# О ЗАДАЧАХ ВОССТАНОВЛЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВАХ ХАРДИ И БЕРГМАНА

К. Ю. ОСИПЕНКО, М. И. СТЕСИН

**1.** Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ — некоторое множество и $\mu$ — положительная мера на нем. Через $L_p(\Omega, \mu)$ обозначим пространство комплекснозначных функций, для которых

$$\|f\|_p = \left( \int_\Omega |f(z)|^p \, d\mu(z) \right)^{1/p} < \infty, \quad 1 \le p < \infty,$$
$$\|f\|_\infty = \operatorname*{vraisup}_{z \in \Omega} |f(z)| < \infty, \quad p = \infty.$$

Пусть $X_p$ — линейное подпространство $L_p(\Omega, \mu)$ и $L, l_1, \ldots, l_n$ — линейные функционалы, заданные на $X_p$.

Рассмотрим задачу восстановления функционала $L$ на единичном шаре $BX_p = \{f \in X_p : \|f\|_p \le 1\}$ по значениям $l = (l_1, \ldots, l_n)$. Положим

$$E(L, l, X_p) = \inf_S \sup_{f \in BX_p} |L(f) - S(l(f))|, \tag{1}$$

где нижняя грань берется по всевозможным функциям (методам) $S \colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$. Наилучшим методом восстановления назовем метод, на котором достигается нижняя грань в равенстве (1), а функцию, на которой достигается верхняя грань для наилучшего метода, будем называть экстремальной.

Из работы [1] следует, что в рассматриваемой задаче всегда существует линейный наилучший метод и справедливо равенство

$$E(L, l, X_p) = \sup_{\substack{f \in BX_p \\ l(f) = 0}} |L(f)|. \tag{2}$$

Следующая теорема дает возможность в некоторых случаях довольно просто строить линейный наилучший метод и находить его погрешность.

**Теорема 1.** *Пусть $g \in X_p$, $\|g\|_p \ne 0$, $l(g) = 0$ и существуют такие $\alpha, c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$, что при всех $f \in X_p$*

$$L(f) - \sum_{j=1}^n c_j l_j(f) = \begin{cases} \alpha \int\limits_\Omega \overline{g(z)} |g(z)|^{p-2} f(z) \, d\mu(z), & 1 \le p < \infty, \\ \alpha \int\limits_\Omega \overline{g(z)} \varphi(z) f(z) \, d\mu(z), & p = \infty, \end{cases} \tag{3}$$

*где $\varphi \in L_1(\Omega, \mu)$. Пусть, кроме того, при $p = \infty$ $|g(z)| = 1$ почти всюду. Тогда метод восстановления*

$$L(f) \approx \sum_{j=1}^{n} c_j l_j(f)$$

*является наилучшим, функция $f^* = e^{i\theta} g/\|g\|_p$ — экстремальная и*

$$E(L, l, X_p) = \begin{cases} |\alpha| \|g\|_p^{p-1}, & 1 \le p < \infty, \\ |\alpha| \|\varphi\|_1, & p = \infty. \end{cases}$$

*Доказательство.* При $1 \le p < \infty$ из (1), (3) и неравенства Гёльдера имеем

$$E(L, l, X_p) \le \sup_{f \in BX_p} \left| L(f) - \sum_{j=1}^{n} c_j l_j(f) \right|$$
$$= \sup_{f \in BX_p} \left| \alpha \int_\Omega \overline{g(z)} |g(z)|^{p-2} f(z)\, d\mu(z) \right| \le |\alpha| \|g\|_p^{p-1}.$$

При $p = \infty$ аналогичная оценка дает $E(L, l, X_\infty) \le |\alpha| \|\varphi\|_1$. Для любого метода $S$ справедливо неравенство

$$|L(f^*) - S(0)| + |L(-f^*) - S(0)| \ge 2|L(f^*)|.$$

Отсюда, учитывая (2), получаем

$$E(L, l, X_p) \ge |L(f^*)| = \begin{cases} |\alpha| \|g\|_p^{p-1}, & 1 \le p < \infty, \\ |\alpha| \|\varphi\|_1, & p = \infty. \end{cases}$$

Теорема доказана. □

Заметим, что в случае $n = 0$ (т. е. отсутствия функционалов, задающих информацию) теорема 1 остается в силе (здесь и далее считается, что в случае, когда верхний предел суммирования меньше нижнего, сумма равна нулю).

