О ПРОИЗВЕДЕНИЯХ БЛЯШКЕ, НАИМЕНЕЕ УКЛОНЯЮЩИХСЯ ОТ НУЛЯ

К. Ю. ОСИПЕНКО

Положим
$$B(x,\overline{x})=\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{x-x_j}{1-x_jx}\right)^{\nu_j},$$
где $\overline{x}=(x_1,\dots,x_n)$, $x_j\in(-1,1)$, а $\nu_1,\dots,\nu_n$ — натуральные числа. Функция $B(x,\overline{x})$ называется произведением Бляшке с вещественными нулями x_j кратности ν_j. Пусть $s(x)$ — неотрицательная весовая функция, непрерывная в интервале (a,b) и отличная от тождественного нуля. Положим
$$\varphi(\overline{x})=\int_a^b|B(x,\overline{x})|^q s(x)\,dx,$$
где $-1\le a<b\le 1$, а $1\le q<\infty$. Рассмотрим экстремальные задачи:
$$\varphi(\overline{x})\to\inf,\quad -1<x_1<\ldots<x_n<1, \tag{1}$$
$$\max_{x\in[a,b]}|B(x,\overline{x})s(x)|\to\inf,\quad -1<x_1<\ldots<x_n<1; \tag{2}$$
в последнем случае считается, что функция $s(x)$ непрерывна на $[a,b]$.

Задачи подобного типа возникают при решении задач оптимальной интерполяции [1–4], экстраполяции [5], нахождении оптимальных квадратурных формул [6,7] и поперечников [8] на классах ограниченных аналитических в единичном круге функций. Результаты, касающиеся задачи (2) при $s(x)=1$, можно найти в работах [1–5].

Здесь мы рассмотрим задачу (1).

Теорема 1. *При любом $1\le q<\infty$ существует система точек $\overline{z}=(z_1,\dots,z_n)$, на которой достигается нижняя грань в задаче* (1)*, причем любая такая система удовлетворяет неравенствам $a<z_1<\ldots<z_n<b$.*

Доказательство. Будем использовать схему, применяемую в аналогичной теореме для многочленов, из работы [9]. Нетрудно показать, что функция $\varphi(\overline{x})$ непрерывна при $-1\le x_1\le\ldots\le x_n\le 1$. Поэтому существует система точек $\overline{z}=(z_1,\dots,z_n)$ из этой области, на которой достигается нижняя грань в задаче (1). При $\xi=\pm1$
$$1=\left|\frac{x-\xi}{1-\xi x}\right|>\left|\frac{x-x_1}{1-x_1x}\right|$$

для любых $x, x_1 \in (-1, 1)$. Отсюда следует, что $-1 < z_1$, а $z_n < 1$. Более того, можно показать, что $a < z_1$, $z_n < b$. Действительно, пусть $-1 < a_1 = z_1 = \ldots = z_m$ и $z_m < z_{m+1}$, если $m < n$. Рассмотрим функцию

$$\alpha(y) = \int_a^b \left|\frac{x-y}{1-yx}\right|^{\nu q} \prod_{j=m+1}^{n} \left|\frac{x-z_j}{1-z_j x}\right|^{\nu_j q} s(x)\,dx,$$

где $\nu = \nu_1 + \ldots + \nu_m$. Поскольку $\alpha(a_1) = \varphi(\overline{z})$, а при $a_1 \le a$

$$\alpha'(a_1) = -\nu q \int_a^b \left|\frac{x-a_1}{1-a_1 x}\right|^{\nu q - 1} \frac{1-x^2}{(1-a_1 x)^2} \times \operatorname{sign}(x-a_1) \prod_{j=m+1}^{n} \left|\frac{x-z_j}{1-z_j x}\right|^{\nu_j q} s(x)\,dx < 0,$$

то при положительных значениях $y - a_1$, достаточно близких к нулю, $\alpha(y) < \alpha(a_1)$, что противоречит экстремальности $\overline{z}$. Аналогично доказывается, что $z_n < b$.

