

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ВОССТАНОВЛЕНИИ ФУНКЦИОНАЛОВ ПО НЕТОЧНЫМ ДАННЫМ

Г. Г. МАГАРИЛ-ИЛЬЯЕВ, К. Ю. ОСИПЕНКО

Введение. Начиная с середины шестидесятих годов в теории приближений большое внимание уделяется задачам восстановления функционалов на некоторых множествах по заданной информации об элементах этих множеств (например, восстановление интеграла от функции из некоторого функционального класса по ее значениям в конечном числе точек). Одним из важнейших результатов в этом направлении является теорема Смоляка [1], утверждающая, что при определенных условиях среди оптимальных способов восстановления есть аффинный.

Проблематика восстановления функционалов по неточно заданной информации естественным образом редуцируется к более общей задаче об аппроксимации многозначных отображений однозначными. Здесь также возникает вопрос об условиях существования оптимальных аффинных методов аппроксимации.

В данной работе получены критерии существования оптимального аффинного и линейного методов аппроксимации для задачи приближения многозначных отображений. В качестве следствия устанавливаются аналогичные критерии для задачи восстановления.

Статья состоит из трех разделов. В первом из них содержатся постановки задач и необходимые для дальнейшего определения. Во втором разделе приведены формулировки основных результатов. Третий раздел посвящен доказательствам.

1. Постановки задач. Пусть заданы множества W, Y , метрическое пространство (Z, ρ) , отображение $f: W \rightarrow Z$, многозначное отображение (м. о.) $F: W \rightarrow Y$ (т. е. каждому $x \in W$ сопоставляется непустое множество $F(x) \subset Y$) и отображение (метод) $\varphi: Y \rightarrow Z$. Величину

$$e(f, W, F, \varphi) := \sup_{\substack{x \in W \\ y \in F(x)}} \rho(f(x), \varphi(y))$$

назовем погрешностью восстановления отображения f на множестве W по информации F при помощи метода восстановления φ . Величину

$$(1) \quad e(f, W, F) := \inf_{\varphi} e(f, W, F, \varphi),$$

где нижняя грань берется по всевозможным методам $\varphi: Y \rightarrow Z$, будем называть оптимальной погрешностью восстановления, а всякий метод, на котором достигается нижняя грань в (1), назовем оптимальным.

Мнозначность отображения F означает, что информация об элементах W задана, вообще говоря, неточно. Если F — однозначное отображение, то говорят о задаче восстановления по точным данным. Часто в задачах восстановления по неточным данным рассматривают отображения $F(x) = I(x) + U$, где $I: W \rightarrow Y$ — однозначное отображение, а U — некоторое фиксированное множество. Например, если Y — нормированное пространство, то, как правило, $U = \{y \in Y \mid \|y\| \leq \delta\}$.

Задача (1) в различных направлениях исследовалась в работах [1–12]. Вопросам, связанным с нахождением оптимальных методов восстановления и оценкам их погрешностей в конкретных ситуациях, посвящено большое количество работ, ссылки на которые можно найти в обзорных статьях [4, 6, 8], а также в монографии [5]. В алгебраическом случае (а именно такой случай рассматривается в этой работе) существование среди оптимальных методов линейного в выпуклой уравновешенной задаче доказали R. Scharlach [7], Г. Г. Магарил-Ильяев и Чан Тхи Ле [10], а в более общей постановке задачи — для восстановления многозначного отображения однозначным (см. ниже) — В. В. Арестов [11].

Перейдем теперь к постановке задачи об аппроксимации многозначных отображений однозначными. Пусть заданы непустое множество Ω , метрическое пространство (Z, ρ) , м. о. $\Phi: \Omega \rightarrow Z$ и отображение $\varphi: \Omega \rightarrow Z$. Величину

$$E(\Phi, \Omega, \varphi) := \sup_{\substack{y \in \Omega \\ z \in \Phi(y)}} \rho(z, \varphi(y))$$

назовем погрешностью аппроксимации м. о. Φ отображением (методом) φ . Величину

$$(2) \quad E(\Phi, \Omega) := \inf_{\varphi} E(\Phi, \Omega, \varphi),$$

где нижняя грань берется по всевозможным методам $\varphi: \Omega \rightarrow Z$, будем называть оптимальной погрешностью аппроксимации, а всякий метод, на котором достигается нижняя грань в (2), — оптимальным.