**2.** Пусть $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ и $H_p$ — пространство Харди, т. е. аналитические в $D$ функции, удовлетворяющие условию

$$\|f\|_{H_p} = \sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi} \left( \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta}|^p\, d\theta \right)^{1/p} < \infty, \quad 1 \le p < \infty,$$

или

$$\|f\|_{H_\infty} = \sup_{z \in D} |f(z)| < \infty.$$

Обозначим через $Z_\nu = \begin{pmatrix} z_1, \dots, z_n \\ \nu_1, \dots, \nu_n \end{pmatrix}$ систему различных точек $z_j \in D$ с кратностями $\nu_j$. Рассмотрим задачу восстановления функционала

$$L_\xi^\lambda(f) = \lambda_0 f(\xi) + \ldots + \lambda_k f^{(k)}(\xi),$$

где $\xi \in D$, $\lambda = (\lambda_0, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{C}^{k+1}$, $\lambda \neq 0$, на классе $BH_p$ по информации $l(f) = \{f(z_1), \dots, f^{(\nu_1-1)}(z_1), \dots, f(z_n), \dots, f^{(\nu_n-1)}(z_n)\}$. Положим $Z_n^z = \begin{pmatrix} z \\ n \end{pmatrix}$, $e_k = (0, \dots, 1) \in \mathbb{C}^{k+1}$.

Таким образом, рассматривается случай, когда $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, $d\mu = \dfrac{d\theta}{2\pi}$, $X_p = H_p$, а $L(f) = L_\xi^\lambda(f)$. Величину (1) обозначим в этом случае через $E(\xi, \lambda, Z_\nu, H_p)$. Отметим, что при $Z_\nu = \emptyset$ из (2) имеем $E(\xi, \lambda, \emptyset, H_p) = \sup\limits_{f \in BH_p} |L_\xi^\lambda(f)|$.

Некоторые случаи рассматриваемой задачи изучались в работах [1] ($p = \infty$, $\lambda = e_0$), [2] ($p = \infty$, $\lambda = e_1$), [3,4] ($1 \leq p < \infty$, $\lambda = e_0$), [5, с. 486, 491], [6, с. 176] ($p = 1, \infty$, $\xi = 0$, $Z_\nu = \emptyset$), [7] ($p = 2$, $\lambda = e_k$, $Z_\nu = Z_n^0$).

Введем следующие обозначения

$$W(z) = \prod_{j=1}^{n} \left( \frac{z - z_j}{1 - \overline{z}_j z} \right)^{\nu_j}, \quad \text{при } n = 0 \ \ W(z) \equiv 1,$$

$$\omega_j(z) = W(z) \left( \frac{1 - \overline{z}_j z}{z - z_j} \right)^{\nu_j}, \quad \varepsilon_p = \begin{cases} 1/p, & 1 \leq p < \infty, \\ 0, & p = \infty, \end{cases}$$

$$\beta(\xi) = \lambda_{k-1} \frac{1 - |\xi|^2}{2} W(\xi) + k\lambda_k \left[ \frac{1 - |\xi|^2}{2} W'(\xi) + \left( \varepsilon_p + \frac{k-1}{2} \right) \overline{\xi} W(\xi) \right],$$

$$D_1 = \{\, \xi \in D : |\beta(\xi)| < (1 - \varepsilon_p) k |\lambda_k W(\xi)| \,\}, \quad D_0 = D \setminus D_1,$$

$$b = \begin{cases} \dfrac{\beta(\xi)}{(1 - \varepsilon_p) k \lambda_k W(\xi)}, & \xi \in D_1, \\ \dfrac{k \overline{\lambda_k} \overline{W(\xi)} e^{i \arg \beta(\xi)}}{|\beta(\xi)| + \sqrt{|\beta(\xi)|^2 - (1 - 2\varepsilon_p) k^2 |\lambda_k W(\xi)|^2}}, & \xi \in D_0 \setminus \{z_1, \dots, z_n\}, \end{cases}$$

$$a = \frac{\xi - \overline{b}}{1 - \overline{\xi} \overline{b}}, \quad u_\xi(z) = \begin{cases} 1, & \xi \in D_1, \\ \dfrac{z - a}{1 - \overline{a} z}, & \xi \in D_0 \setminus \{z_1, \dots, z_n\}, \end{cases}$$

$$c(\xi) = \begin{cases} \dfrac{k! \lambda_k W(\xi)}{u_\xi(\xi)}, & \lambda_k \neq 0, \\ (k-1)! \lambda_{k-1} (1 - |\xi|^2) W(\xi), & \lambda_k = 0. \end{cases}$$

**Теорема 2.** *Пусть*

$$Z_\nu = \begin{pmatrix} z_1, & \dots, & z_n, & \xi \\ \nu_1, & \dots, & \nu_n, & k - 1 \end{pmatrix}, \quad k \geq 1.$$