Докажем теперь справедливость неравенств $z_1 < \ldots < z_n$. Предположим, что $z_j = z_{j+1} = \ldots = z_m = c$ и $z_{j-1} < z_j$ при $j > 1$, а $z_m < z_{m+1}$ при $m < n$. Положим

$$\Phi(x) = \left(\frac{1-cx}{x-c}\right)^{\nu_j + \nu_m} B(x, \overline{z}),$$

$$\psi(\varepsilon) = \int_a^b \left|\frac{x-c_1}{1-c_1 x}\right|^{q\nu_j} \left|\frac{x-c_2}{1-c_2 x}\right|^{q\nu_m} |\Phi(x)|^q s(x)\,dx,$$

где $c_1 = c - \nu_m \varepsilon$, $c_2 = c + \nu_j \varepsilon$. Имеем

$$\psi'(\varepsilon) = -\varepsilon q \nu_j \nu_m (\nu_j + \nu_m) \int_a^b \frac{(1-x^2)[1-(c_1+c_2)x + x^2]}{(x-c_1)(x-c_2)(1-c_1 x)(1-c_2 x)} \times \left|\frac{x-c_1}{1-c_1 x}\right|^{q\nu_j} \left|\frac{x-c_2}{1-c_2 x}\right|^{q\nu_m} |\Phi(x)|^q s(x)\,dx.$$

Отсюда $\psi'(0) = 0$ и

$$\psi''(0) = -\varepsilon q \nu_j \nu_m (\nu_j + \nu_m) \int_a^b \frac{(1-x^2)(1-2cx+x^2)}{(x-c)^2(1-cx)^2} \times \left|\frac{x-c}{1-cx}\right|^{q(\nu_j+\nu_m)} |\Phi(x)|^q s(x)\,dx < 0.$$

Тем самым при достаточно малых положительных ε $\psi(\varepsilon) < \psi(0) = \varphi(\overline{z})$, т. е. $\varphi(\overline{z}_\varepsilon) < \varphi(\overline{z})$, где $\overline{z}_\varepsilon = (z_1, \ldots, z_{j-1}, c_1, c, \ldots, c, c_2, z_{m+1}, \ldots, z_n)$, что противоречит экстремальности $\overline{z}$. Теорема доказана. $\square$

Пусть $-1 < a < b < 1$. Тогда с помощью конформного преобразования единичного круга задача (1) может быть сведена к аналогичной задаче на симметричном отрезке

$$\int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} |B(z,\overline{z})|^q s_1(z)\,dz \to \inf, \quad -\sqrt{k} < z_1 < \ldots < z_n < \sqrt{k}.$$

Сделав замену $z = \sqrt{k}t$, получим эквивалентную задачу:

$$F(\overline{t}) \to \inf, \quad -1 < t_1 < \ldots < t_n < 1, \tag{3}$$

в которой

$$F(\overline{t}) = \int_{-1}^{1} |Q(t,\overline{t},k)|^q p(t)\,dt,$$
$$Q(t,\overline{t},k) = \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{t-t_j}{1-kt_jt}\right)^{\nu_j},$$

а $p \in W$, где через W обозначен класс неотрицательных весовых функций, непрерывных в интервале $(-1,1)$ и отличных от тождественного нуля.

Отметим, что задача (3) может рассматриваться как обобщение задачи о наименее уклоняющихся от нуля многочленах с фиксированными кратностями нулей (случай, когда $k = 0$), рассмотренной в работе [9]. Оказывается, что задача (3) (следовательно, и задача (1)) может иметь неединственное решение. Тем не менее, мы покажем, что при достаточно малых k единственность есть.