Легко видеть, что задача (1) является частным случаем задачи (2). Действительно, для любого отображения $\varphi: \Omega \rightarrow Z$

$$(3) \quad e(f, W, F, \varphi) = E(f \circ F^{-1}, F(W), \varphi),$$

где $F(W)$ — образ W при отображении F и м. о. $f \circ F^{-1}: F(W) \rightarrow Z$ определено естественным образом: $f \circ F^{-1} := f(F^{-1}(y))$. Следовательно,

$$(4) \quad e(f, W, F) = E(f \circ F^{-1}, F(W)).$$

Связь между задачами восстановления и аппроксимации многозначных отображений ранее была отмечена также в работе [11].

С задачей об аппроксимации м. о. $\Phi: \Omega \rightarrow Z$ свяжем следующую величину

$$R(\Phi, \Omega) := \sup_{y \in \Omega} \inf_{a \in Z} \sup_{z \in \Phi(y)} \rho(z, a),$$

которую назовем радиусом многозначности м. о. Φ . Соответствующую величину для задачи восстановления (ее обычно называют радиусом информации) обозначим через $r(f, W, F)$, т. е.

$$(5) \quad r(f, W, F) := R(f \circ F^{-1}, F(W)).$$

Лемма. Пусть Ω — непустое множество, (Z, ρ) — метрическое пространство и $\Phi: \Omega \rightarrow Z$ — м. о. Тогда

$$E(\Phi, \Omega) = R(\Phi, \Omega).$$

Частные случаи этого легко проверяемого утверждения имеются во многих работах. В данной формулировке оно содержится в работе [11].

Приведем еще некоторые определения, которые понадобятся ниже. Пусть $K = \mathbb{R}$ или \mathbb{C} , X — линейное пространство над K и X' — пространство, алгебраически сопряженное с X . Значение линейного функционала $x' \in X'$ на элементе $x \in X$ обозначаем $\langle x', x \rangle$. Функция $f: X \rightarrow K$ называется аффинной, если $f(x) = \langle x', x \rangle + a$ для некоторых $x' \in X'$ и $a \in K$. Совокупность всех таких функций будем обозначать через $\text{Aff}(X)$.

Если $\Omega \subset X$ — непустое множество, то $\text{co } \Omega$ и $\text{bco } \Omega$ обозначают, соответственно, выпуклую и выпуклую уравновешенную оболочку Ω . Пусть $\Omega \subset X$ — выпуклое (выпуклое уравновешенное) подмножество и Y — линейное пространство над K . Многозначное отображение $\Phi: \Omega \rightarrow Y$ называется выпуклым (выпуклым уравновешенным), если его график $\text{gr}(\Phi) := \{(x, y) \in \Omega \times Y \mid y \in \Phi(x)\}$ — выпуклое (выпуклое уравновешенное) множество в линейном пространстве $X \times Y$.

Каждому непустому подмножеству $\Omega \subset X$ и м. о. $\Phi: \Omega \rightarrow Y$ можно сопоставить выпуклое (выпуклое уравновешенное) м. о. $\text{co } \Phi: \text{co } \Omega \rightarrow Y$ ($\text{bco } \Phi: \text{bco } \Omega \rightarrow Y$) по правилу

$$\begin{aligned} \text{co } \Phi(x) &:= \{y \in Y \mid (x, y) \in \text{co } \text{gr}(\Phi)\} \\ (\text{bco } \Phi(x) &:= \{y \in Y \mid (x, y) \in \text{bco } \text{gr}(\Phi)\}). \end{aligned}$$

2. Формулировка результатов.

