержит в себе множество линейных методов, поэтому неравенства (5) обращаются в равенства. При $R = \infty$ для любого метода приближения $r_n(S) = \infty$, и всякий метод, а значит, и всякий линейный метод, будет являться наилучшим. Теорема доказана. \square

При некоторых дополнительных условиях на функционалы L, l_1, \dots, l_n может быть доказана теорема единственности для линейного наилучшего метода приближения.

Теорема 2. Пусть относительно множества W выполнены предположения теоремы 1. Тогда, если функции $\varphi_j(\varepsilon) = \sup_{x \in A_j(\varepsilon)} \operatorname{Re} L(x)$

и $\psi_j(\varepsilon) = \varphi_j(i\varepsilon)$, где

$$A_j(\varepsilon) = \{ x | x \in W, \operatorname{Im} L(x) = 0, l_k(x) = \varepsilon \delta_{jk}, k = 1, \dots, n \},$$

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \neq k, \end{cases}$$

дифференцируемы в нуле при всех $j = 1, \dots, n$, то метод

$$S_0(l_1(x), \dots, l_n(x)) = \sum_{j=1}^n [\varphi'_j(0) - i\psi'_j(0)] l_j(x)$$

является единственным линейным наилучшим методом приближения функционала $L(x)$ по значениям функционалов $l_1(x), \dots, l_n(x)$ на множестве W .

Доказательство. В теореме 1 было определено множество W_n и доказано существование опорной к нему гиперплоскости (1). Рассматривая точки W_n , лежащие в плоскостях (x_0, x_j) и (x_0, y_j) , нетрудно показать, что при условии дифференцируемости функций $\varphi_j(\varepsilon)$ и $\psi_j(\varepsilon)$ в нуле гиперплоскость (1) единственна и имеют место равенства $a_j = \varphi'_j(0)$, $b_j = \psi'_j(0)$, $j = 1, \dots, n$. Таким образом, метод

$$S_0(l_1(x), \dots, l_n(x)) = \sum_{j=1}^n (a_j - ib_j) l_j(x) = \sum_{j=1}^n [\varphi'_j(0) - i\psi'_j(0)] l_j(x)$$

является линейным наилучшим методом приближения. Пусть теперь $S'_0(l_1(x), \dots, l_n(x)) = \sum_{j=1}^n C_j l_j(x)$ — некоторый линейный наилучший метод приближения. Это означает, что

$$\sup_{x \in W} \left| L(x) - \sum_{j=1}^n C_j l_j(x) \right| = \sup_{\substack{x \in W \\ l_1(x) = \dots = l_n(x) = 0}} |L(x)| = R.$$

Следовательно,

$$\operatorname{Re} L(x) - \sum_{j=1}^n \operatorname{Re} C_j \operatorname{Re} l_j(x) + \sum_{j=1}^n \operatorname{Im} C_j \operatorname{Im} l_j(x) \leq R$$

при всех $x \in W$. Переходя к точкам множества W_n , получаем, что гиперплоскость

$$x_0 = \sum_{j=1}^n \operatorname{Re} C_j \operatorname{Re} x_j(x) + \sum_{j=1}^n \operatorname{Im} C_j y_j(x) + R$$

будет опорной гиперплоскостью к множеству W_n , проходящей через граничную точку $(R, 0, \dots, 0)$. В силу единственности такой гиперплоскости $\operatorname{Re} C_j = a_j = \varphi'_j(0)$, $\operatorname{Im} C_j = -b_j = -\psi'_j(0)$. Теорема доказана. \square

Для вещественных функционалов L, l_1, \dots, l_n и пространства X утверждение теоремы 1 было доказано, например, в работе [1].

2. Рассмотрим класс функций $A(G, M)$, аналитических в односвязной области G и удовлетворяющих условию $|f(z)| \leq M$, $z \in G$. Пусть z_1, \dots, z_n — некоторые различные точки из области G . Поставим задачу о наилучшем приближении величины $f(z)$ по значениям $f(z_1), \dots, f(z_n)$ на классе $A(G, M)$ при любом $z \in G$.

Назовем погрешностью наилучшего приближения в точке z величину

$$r(z, z_1, \dots, z_n) = \inf_S \sup_{f \in A(G, M)} |f(z) - S(z, f(z_1), \dots, f(z_n))|,$$

а метод $S_0(z, f(z_1), \dots, f(z_n))$ — наилучшим методом приближения, если при всех $z \in G$ имеет место равенство

$$r(z, z_1, \dots, z_n) = \sup_{f \in A(G, M)} |f(z) - S_0(z, f(z_1), \dots, f(z_n))|.$$

Будем считать, что односвязная область G не есть вся расширенная плоскость или расширенная плоскость с одной выколотой точкой, так как в этих случаях поставленная задача решается точно в любой точке $z \in G$.