Введем следующие обозначения:

$$r = q \min_{1\le j\le n} \nu_j, \quad N = \sum_{j=1}^{n} \nu_j.$$

$$\varphi_j(\overline{t}) = \frac{\partial F(\overline{t})}{\partial t_j}$$
$$= -q\nu_j \int_{-1}^{1} |Q(t,\overline{t},k)|^q \frac{1-kt^2}{(t-t_j)(1-kt_jt)} p(t)\,dt, \quad (j = 1,\ldots,n),$$
$$I(\overline{t},p,k) = D(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)/D(t_1,\ldots,t_n),$$
$$\gamma_m(p,q) = \inf_{t_j} \int_{-1}^{1} \left|\prod_{j=1}^{m}(t-t_j)\right|^q p^*(t)\,dt,$$

где p^* — нормированный вес:

$$p^*(t) = p(t) \Big/ \int_{-1}^{1} p(t)\,dt.$$

Лемма 1. *Пусть $1 < r < \infty$ и $p \in W$. Если выполнено условие*

$$k \le \frac{[r-1-(r+1)k](1-k)^4 \gamma_N(p,q)}{(1+k)^4 qN2^{qN+1}}, \tag{4}$$

то для любой системы точек $-1 < u_1 < \ldots < u_n < 1$, удовлетворяющей необходимым условиям экстремума

$$\varphi_j(\overline{u}) = 0 \quad (j = 1, \ldots, n) \tag{5}$$

выполняется неравенство $I(\overline{u}, p, k) > 0$.

Доказательство. Обозначим элементы якобиана $I(\overline{u}, p, k)$ через a_{jl}. Имеем

$$a_{jj} = \frac{\partial \varphi_j}{\partial t_j}\Big|_{\overline{t}=\overline{u}} = q\nu_j \int_{-1}^{1} |Q(t, \overline{u}, k)|^q \times \frac{[q\nu_j(1-kt^2) - 1 + 2ku_j t - kt^2](1-kt^2)}{(t-u_j)^2(1-ku_j t)^2} p(t)\, dt.$$

В силу равенств (5)

$$\begin{aligned} a_{jj} &= a_{jj} + \frac{2ku_j}{1+ku_j^2}\varphi_j(\overline{u}) \\ &= q\nu_j \int_{-1}^{1} |Q(t, \overline{u}, k)|^q \frac{1-kt^2}{(t-u_j)^2(1-ku_j t)^2} \Big[q\nu_j(1-kt^2) \\ &\quad - \frac{1-ku_j^2}{1+ku_j^2}(1+kt^2) \Big] p(t)\, dt \geq q\nu_j[r - 1 - (r+1)k] \int_{-1}^{1} |Q(t, \overline{u}, k)|^q \\ &\quad \times \frac{1-kt^2}{(t-u_j)^2(1-ku_j t)^2} p(t)\, dt. \end{aligned}$$

Из условия (4) вытекает, что $r - 1 - (r+1)k > 0$. Отсюда следует утверждение леммы при $n = 1$. Пусть $n > 1$. Тогда

$$\begin{aligned} a_{jj} &> q\nu_j \frac{[r-1-(r+1)k](1-k)}{(1+k)^{qN+2}} \times \int_{-1}^{1} |t-u_j|^{q\nu_j - 2} \prod_{m \neq j} |t-u_m|^{q\nu_m} p(t)\, dt \\ &> q\nu_j \frac{[r-1-(r+1)k](1-k)}{4(1+k)^{qN+2}} \gamma_N(p, q) \int_{-1}^{1} p(t)\, dt. \end{aligned} \tag{6}$$

При $l \neq j$

$$a_{jl} = \frac{\partial \varphi_j}{\partial t_l}\Big|_{\overline{t}=\overline{u}} = q^2\nu_j\nu_l \int_{-1}^{1} |Q(t, \overline{u}, k)|^q \frac{(1-kt^2)^2 p(t)}{(t-u_j)(1-ku_j t)(t-u_l)(1-ku_l t)}\, dt.$$