Теорема. а) Пусть Y — вещественное линейное пространство, $\Omega \subset Y$ — непустое множество и $\Phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ — многозначное отображение. Тогда для существования $\varphi \in \text{Aff}(Y)$ такого, что

$$(6) \quad E(\Phi, \Omega, \varphi) = E(\Phi, \Omega),$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$(7) \quad R(\Phi, \Omega) = R(\text{co } \Phi, \text{co } \Omega).$$

б) Пусть Y — линейное пространство над K ($K = \mathbb{R}$ или \mathbb{C}), $\Omega \subset Y$ — непустое множество и $\Phi: \Omega \rightarrow K$ — многозначное отображение. Тогда для существования $y' \in Y'$ такого, что

$$(8) \quad E(\Phi, \Omega, y') = E(\Phi, \Omega),$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$R(\Phi, \Omega) = R(\text{bco } \Phi, \text{bco } \Omega).$$

При этом

$$(9) \quad E(\Phi, \Omega) = \sup_{\alpha \in \text{bco } \Phi(0)} |\alpha|.$$

Следствие. а) Пусть X, Y — вещественные линейные пространства, $W \subset X$ — непустое множество, $f \in \text{Aff}(X)$ и $F: W \rightarrow Y$ — многозначное отображение. Тогда для существования $\varphi \in \text{Aff}(Y)$ такого, что

$$e(f, W, F, \varphi) = e(f, W, F),$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$r(f, W, F) = r(f, \text{co } W, \text{co } F).$$

б) Пусть X, Y — линейные пространства над K ($K = \mathbb{R}$ или \mathbb{C}), $W \subset X$ — непустое множество, $x' \in X'$ и $F: W \rightarrow Y$ — многозначное отображение. Тогда для существования $y' \in Y'$ такого, что

$$e(x', W, F, y') = e(x', W, F),$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$r(x', W, F) = r(x', \text{bco } W, \text{bco } F).$$

При этом

$$e(x', W, F) = \sup_{x \in (\text{bco } F)^{-1}(0)} |\langle x', x \rangle|.$$

З а м е ч а н и е. Для комплексного линейного пространства утверждения п.п. а) теоремы и следствия не имеют места. Соответствующий пример приведен в конце раздела 3.

3. Доказательство теоремы. а) Разобьем доказательство этого пункта на несколько этапов.

1) Покажем, что если $\Omega \subset Y$ — выпуклое множество и $\Phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ — выпуклое м. о., то существует $\varphi \in \text{Aff}(Y)$, для которого выполнено равенство (6). Если $R := R(\Phi, \Omega) = \infty$, то по лемме $E(\Phi, \Omega) = \infty$

и, следовательно, любой метод оптимален. Если $R = 0$, то Φ — однозначное отображение. Пусть $\tilde{\Omega} := \Omega - y_0$, где $y_0 \in \Omega$ и $\tilde{\Phi}(z) := \Phi(z + y_0) - \Phi(y_0)$, $z \in \tilde{\Omega}$. Ясно, что $0 \in \tilde{\Omega}$, $\tilde{\Phi}(0) = 0$ и, так как $\text{gr}(\Phi)$ — выпуклое множество, то для любых $z_j \in \tilde{\Omega}$, $\lambda_j \geq 0$ ($j = 1, \dots, n$), $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$, имеем

$$\tilde{\Phi}\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j z_j\right) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \tilde{\Phi}(z_j).$$

Отсюда следует, что $\tilde{\Phi}$ по линейности единственным образом продолжается на $\text{sran } \tilde{\Omega}$ — линейную оболочку $\tilde{\Omega}$. Обозначим это продолжение через Φ' . Если теперь $y' \in Y'$ — любое продолжение Φ' на все Y (как известно, такое y' всегда существует), то Φ есть сужение на Ω аффинной функции $\varphi(y) = \langle y', y \rangle + \Phi(y_0) - \langle y', y_0 \rangle$ и тем самым $E(\Phi, \Omega, \varphi) = 0$. Таким образом, (6) доказано.