Теорема 3. Метод

$$S_0(z, f(z_1), \dots, f(z_n)) = \sum_{j=1}^n \frac{\omega_j(z)}{\omega_j(z_j)} [1 - |W_j(z)|^2] f(z_j)$$

является единственным линейным наилучшим методом на классе $A(G, M)$ и для его погрешности справедливо равенство

$$r(z, z_1, \dots, z_n) = M \prod_{j=1}^n |W_j(z)|;$$

здесь $W_j(z)$ — конформное отображение области G в единичный круг, переводящее точку z_j в нуль, а $\omega_j(z) = \prod_{k \neq j} W_k(z)$.

Доказательство. Очевидно, класс $A(G, M)$ удовлетворяет условиям теоремы 1. Отсюда сразу следует существование линейного наилучшего метода и равенство для его погрешности

$$r(z, z_1, \dots, z_n) = \sup_{\substack{f \in A(G, M) \\ f(z_1) = \dots = f(z_n) = 0}} |f(z)|.$$

Из принципа максимума модуля следует, что для любой функции $f(z) \in A(G, M)$, обращающейся в нуль в точках z_1, \dots, z_n , справедливо представление $f(z) = \prod_{j=1}^n W_j(z)g(z)$, где $g(z) \in A(G, M)$.

Таким образом,

$$r(z, z_1, \dots, z_n) = M \prod_{j=1}^n |W_j(z)|.$$

По теореме 2 для нахождения линейного наилучшего метода и доказательства его единственности достаточно доказать дифференцируемость по ε в нуле функций

$$\varphi_j(\varepsilon, z) = \sup_{f \in A_j(\varepsilon)} \operatorname{Re} f(z), \quad \psi_j(\varepsilon, z) = \varphi_j(i\varepsilon, z),$$

где

$$A_j(\varepsilon) = \{ f | f \in A(G, M), \operatorname{Im} f(z) = 0, f(z_k) = \varepsilon \delta_{jk} \},$$

и найти $\partial \varphi_j(0, z)/\partial \varepsilon$, $\partial \psi_j(0, z)/\partial \varepsilon$. Пусть $f(\xi) \in A(G, M)$ и $f(z_j) = w \delta_{jk}$. Тогда $f(\xi)$ можно представить в виде $f(\xi) = \omega_j(\xi)g(\xi)$, где $g(\xi) \in A(G, M)$ и $g(z_j) = w/\omega_j(z_j)$. Предположим, что $|w| < M|\omega_j(z_j)|$, тогда функция

$$g_1(\xi) = M^2 \frac{g(\xi) - w/\omega_j(z_j)}{M^2 - \bar{w}g(\xi)/\omega_j(z_j)}$$

будет принадлежать классу $A(G, M)$ и обращаться в нуль в точке z_j . Следовательно, она представима в виде $g_1(\xi) = W_j(\xi)f_1(\xi)$, где $f_1(\xi) \in A(G, M)$. Итак, для функции $f(\xi)$ имеем представление

$$f(\xi) = M^2 \omega_j(\xi) \frac{W_j(\xi)f_1(\xi) + \frac{w}{\omega_j(z_j)}}{M^2 + \frac{\bar{w}}{\omega_j(z_j)} W_j(\xi)f_1(\xi)}, \quad f_1(\xi) \in A(G, M).$$

Таким образом, исследование функций $\varphi_j(\varepsilon, z)$ и $\psi_j(\varepsilon, z)$ при фиксированном z свелось к исследованию дробно-линейной функции

$$u = M^2 \omega_j(z) \frac{W_j(z)v + \frac{w}{\omega_j(z_j)}}{\frac{\bar{w}}{\omega_j(z_j)} W_j(z)v + M^2}$$