В силу равенств (5)

$$
\begin{aligned}
a_{jl} &= a_{jl} + q\frac{\nu_l(1+ku_j^2)\varphi_j(\overline{u}) - \nu_j(1+ku_l^2)\varphi_l(\overline{u})}{(u_j-u_l)(1-ku_lu_j)} \\
&= -2kq^2\nu_j\nu_l\int_{-1}^{1}|Q(t,\overline{u},k)|^q\frac{t^2(1-kt^2)p(t)}{(t-u_j)(1-ku_jt)(t-u_l)(1-ku_lt)}\,dt.
\end{aligned}
$$

Нетрудно убедиться, что при всех $u, t \in [-1,1]$

$$
\left|\frac{t-u}{1-kut}\right| \le \frac{2}{1+k}, \qquad \frac{1-kt^2}{(1-kut)^2} \le \frac{1}{1-k}, \qquad \frac{1}{1-kut} \le \frac{1}{1-k}.
$$

Таким образом,

$$
|a_{jl}| \le kq^2\nu_j\nu_l(1-k)^{-3}(1+k)^{2-qN}2^{qN-1}\int_{-1}^{1}p(t)\,dt.
$$

Отсюда

$$
\sum_{l\ne j}|a_{jm}| \le kq^2\nu_jN(1-k)^{-3}(1+k)^{2-qN}2^{qN-1}\int_{-1}^{1}p(t)\,dt. \tag{7}
$$

Для положительности якобиана $I(\overline{u},p,k)$ достаточно выполнения неравенств $a_{jj} > \sum\limits_{l\ne j}|a_{jl}|$ $(j=1,\dots,n)$ (см., например, [10, с. 415]). Поэтому, учитывая (6) и (7), достаточно доказать, что

$$
\frac{[r-1-(r+1)k](1-k)}{4(1+k)^2}\gamma_N(p,q) \ge kqN\frac{(1+k)^2 2^{qN-1}}{(1-k)^3}.
$$

Последнее неравенство эквивалентно неравенству (4). Лемма доказана. $\square$

Лемма 2. *При $n=1$ и $1<r<\infty$ задача (3) имеет единственное решение для любой функции $p\in W$ тогда и только тогда, когда $0<k\le(r-1)/(r+1)$.*

Теорема 2. *Пусть $1<r<\infty$ и $p\in W$. Если выполнено условие (4), то существует единственная система точек $-1<u_1<\ldots<u_n<1$, удовлетворяющая равенствам (5).*

Доказательства леммы 2 и теоремы2 аналогичны доказательствам леммы 3.2 и теоремы 3.2 из [7].

Заметим, что условие (4) выполнено, если

$$
k \le \frac{r-1}{9r-7+qN2^{qN+1}\gamma_N^{-1}(p,q)}. \tag{8}
$$

Действительно, функция $f(k) = [r-1-(r+1)k](1-k)^4(1+k)^{-4}$ на отрезке $[0,(r-1)/(r+1)]$ выпукла вниз, а $f'(0) = 7-9r$, следовательно, $f(k) \ge r-1-(9r-7)k$ на этом отрезке. Таким образом, если выполнено неравенство

$$k \leq \frac{[r-1-(9r-7)k]\gamma_N(p,q)}{qN2^{qN+1}},$$

которое эквивалентно (8), то имеет место неравенство (4).

Обозначим через K, L и Λ_n полные эллиптические интегралы первого рода для модулей k, l и λ_n, соответственно.

Теорема 3. *Пусть* $\nu_1 = \ldots = \nu_n = 1$. *Системы точек*

$$\overline{u}_1 = \left\{\operatorname{sn}\left[\left(\frac{2j-1}{n} - 1\right)K, k\right]\right\}_{j=1}^{n},$$
$$\overline{u}_2 = \left\{\operatorname{sn}\left[\left(\frac{2j}{n+1} - 1\right)K, k\right]\right\}_{j=1}^{n}.$$

для весов

$$p_1(t) = \frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \quad p_2(t) = p_1(t)\left(\frac{1-t^2}{1-k^2t^2}\right)^{q/2},$$

соответственно, при любых $1 \leq q < \infty$ *и* $0 \leq k < 1$ *удовлетворяют равенствам* (5).