Пусть $0 < R < \infty$. Рассмотрим выпуклое и уравновешенное множество $W := \text{gr}(\Phi) - \text{gr}(\Phi)$. Обозначим через $p(u) := \inf\{t > 0 \mid u \in tW\}$ его функционал Минковского и покажем, что если $u = (0, \alpha) \in Y \times \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, то $p(u) = \alpha(2R)^{-1}$. Легко видеть, что R можно записать в виде

$$(10) \quad R = \sup_{y \in \Omega} \frac{1}{2} \left(\sup_{\beta \in \Phi(y)} \beta - \inf_{\beta \in \Phi(y)} \beta \right).$$

Тем самым для любого $0 < \varepsilon < 2R$ найдутся $y_\varepsilon \in \Omega$ и $\beta_1, \beta_2 \in \Phi(y_\varepsilon)$ такие, что $\beta_1 - \beta_2 \geq 2R - \varepsilon$. Положим $t_0 := \alpha(\beta_1 - \beta_2)^{-1}$. Тогда $u := t_0(0, \beta_1 - \beta_2) = t_0((y_\varepsilon, \beta_1) - (y_\varepsilon, \beta_2)) \in t_0W$, т. е. $p(u) \leq t_0 \leq \alpha(2R - \varepsilon)^{-1}$. Таким образом, $p(u) \leq \alpha(2R)^{-1}$ в силу произвольности ε . Если $p(u) < \alpha(2R)^{-1}$, то найдется такое $0 < t_1 < \alpha(2R)^{-1}$, что $(0, \alpha) \in t_1W$. Это означает существование таких $y \in \Omega$ и $\gamma_1, \gamma_2 \in \Phi(y)$, для которых $\gamma_1 - \gamma_2 = t_1^{-1}\alpha > 2R$, что противоречит (10).

Рассмотрим подпространство $L := \{u \in Y \times \mathbb{R} \mid u = (0, \alpha)\}$ и линейный функционал u' на L , определенный равенством $\langle u', u \rangle := \alpha(2R)^{-1}$. По доказанному $\langle u', u \rangle \leq p(u)$ для всех $u \in L$. Из теоремы Хана–Банаха следует существование такого функционала $u'_1 \in (Y \times \mathbb{R})'$ что $\langle u'_1, u \rangle \leq p(u)$, $u \in Y \times \mathbb{R}$, и сужение u'_1 на L совпадает с u' . Поскольку $u'_1 = (y'_1, \gamma)$, где $y'_1 \in Y'$, $\gamma \in \mathbb{R}$, и $p(u) \leq 1$ для $u \in W$, то при всех $y_1, y_2 \in \Omega$ и $\beta_1 \in \Phi(y_1)$, $\beta_2 \in \Phi(y_2)$ имеем

$$(11) \quad \langle u'_1, (y_1 - y_2, \beta_1 - \beta_2) \rangle = \langle y'_1, y_1 - y_2 \rangle + \gamma(\beta_1 - \beta_2) \leq 1.$$

Так как $\langle u', u \rangle = \alpha(2R)^{-1}$, если $u = (0, \alpha)$, то $\gamma = (2R)^{-1}$. Тогда, полагая $y' := -2Ry'_1$, получаем из (11)

$$\beta_1 - \langle y', y_1 \rangle - R \leq \beta_2 - \langle y', y_2 \rangle + R.$$

Следовательно, существует такое $a \in \mathbb{R}$, что при всех $y_1, y_2 \in \Omega$ и $\beta_1 \in \Phi(y_1), \beta_2 \in \Phi(y_2)$

$$\beta_1 - \langle y', y_1 \rangle - R \leq a \leq \beta_2 - \langle y', y_2 \rangle + R.$$

Таким образом,

$$\sup_{(y, \beta) \in \text{gr}(\Phi)} |\beta - \langle y', y \rangle - a| \leq R,$$

т. е. $E(\Phi, \Omega, \varphi) \leq R(\Phi, \Omega)$, где $\varphi(y) := \langle y', y \rangle + a$. Это вместе с леммой доказывает 1).