*Тогда метод*

$$\lambda_{k-1}f^{(k-1)}(\xi)+\lambda_k f^{(k)}(\xi)$$
$$\approx \sum_{j=1}^{n}\sum_{m=0}^{\nu_j-1} c_{jm}(\xi)f^{(m)}(z_j)+\sum_{m=0}^{k-2}c_{n+1,m}(\xi)f^{(m)}(\xi),$$

*где*

$$c_{jm}(\xi)=-\frac{c(\xi)(1-|\xi|^2)^{3-k-4\varepsilon_p}}{m!(\nu_j-m-1)!(1-\overline{a}\xi)^{2(1-\varepsilon_p)}}$$
$$\times\frac{\partial^{\nu_j-m-1}}{\partial z^{\nu_j-m-1}}\left[\frac{(1-\overline{z}_j z)^{\nu_j}(1-\overline{a}z)^{2(1-\varepsilon_p)}u_\xi(z)}{\omega_j(z)(1-\overline{\xi}z)^{3-k-4\varepsilon_p}(z-\xi)^{k+1}}\right]\Bigg|_{z=z_j},$$

$$c_{n+1,m}(\xi)=-\frac{c(\overline{\xi})(1-|\xi|^2)^{3-k-4\varepsilon_p}}{m!(k-m)!(1-\overline{a}\xi)^{2(1-\varepsilon_p)}}$$
$$\times\frac{\partial^{k-m}}{\partial z^{k-m}}\left[\frac{(1-\overline{a}z)^{2(1-\varepsilon_p)}u_\xi(z)}{W(z)(1-\overline{\xi}z)^{3-k-4\varepsilon_p}}\right]\Bigg|_{z=\xi},$$

*является наилучшим методом восстановления на классе $BH_p$ при всех $1\le p\le\infty$. При этом функция*

$$f^*(z)=e^{i\theta}\frac{(1-|\xi|^2)^{\varepsilon_p}|1-\xi b|^{2\varepsilon_p}}{(1+|b|^2)^{\varepsilon_p}}\left(\frac{z-\xi}{1-\overline{\xi}z}\right)^{k-1}$$
$$\times\frac{(z-a)W(z)(1-\overline{a}z)^{2\varepsilon_p}}{(1-\overline{a}z)u_\xi(z)(1-\overline{\xi}z)^{4\varepsilon_p}}$$

*является экстремальной, а*

$$E(\xi,\lambda,Z_\nu,H_p)=|c(\xi)|\frac{(1+|b|^2)^{1-\varepsilon_p}}{(1-|\xi|^2)^{k+\varepsilon_p}}.$$

*Доказательство.* Положим

$$g(z)=\left(\frac{z-\xi}{1-\overline{\xi}z}\right)^{k-1}\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\,\frac{W(z)(1-\overline{a}z)^{2\varepsilon_p}}{u_\xi(z)(1-\overline{\xi}z)^{4\varepsilon_p}},$$
$$\varphi(z)=\frac{(1-\overline{a}z)^2}{(1-\overline{\xi}z)^4},\quad \alpha=c(\xi)\frac{(1-|\xi|^2)^{3-k-4\varepsilon_p}}{(1-\overline{a}\xi)^{2(1-\varepsilon_p)}}.$$

Имеем

$$
\begin{aligned}
&\lambda_{k-1} f^{(k-1)}(\xi) + \lambda_k f^{(k)}(\xi) \\
&\qquad - \sum_{j=1}^{n} \sum_{m=0}^{\nu_j - 1} c_{jm}(\xi) f^{(m)}(z_j) + \sum_{m=0}^{k-2} c_{n+1,m}(\xi) f^{(m)}(\xi) \\
&\qquad = \frac{\alpha}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{u_\xi(z)(1-\overline{a}z)^{2(1-\varepsilon_p)} f(z)}{W(z)(1-\overline{\xi}z)^{3-k-4\varepsilon_p}(z-\xi)^{k+1}}\, dz \\
&\qquad\qquad = \begin{cases} \alpha \int\limits_0^{2\pi} \overline{g(z)} |g(z)|^{p-2} f(z)\, d\mu(z), & 1 \le p < \infty, \\ \alpha \int\limits_0^{2\pi} \overline{g(z)} \varphi(z) f(z)\, d\mu(z), & p = \infty. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Из этих же равенств при $f = g$ получаем

$$
\|g\|_{H_p}^p = \|\varphi\|_{H_1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{(1-\overline{a}z)(z-a)}{(1-\overline{\xi}z)^2(z-\xi)^2}\, dz = \frac{1+|b|^2}{(1-|\xi|^2)|1-\xi b|^2}.
$$

Записав выражение для $|\alpha|$ в виде

$$
|\alpha| = |c(\xi)| \frac{|1-\xi b|^{2(1-\varepsilon_p)}}{(1-|\xi|^2)^{k-1+2\varepsilon_p}},
$$

получаем доказываемое утверждение из теоремы 1. $\square$

Отметим, что доказанная теорема дает возможность восстанавливать на классе $BH_p$ линейный функционал $\lambda_0 f(\xi) + \lambda_1 f'(\xi)$ по информации в произвольной системе точек.