Доказательство. Положим

$$t(x) = \left(\frac{2}{1+k}x - 1\right)\left(1 - \frac{2k}{1+k}x\right)^{-1}.$$

Сделав замену $t = t(x)$, получим

$$\varphi_j(\overline{u}_r) = \frac{1}{2(1-k)}\left(1 - \frac{2k}{1+k}x_{rj}\right)^2\left(\frac{2}{1+k}\right)^{q(n+r+1)} A_{rj} \quad (r = 1, 2),$$

где $t(x_{rj}) = u_{rj}$,

$$(9) \qquad A_{rj} = \int_0^1 \prod_{m=1}^{n}\left|\frac{x - x_{rm}}{1 - l^2 x_{rm} x}\right|^q \frac{1 - l^2x^2}{(x - x_{rj})(1 - l^2 x_{rj} x)} s_r(x)\, dx,$$

$$s_1(x) = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)(1-l^2x)}}, \quad s_2(x) = s_1(x)\left[\frac{x(1-x)}{1-l^2x}\right]^{q/2},$$

$$l = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}.$$

С помощью преобразования Гаусса эллиптических функций (см., например, [11, с. 134]) можно показать, что

$$x_{1j} = \operatorname{sn}^2\left(\frac{2j-1}{2n}L, l\right), \quad x_{2j} = \operatorname{sn}^2\left(\frac{j}{n+1}L, l\right) \quad (j = 1, \ldots, n).$$

Сделаем в интегралах (9) замену $x = \operatorname{sn}^2(y, l)$. В силу первого главного преобразования $2n$-й и $2(n+1)$-й степеней [11, с. 136, 284] имеем

$$\prod_{m=1}^{n} \frac{x_{1m} - \operatorname{sn}^2(y,l)}{1 - l^2 x_{1m} \operatorname{sn}^2(y,l)} = c_n(l) \operatorname{sn}\left[\left(\frac{2ny}{L} + 1\right)\Lambda_n, \lambda_n\right],$$

$$\prod_{m=1}^{n} \frac{x_{2m} - \operatorname{sn}^2(y,l)}{1 - l^2 x_{2m} \operatorname{sn}^2(y,l)} = c_{n+1}(l) \operatorname{sn}\left[\frac{2(n+1)y}{L}\Lambda_{n+1}, \lambda_{n+1}\right] \frac{\operatorname{dn}(y,l)}{\operatorname{sn}(y,l)\operatorname{cn}(y,l)},$$

где

$$c_n(l) = \prod_{m=1}^{n} \operatorname{sn}^2\left(\frac{2j-1}{2n}L, l\right), \quad \lambda_n = l^{2n} c_n^2(l).$$

Таким образом,

$$A_{1j} = 2c_n^q(l) \int_0^L \left|\operatorname{sn}\left[\left(\frac{2ny}{L} + 1\right)\Lambda_n, \lambda_n\right]\right|^q \times \frac{1 - l^2 \operatorname{sn}^4(y,l)}{[\operatorname{sn}^2(y,l) - x_{1j}][1 - l^2 x_{1j} \operatorname{sn}^2(y,l)]}\, dy,$$

$$A_{2j} = 2c_{n+1}^q(l) \int_0^L \left|\operatorname{sn}\left[\frac{2(n+1)y}{L}\Lambda_{n+1}, \lambda_{n+1}\right]\right|^q \times \frac{1 - l^2 \operatorname{sn}^4(y,l)}{[\operatorname{sn}^2(y,l) - x_{2j}][1 - l^2 x_{2j} \operatorname{sn}^2(y,l)]}\, dy.$$