2) Докажем, что в условиях теоремы из (6) следует (7). Проверим сначала, что если $\varphi \in \text{Aff}(Y)$, то

$$(12) \quad E(\Phi, \Omega, \varphi) = E(\text{co } \Phi, \text{co } \Omega, \varphi).$$

Действительно, левая часть в (12), очевидно, не больше правой. Обратно, пусть $(y, \beta) \in \text{gr}(\text{co } \Phi) = \text{co } \text{gr}(\Phi)$. Тогда $(y, \beta) = \sum_{j=1}^n \lambda_j (y_j, \beta_j)$, где $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$, $\lambda_j \geq 0$ и $(y_j, \beta_j) \in \text{gr}(\Phi)$, $j = 1, \dots, n$. Имеем

$$\begin{aligned} |\beta - \varphi(y)| &= \left| \sum_{j=1}^n \lambda_j \beta_j - \varphi\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j y_j\right) \right| = \left| \sum_{j=1}^n \lambda_j (\beta_j - \varphi(y_j)) \right| \\ &\leq \max_{1 \leq j \leq n} |\beta_j - \varphi(y_j)| \leq E(\Phi, \Omega, \varphi). \end{aligned}$$

Следовательно, $E(\text{co } \Phi, \text{co } \Omega, \varphi) \leq E(\Phi, \Omega, \varphi)$ и равенство (12) доказано.

Пусть справедливо (6). Тогда, применяя лемму и (12), получаем

$$\begin{aligned} R(\text{co } \Phi, \text{co } \Omega) &= E(\text{co } \Phi, \text{co } \Omega) \leq E(\text{co } \Phi, \text{co } \Omega, \varphi) = E(\Phi, \Omega, \varphi) \\ &= E(\Phi, \Omega) = R(\Phi, \Omega). \end{aligned}$$

Поскольку обратное неравенство $R(\Phi, \Omega) \leq R(\text{co } \Phi, \text{co } \Omega)$ очевидно, то (7) доказано.

3) Покажем теперь, что из (7) следует (6). Действительно, по доказанному в 1) существует $\varphi \in \text{Aff}(Y)$, что

$$E(\text{co } \Phi, \text{co } \Omega, \varphi) = E(\text{co } \Phi, \text{co } \Omega).$$

Учитывая это равенство, лемму и равенство (12), будем иметь

$$\begin{aligned} E(\Phi, \Omega, \varphi) &= E(\text{co } \Phi, \text{co } \Omega, \varphi) = E(\text{co } \Phi, \text{co } \Omega) = R(\text{co } \Phi, \text{co } \Omega) \\ &= R(\Phi, \Omega) = E(\Phi, \Omega). \end{aligned}$$

Тем самым часть а) теоремы доказана.

б) Докажем сначала, что если Ω — выпуклое уравновешенное множество и $\Phi: \Omega \rightarrow K$ — выпуклое уравновешенное м. о., то существует $y' \in Y'$, для которого справедливо равенство (8). Ясно,

что $0 \in \Omega$ и $\Phi(0)$ — выпуклое уравновешенное множество. Следовательно,

$$(13) \quad R(\Phi, \Omega) \geq \inf_{a \in K} \sup_{\beta \in \Phi(0)} |\beta - a| = \sup_{\beta \in \Phi(0)} |\beta| =: R_0.$$

Если $R_0 = \infty$, то из (13) и леммы вытекает, что $E(\Phi, \Omega) = \infty$, и, стало быть, любой метод оптимален. Если же $R_0 = 0$, то нетрудно убедиться, что Φ — однозначное отображение, и аналогично тому, как это было сделано в части а), проверяется, что Φ есть сужение на Ω некоторого линейного функционала $y' \in Y'$. Таким образом, $E(\Phi, \Omega, y') = 0$, а следовательно, имеет место (8).