при $|v| \leq M$ и $w = \varepsilon, i\varepsilon$. Пользуясь свойствами дробно-линейных функций (см. [2]), можно показать, что при достаточно малых $|\varepsilon|$

$$\begin{aligned}\varphi_j(\varepsilon, z) &= \operatorname{Re} w_0 + \sqrt{\rho^2 - (\operatorname{Im} w_0)^2}, \\ \psi_j(\varepsilon, z) &= -\operatorname{Im} w_0 + \sqrt{\rho^2 - (\operatorname{Re} w_0)^2},\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}w_0 &= \varepsilon M^2 \frac{\omega_j(z)}{\omega_j(z_j)} \cdot \frac{1 - |W_j(z)|^2}{M^2 - \varepsilon^2 \left| \frac{W_j(z)}{\omega_j(z_j)} \right|^2}, \\ \rho &= M^2 |\omega_j(z) W_j(z)| \frac{M^2 - \varepsilon^2 |\omega_j(z_j)|^{-2}}{M^2 - \varepsilon^2 \left| \frac{W_j(z)}{\omega_j(z_j)} \right|^2}.\end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi_j(0, z)}{\partial \varepsilon} &= [1 - |W_j(z)|^2] \operatorname{Re} \frac{\omega_j(z)}{\omega_j(z_j)}, \\ \frac{\partial \psi_j(0, z)}{\partial \varepsilon} &= -[1 - |W_j(z)|^2] \operatorname{Im} \frac{\omega_j(z)}{\omega_j(z_j)}.\end{aligned}$$

По теореме 2 метод

$$S_0(z, f(z_1), \dots, f(z_n)) = \sum_{j=1}^n \frac{\omega_j(z)}{\omega_j(z_j)} [1 - |W_j(z)|^2] f(z_j)$$

является единственным линейным наилучшим методом приближения. Теорема доказана. \square

3. Пусть в области G задано замкнутое множество E со связным дополнением CE . Рассмотрим задачу минимизации погрешности наилучшего приближения в точках множества E за счет выбора узлов z_1, \dots, z_n . Величину

$$R_n(G, E) = \inf_{z_1, \dots, z_n} \|r(z, z_1, \dots, z_n)\|_E$$

назовем погрешностью наилучшего приближения на множестве E ; $\|r(z)\|_E = \max_{z \in E} |r(z)|$. Точки z_1^0, \dots, z_n^0 назовем оптимальными узлами, если имеет место равенство

$$R_n(G, E) = \|r(z, z_1^0, \dots, z_n^0)\|_E.$$

В случае, когда область G — эллипс \mathcal{E}_c с фокусами в точках ± 1 и суммой полуосей c , а множество E есть отрезок $[-1, 1]$, имеет место равенство

$$R_n(\mathcal{E}_c, [-1, 1]) = 2Mc^{-n} + O(c^{-5n}),$$

а оптимальные узлы не зависят от c и являются узлами Чебышева $z_j^0 = \cos \frac{2j-1}{2n}\pi$ (см. [3]).

Для рассмотрения общего случая нам потребуется понятие емкости конденсатора, которое было введено и исследовано в работах Полна и Сеге (см. [4]). Мы будем пользоваться определением емкости, данным в работе [5]. Конденсатором будем называть пару (E, F) , где E и F — непересекающиеся замкнутые подмножества расширенной комплексной плоскости, каждое из которых имеет связное дополнение. Пусть H — обобщенное решение задачи Дирихле в области $D = C(E \cup F)$, построенное по граничным данным, равным 0 на ∂E и 1 на ∂F ; Γ — произвольный контур, состоящий из конечного числа аналитических жордановых кривых, принадлежащих D и в совокупности разделяющих множества E и F ; $\frac{\partial}{\partial n}$ — производная по нормали к контуру Γ , внешней по отношению к множеству, ограниченному Γ и содержащему E .

Емкостью конденсатора (E, F) называется величина

$$c(E, F) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\partial H}{\partial n} ds,$$

а величина $h(E, F) = c^{-1}(E, F)$ называется модулем конденсатора (E, F) . В частности, если D — двусвязная область, то риманов модуль ρ области D связан с модулем конденсатора (E, F) соотношением $\rho = e^{h(E, F)}$.

Теорема 4. *Для погрешности наилучшего приближения на E имеют место соотношения:*

$$(6) \quad R_n(G, E) \geq Me^{-nh(E, CG)} \text{ при всех } n \geq 0;$$

$$(7) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{R_n(G, E)} = e^{-h(E, CG)},$$

где $h(E, CG)$ — модуль конденсатора (E, CG) .