Из леммы 2.2 работы [7] следует, что $A_{1j} = A_{2j} = 0$ $(j = 1, \ldots, n)$. Теорема доказана. □

При всех $x \in (-1, 1)$ и $z_j \in \mathbb{C}$ справедливо неравенство

$$\left|\frac{x - z_j}{1 - \overline{z}_j x}\right| \geq \left|\frac{x - z_j^*}{1 - z_j^* x}\right|,$$

где $z_j^* = \min(1, |\operatorname{Re} z_j|) \operatorname{sign} \operatorname{Re} z_j$, которое является строгим при $z_j \neq z_j^*$. Отсюда следует, что при $\nu_1 = \ldots = \nu_n = \nu$ задача (1) эквивалентна задаче

$$\int_a^b \left|\prod_{j=1}^{n} \frac{x - z_j}{1 - \overline{z}_j x}\right|^{\nu q} s(x)\, dx \to \inf, \quad z_j \in \mathbb{C},$$

а задача (3) — задаче

$$\int_{-1}^1 \left|\prod_{j=1}^{n} \frac{t - t_j}{1 - k\bar{t}_j t}\right|^{\nu q} p(t)\, dt \to \inf, \quad t_j \in \mathbb{C}.$$

Если $k=0$, то $K=\pi/2$, $\operatorname{sn}(x,0)=\sin x$, а системы точек $\overline{u}_1$, $\overline{u}_2$ совпадают с нулями многочленов Чебышева

$$T_n(t)=\frac{1}{2^{n-1}}\cos(n\arccos t).$$
$$U_n(t)=\frac{1}{2^n}\frac{\sin[(n+1)\arccos t]}{\sqrt{1-t^2}},$$

соответственно. Из теорем 2 и 3 в этом случае следует (см. также [12, с. 292]), что

$$\text{(10)}\quad \inf_{t_j\in\mathbb{C}}\int_{-1}^{1}\left|\prod_{j=1}^{n}(t-t_j)\right|^q\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_{-1}^{1}|T_n(t)|^q\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\frac{\sqrt{\pi}\Gamma((q+1)/2)}{2^{(n-1)q}\Gamma(q/2+1)},$$

$$\inf_{t_j\in\mathbb{C}}\int_{-1}^{1}\left|\prod_{j=1}^{n}(t-t_j)\right|^q(1-t^2)^{(q-1)/2}\,dt = \int_{-1}^{1}|U_n(t)|^q(1-t^2)^{(q-1)/2}\,dt=\frac{\sqrt{\pi}\Gamma((q+1)/2)}{2^{nq}\Gamma(q/2+1)}.$$

Теорема 4. *Пусть $\nu_1=\ldots=\nu_n=1$, $1<q<\infty$. Тогда при*

$$\text{(11)}\quad 0\le k\le\frac{(q-1)\Gamma((q+1)/2)}{(9q-7)\Gamma((q+1)/2)+2\sqrt{\pi}q\Gamma(q/2+1)n2^{q(2n-2+r)}}$$

имеют место равенства

$$\text{(12)}\quad \inf_{t_j\in\mathbb{C}}\int_{-1}^{1}\left|\prod_{j=1}^{n}\frac{t-t_j}{1-k\bar{t}_jt}\right|^q p_r(t)\,dt=\int_{-1}^{1}|Q(t,\overline{u}_r,k)|^q\,p_r(t)\,dt = \frac{2d_{n+r-1}^q(k)K}{\Lambda_{n+r-1}}I_q(\lambda_{n+r-1})\quad(r=1,2),$$

где

$$d_m(k)=\prod_{j=1}^{[m/2]}\operatorname{sn}^2\left(\frac{2j-1}{m}K,k\right),\quad I_q(\lambda)=\int_0^1\frac{x^q\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\lambda^2x^2)}},$$
$$\lambda_m=k^md_m^2(k).$$

Системы точек $\overline{u}_1$ и $\overline{u}_2$ единственные, на которых достигается нижняя грань в равенствах (12).