Пусть $0 < R_0 < \infty$. Рассмотрим выпуклое уравновешенное множество $W := \text{gr}(\Phi)$. Если $p(u)$ — функционал Минковского этого множества и $u = (0, \alpha) \in Y \times K$, то

$$\begin{aligned} p(u) &= \inf\{t > 0 \mid (0, \alpha) \in tW\} = \inf\{t > 0 \mid \alpha t^{-1} \in \Phi(0)\} \\ &= |\alpha| \left(\sup_{\beta \in \Phi(0)} |\beta| \right)^{-1} = |\alpha| R_0^{-1}. \end{aligned}$$

Определим на подпространстве $L := \{u \in Y \times K \mid u = (0, \alpha)\}$ линейный функционал u' равенством $\langle u', u \rangle := \alpha R_0^{-1}$. Тогда $|\langle u', u \rangle| = p(u)$, $u \in L$, и по теореме Хана–Банаха существует такое его продолжение u'_1 на $Y \times K$, что $|\langle u'_1, u \rangle| \leq p(u)$ при $u \in Y \times K$. Аналогично доказательству части а) теоремы для любых $y \in \Omega$ и $\beta \in \Phi(y)$ имеем

$$|\langle u'_1, (y, \beta) \rangle| = |\beta R_0^{-1} + \langle y'_1, y \rangle| \leq 1,$$

где $y'_1 \in Y'$. Полагая $y' := -R_0 y'_1$, получаем

$$|\beta - \langle y', y \rangle| \leq R_0,$$

т. е. $E(\Phi, \Omega, y') \leq R_0$. Вместе с (13) и леммой это доказывает справедливость равенств (8) и (9) для данного случая. Дальнейший ход доказательства части б) совершенно аналогичен доказательству части а). Теорема доказана.

Для доказательства следствия, учитывая равенства (3)–(5), достаточно доказать, что

$$\begin{aligned} \text{co}(f \circ F^{-1}) &= f \circ (\text{co } F)^{-1}, \quad f \in \text{Aff}(X), \\ \text{bco}(x' \circ F^{-1}) &= x' \circ (\text{bco } F)^{-1}, \quad x' \in X', \end{aligned}$$

и

$$\text{co}(F(W)) = \text{co } F(\text{co } W), \quad \text{bco}(F(W)) = \text{bco } F(\text{bco } W).$$

Справедливость этих равенств легко следует непосредственно из определений.

Приведем теперь пример, показывающий, что утверждения пп. а) теоремы и следствия в общем случае не имеют места. Рассмотрим следующую задачу восстановления (которую можно сформулировать и как задачу аппроксимации соответствующего многозначного отображения). Пусть $X = Y = \mathbb{C}$, $W := \{z \in \mathbb{C} \mid \lambda_1 |\operatorname{Re} z| + \lambda_2 |\operatorname{Im} z| \leq 1\}$, $0 < \lambda_1 < \lambda_2$, $f(z) := z$, $F(z) := \operatorname{Re} z + \delta U$, $U := [-1, 1]$, $0 < \delta < \mu/3$, где $\mu := 2\lambda_1/(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)$. Из леммы и равенств (4), (5) имеем

$$(14) \quad e(f, W, F) = r(f, W, F) \geq \inf_{\alpha \in \mathbb{C}} \sup_{z \in F^{-1}(0)} |z - \alpha| \\ = \inf_{\alpha \in \mathbb{C}} \sup_{\substack{z \in W \\ |\operatorname{Re} z| \leq \delta}} |z - \alpha| = \sup_{\substack{z \in W \\ |\operatorname{Re} z| \leq \delta}} |z| = \lambda_2^{-1}.$$

Положим

$$\varphi_0(y) := \begin{cases} 0, & |y| \leq 2\delta, \\ y, & |y| > 2\delta. \end{cases}$$

Тогда, если $|y| \leq 2\delta$, то

$$\sup_{\substack{z \in W \\ |\operatorname{Re} z - y| \leq \delta}} |z| = \lambda_2^{-1},$$

так как $|\operatorname{Re} z| \leq 3\delta < \mu$. При $|y| > 2\delta$ $|\operatorname{Re} z| > \delta$ и, следовательно, $|\operatorname{Im} z| < (1 - \lambda_1\delta)\lambda_2^{-1}$, поэтому

$$\sup_{\substack{z \in W \\ |\operatorname{Re} z - y| \leq \delta}} |z - y| < \sqrt{\delta^2 + (1 - \lambda_1\delta)^2 \lambda_2^{-2}} < \lambda_2^{-1}.$$