Доказательство. В силу инвариантности величин $R_n(G, E)$ и $h(E, CG)$ относительно конформного преобразования области G достаточно доказать теорему в предположении, что G — единичный круг. В этом случае

$$r(z, z_1, \dots, z_n) = M \prod_{j=1}^n \left| \frac{z - z_j}{1 - \bar{z}_j z} \right|,$$

и

$$R_n(G, E) = M \inf_{|z_j| < 1} \left\| \prod_{j=1}^n \frac{z - z_j}{1 - \bar{z}_j z} \right\|_E.$$

Рассмотрим множество F , симметричное множеству E относительно единичной окружности. Положим

$$\sigma_n(E, F) = \sup_{r_n} \frac{\min\{|r_n(z)|, z \in F\}}{\max\{|r_n(z)|, z \in E\}},$$

где верхняя грань берется в классе всех рациональных функций порядка не выше n . Очевидно,

$$\sigma_n(E, F) \geq \sup_{B_n} \frac{\min\{|B_n(z)|, z \in F\}}{\max\{|B_n(z)|, z \in E\}},$$

где верхняя грань берется в классе всех рациональных функций вида $B_n(z) = \prod_{j=1}^n \frac{z - z_j}{1 - \bar{z}_j z}$, $|z_j| < 1$. Из равенства $|B_n(1/\bar{z})| = |B_n(z)|^{-1}$ следует, что

$$(8) \quad \min\{|B_n(z)|, z \in F\} = [\max\{|B_n(z)|, z \in E\}]^{-1}.$$

Имеем

$$\sigma_n(E, F) \geq \sup_{B_n} [\max\{|B_n(z)|, z \in E\}]^{-2}$$

или

$$\inf_{B_n} \|B_n(z)\|_E \geq \sigma_n^{-1/2}(E, F).$$

Пользуясь оценкой

$$\sigma_n(E, F) \leq e^{nh(E, F)},$$

полученной в работе [5], и замечая, что $h(E, F) = 2h(E, CG)$, получим

$$R_n(G, E) \geq M e^{-nh(E, CG)}.$$

Для доказательства равенства (7) нам потребуется лемма из работы [5], которую мы сформулируем для случая, когда E и F симметричны относительно единичной окружности.

Лемма. Для любого $\varepsilon > 0$ существует число $N(\varepsilon)$ такое, что для всех $n > N(\varepsilon)$ существуют рациональные функции $B_n(z)$ вида

$$B_n(z) = \prod_{j=1}^n \frac{z - z_j}{1 - \bar{z}_j z} \text{ такие, что}$$

$$\frac{\min\{|B_n(z)|, z \in F\}}{\max\{|B_n(z)|, z \in E\}} > e^{n[h(E, F) - \varepsilon]}.$$

Из равенства (8) и леммы следует, что при любом $\varepsilon > 0$ для достаточно больших n существуют рациональные функции $B_n(z)$ такие, что

$$\|B_n(z)\|_E < e^{-n[h(E, F) - \varepsilon]}.$$

Отсюда

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{R_n(G, E)} \leq e^{-h(E, CG)}.$$

С другой стороны, из неравенства (6)

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{R_n(G, E)} \geq e^{-h(E, CG)}.$$

Следовательно, имеет место равенство (7). Теорема доказана. \square

Если множество E ограничено конечным числом непересекающихся аналитических кривых, то узлы \tilde{z}_j , выбранные равномерно распределенными на ∂E относительно параметра σ , $d\sigma = \frac{\partial H}{\partial n} ds$ ($H(z)$ — решение задачи Дирихле для области $G \setminus E$, принимающее значение 0 на ∂E и 1 на ∂G), или на любой линии уровня $\Gamma_\rho = \{z | H(z) = \rho, \rho < 0\}$, принадлежащей области, в которую можно продолжить гармонически $H(z)$, будут оптимальными по порядку, т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|r(z, z_1, \dots, z_n)\|_E} = e^{-h(E, CG)}.$$

Это следует из одной теоремы Уолша [6, § 8.7, теорема 9].

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
25.11.1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- [1] Б а х в а л о в Н. С., Об оптимальности линейных методов приближения операторов на выпуклых классах функций, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **11**, № 4 (1971), 1014–1018.
- [2] Л а в р е н т ь е в М. А., Ш а б а т Б. В., Методы теории функций комплексного переменного, М., “Наука”, 1973.
- [3] О с и п е н к о К. Ю., Оптимальная интерполяция аналитических функций, Матем. заметки, **12**, № 4 (1972), 465–476.
- [4] П о л и а Г., С е г е Г., Изопериметрические неравенства в математической физике, М., Физматгиз, 1962.
- [5] Г о н ч а р А. А., О задачах Е. И. Золотарева, связанных с рациональными функциями, Матем. сб., **78** (120), № 4 (1969), 640–654.
- [6] У о л ш Дж. Л., Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области, М., ИЛ, 1961.