Доказательство. Имеем

$$\int_{-1}^{1}p_2(t)\,dt\le\int_{-1}^{1}p_1(t)\,dt=2K,$$

кроме того, $p_1(t) \geq (1-t^2)^{-1/2}$, $p_2(t) \geq (1-t^2)^{(q-1)/2}$. Учитывая равенства (10), получаем

$$\gamma(p_r, q) \geq \frac{\sqrt{\pi}\Gamma((q+1)/2)}{2^{(n-2+r)q}\Gamma(q/2+1)} \frac{1}{2K} \quad (r=1,2).$$

В работе [7] было показано, что $K \leq \pi(1-k^2)^{-1}/2$, поэтому неравенство (4) будет выполнено для веса p_r, если

$$k \leq \frac{\Gamma((q+1)/2)}{2\sqrt{\pi}q\Gamma(q/2+1)n2^{q(2n-2+r)}} g(k),$$

где $g(k) = [q-1-(q+1)k](1-k)^5(1+k)^{-3}$. Поскольку функция $g(k)$ выпукла вверх при $k \in [0, (q-1)/(q+1)]$ и $g'(0) = 7-9q$, то $g(k) \geq q-1-(9q-7)k$ на этом отрезке. Таким образом, неравенство (4) выполнено, если

$$k \leq \frac{[q-1-(9q-7)k]\Gamma((q+1)/2)}{2\sqrt{\pi}q\Gamma(q/2+1)n2^{q(2n-2+r)}},$$

что равносильно неравенству (11). Из теорем 2 и 3 вытекает теперь, что при выполнении условий (11)

$$\inf_{t_j \in \mathbb{C}} \int_{-1}^{1} \left| \prod_{j=1}^{n} \frac{t-t_j}{1-k\bar{t}_j t} \right|^q p_r(t)\,dt = \int_{-1}^{1} |Q(t, \overline{u}_r, k)|^q\, p_r(t)\,dt \tag{13}$$
$$(r=1,2),$$

причем системы $\overline{u}_1$ и $\overline{u}_2$ единственные, для которых справедливы эти равенства. Для вычисления значений интегралов, стоящих в правых частях равенств (13), воспользуемся заменой $t = \operatorname{sn}(u,k)$, а также первым главным преобразованием n-й и $(n+1)$-й степеней. Получаем

$$\int_{-1}^{1} |Q(t, \overline{u}_r, k)|^q\, p_r(t)\,dt = \frac{2d_{n+r-1}^q(k)K}{\Lambda_{n+r-1}} \int_0^{\Lambda_{n+r-1}} \operatorname{sn}^q(x, \lambda_{n+r-1})\,dx$$
$$= \frac{2d_{n+r-1}^q(k)K}{\Lambda_{n+r-1}} I_q(\lambda_{n+r-1}) \quad (r=1,2) \quad (r=1,2).$$

Теорема доказана. □

Рациональные функции $Q(t, \overline{u}_r, k)$ при $\nu_1 = \ldots = \nu_n = 1$ могут рассматриваться как обобщение многочленов Чебышева, так как

$$Q(t, \overline{u}_1, 0) = T_n(t), \quad Q(t, \overline{u}_2, 0) = U_n(t).$$

Возвращаясь к задаче о минимизации произведений Бляшке, из теоремы 4 с помощью замены $t = z\sqrt{k}$ получаем

Следствие 1. *Пусть* $\nu_1 = \ldots = \nu_n = 1$, $1 < q < \infty$. *Тогда при выполнении условий* (11) *имеют место равенства*

$$
(14)\quad \inf_{z_j \in \mathbb{C}} \int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} \left| \prod_{j=1}^{n} \frac{z - z_j}{1 - \overline{z}_j z} \right|^q s_r(z)\, dz = \int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} |B(z, Z_r)|^q\, s_r(z)\, dz
$$
$$
= \frac{2\lambda_{n+r-1}^q K}{k^{(r-1)q/2} \Lambda_{n+r-1}} I_q(\lambda_{n+r-1}) \quad (r = 1, 2),
$$