Отсюда следует, что $e(f, W, F, \varphi_0) = \lambda_2^{-1}$. Это вместе с соотношениями (14) дает

$$e(f, W, F) = \lambda_2^{-1}.$$

С другой стороны, для любого аффинного метода $\varphi(y) = c_1 y + ic_2 y + \alpha$, где $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{C}$, имеем

$$(15) \quad e(f, W, F, \varphi) = \sup_{\substack{z \in W \\ |\operatorname{Re} z - y| \leq \delta}} |z - \varphi(y)| \\ \geq \sup_{\substack{z \in W \\ |\operatorname{Re} z| \leq \delta}} |z - \varphi(0)| = \sup_{\substack{z \in W \\ |\operatorname{Re} z| \leq \delta}} |z - \alpha| \geq \lambda_2^{-1}.$$

Если $\alpha \neq 0$, то последнее неравенство в (15) строгое и тем самым $e(f, W, F, \varphi) > \lambda_2^{-1}$. Пусть $\alpha = 0$. Поскольку

$$e(f, W, F, \varphi) = \sup_{\substack{z \in W \\ |\operatorname{Re} z - y| \leq \delta}} \sqrt{(\operatorname{Re} z - c_1 y)^2 + (\operatorname{Im} z - c_2 y)^2},$$

то, полагая $z = y = \lambda_1^{-1}$, а затем $z = i\lambda_2^{-1}$, $y = \pm\delta$, получаем

$$e(f, W, F, \varphi) \geq \max \left\{ \sqrt{\lambda_1^{-2}(1 - c_1)^2 + \lambda_1^{-2}c_2^2}, \right. \\ \left. \sqrt{\delta^2 c_1^2 + (\lambda_2^{-1} \pm \delta c_2)^2} \right\} > \lambda_2^{-1}.$$

Таким образом, доказано, что среди оптимальных методов восстановления не существует аффинного.

Отметим, что данная конструкция является модификацией одного примера из [12].

Центральный научно-исследовательский
институт комплексной автоматизации

Поступило
12.04.90

Московский авиационный технологический
институт им. К. Э. Циолковского

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С м о л я к С. А. Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 1965.
- [2] О с и п е н к о К. Ю. Наилучшее приближение аналитических функций по информации об их значениях в конечном числе точек // Математические заметки. 1976. Т. 19, вып. 1. С. 29–40.
- [3] М а р ч у к А. Г., О с и п е н к о К. Ю. Наилучшее приближение функций, заданных с погрешностью в конечном числе точек // Математические заметки. 1975. Т. 17, вып. 3. С. 359–368.
- [4] M i s c h e l l i C. A., R i v l i n T. J. A survey of optimal recovery, Optimal estimation in approximation theory. N. Y.: Plenum Press, 1977. P. 1–54.
- [5] Т р а у б Дж., В о ж њ н я к о в с к и й Х. Общая теория оптимальных алгоритмов. М.: Мир, 1983.
- [6] M i s c h e l l i C. A., R i v l i n T. J. Lectures on optimal recovery // Lect. Notes Math. 1985. V. 1129. P. 21–93.
- [7] S c h a r l a s h R. Optimal recovery by linear functionals // J. Approxim. Theory. 1985. V. 44, N 2. P. 167–172.
- [8] W o z n i a k o w s k i H. A survey of information-based complexity // J. Complexity. 1985. V. 1. P. 11–44.
- [9] S u k h a r e v A. G. On the existence of optimal affine methods for approximating linear functionals // J. Complexity. 1986. V. 2. P. 317–322.
- [10] М а г а р и л - И л ь я е в Г. Г., Ч а н Т х и Л е. К задаче оптимального восстановления функционалов // УМН. 1987. Т. 42, № 2. С. 237–238.
- [11] А р е с т о в В. В. Наилучшее восстановление операторов и родственные задачи // Тр. МИАН СССР. Т. 189. М.: Наука, 1989. С. 3–20.
- [12] M e l k m a n A. A., M i s c h e l l i C. A. Optimal estimation of linear operators in Hilbert spaces from inaccurate data // SIAM J. Numer. Anal. 1979. V. 16, N 1. P. 87–105.