где

$$
Z_1 = \left\{ \sqrt{k}\, \mathrm{sn} \left[\left(\frac{2j-1}{n} - 1 \right) K, k \right] \right\}_{j=1}^{n},
$$
$$
Z_2 = \left\{ \sqrt{k}\, \mathrm{sn} \left[\left(\frac{2j}{n+1} - 1 \right) K, k \right] \right\}_{j=1}^{n},
$$
$$
s_1(z) = \frac{1}{\sqrt{(k - z^2)(1 - kz^2)}}, \quad s_2(z) = s_1(z) \left(\frac{k - z^2}{k - k^2 z^2} \right)^{q/2}.
$$

Системы точек Z_1 *и* Z_2 *единственные, на которых достигается нижняя грань в равенствах* (14).

Случай равных кратностей $\nu_1 = \ldots = \nu_n = \nu$ сводится к случаю $\nu_1 = \ldots = \nu_n = 1$ заменой q на νq.

Отметим, что системы точек $\overline{u}_1$ и $\overline{u}_2$ удовлетворяют необходимым условиям экстремальности для соответствующих весов при всех $k \in [0, 1)$, поэтому интересен следующий вопрос: остаются ли равенства (12) и (14) справедливыми для всех $k \in [0, 1)$?

З а м е ч а н и е п р и к о р р е к т у р е. Теорема 1 для $s(x) = 1$ независимо доказана в [13], вышедшей после сдачи статьи в редакцию.

Московский авиационный технологический институт им. К. Э. Циолковского

Поступило 16.09.1987
Переработанный вариант 10.08.1989

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] О с и п е н к о К. Ю. Оптимальная интерполяция аналитических функций // Математические заметки. 1972. Т. 12, вып. 4. С. 465–476.
[2] О с и п е н к о К. Ю. Наилучшее приближение аналитических функций по информации об их значениях в конечном числе точек // Математические заметки. 1976. Т. 19, вып. 1. С. 29–40.
[3] B o j a n o v B. Comparison theorems in optimal recovery // Optimal algorithms. Sofia, 1986. P. 15–50.
[4] B o j a n o v B. D., G r o z e v G. R. A note on the optimal recovery of functions in H^∞ // J. Approxim. Theory. 1978. V. 53, N 1. P. 67–77.
[5] O s i p e n k o K. Yu. On optimal extrapolation and interpolation of fuzzy analytic functions // Anal. Math. 1987. V. 13, N 1. P. 199–210.

[6] B o j a n o v B. D. On the existence of optimal quadrature formulae for smooth functions // Calcolo. 1979. V. 16, N 1. P. 61–70.

[7] О с и п е н к о К. Ю. О наилучших и оптимальных квадратурных формулах на классах ограниченных аналитических функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1988. Т. 52, № 1. С. 79–99.

[8] F i s h e r S. D., M i c c h e 1 1 i i C. A. The n-width of sets of analytic functions //Duke Math. J. 1980. V. 47, N 4. P. 789–801.

[9] B o j a n o v B. D. Extremal problems in a set of polynomials with fixed multiplicities of zeros // C. R. Acad. Bulgare Sci. 1978. V. 31, N 4. P. 377–380.

[10] Г а н т м а х е р Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1967.

[11] А х и е з е р Н. И. Элементы теории эллиптических функций. М.: Наука, 1970.

[12] А х и е з е р Н. И. Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965.

[13] U l u c h e v R. An extremal problem in the set of Blashke products with fixed multiplicities of the zeros // Сердика Бълг. Мат. Спис. 1988. V. 14, N 1. P. 98–101.