Из теоремы 2 следует, что при $|\beta(\xi)| < (1-\varepsilon_p)k|\lambda_k W(\xi)|$ у экстремальной функции кроме нулей в точках заданной системы появляется дополнительный нуль в точке $a$. Назовем кривую

$$
\Gamma = \{\, \xi \in D : |\beta(\xi)| = (1-\varepsilon_p))k|\lambda_k W(\xi)| \,\}
$$

кривой переключения. В случае, когда одно из множеств $D_0$ или $D_1$ пусто, будем говорить, что переключения нет. Отметим, что переключение отсутствует при $p = 1$ или $\lambda_k = 0$ (в этих случаях $D_1 = \emptyset$). Обозначим через

$$
Z_{n,k-1}^{0,\xi} = \begin{pmatrix} 0 & \xi \\ n & k-1 \end{pmatrix}, \quad n \ge 0, \quad k \ge 1 \quad (\xi \ne 0 \text{ при } n \ge 1)
$$

и рассмотрим задачу восстановления $k$-й производной ($\lambda = e_k$) по информации $Z_{n,k-1}^{0,\xi}$. Легко показать, что здесь для $n \ge 1$ переключения есть лишь при $k = 1$, $2 < p \le \infty$ и $k = 2$, $4 < p \le \infty$. Для $n = 0$ переключения нет в следующих случаях: $p = 1$ ($D_1 = \emptyset$); $k = 1$, $2 \le p \le \infty$ ($D_0 = \emptyset$); $k = 2$, $4 < p \le \infty$ ($D_0 = \emptyset$), в остальных случаях переключения есть.

Из теоремы 2 непосредственно вытекает

**Следствие 1.** *При всех $n \geq 0$, $k \geq 1$ и $1 \leq p \leq \infty$ имеют место равенства*

$$E(\xi, e_k, Z^{0,\xi}_{n,k-1}, H_p) = \begin{cases} \dfrac{k!|\xi|^n}{(1-|\xi|^2)^{k+\varepsilon_p}} \left(1 + \dfrac{d^2}{|\xi|^2}\right)^{1-\varepsilon_p}, & \xi \in D_1 \setminus \{0\}, \\ \dfrac{k!|\xi|^{n-1}}{(1-|\xi|^2)^{k+\varepsilon_p}} d \left(1 + \dfrac{|\xi|^2}{d^2}\right)^{1-\varepsilon_p}, & \xi \in D_0 \setminus \{0\}, \end{cases}$$

$$E(0, e_k, Z^0_{k-1}, H_p) = k!;$$

*здесь*

$$d = \begin{cases} \dfrac{\gamma}{1-\varepsilon_p}, & \xi \in D_1, \\ \gamma + \sqrt{\gamma^2 - (1-2\varepsilon_p)|\xi|^2} & \xi \in D_0, \end{cases}$$

$$\gamma = n\frac{1-|\xi|^2}{2} + \left(\varepsilon_p + \frac{k-1}{2}\right)|\xi|^2.$$

Отметим, что при $k = 1$ мы получаем восстановление производной по тейлоровской информации $Z^0_n$. Следствие 1 при $k = 1$ обобщает результаты, полученные в работах [8] ($p = \infty$, $n = 1$) и [2, 4] ($p = \infty$, $n \geq 1$). Выражение для величины $E(\xi, e_k, Z^0_n, H_2)$ в виде ряда было получено в работе [7].

**3.** Рассмотрим теперь аналогичные задачи для пространства Бергмана $A_p$, которое определяется как множество аналитических в $D$ функций, удовлетворяющих условию

$$\|f\|_{A_p} = \left(\frac{1}{\pi}\int_D |f(u)|^p \, d\sigma\right)^{1/p} < \infty,$$

где $d\sigma$ — плоская мера Лебега. Тем самым $\Omega = D$, $d\mu = (1/\pi)d\sigma$, а $X_p = A_p$.

**Теорема 3.** *Метод $f^{(n)}(\xi) \approx \sum_{m=0}^{n-1} c_m(\xi) f^{(m)}(\xi)$, где*

$$c_m(\xi) = (-1)^{n-m+1} C^m_n \left(\frac{\bar{\xi}}{1-|\xi|^2}\right)^{n-m} \frac{\Gamma(n+4/p)}{\Gamma(m+4/p)},$$

*является наилучшим методом восстановления на классе $BA_p$ при всех $1 \leq p < \infty$ и $\xi \in D$. Функция*

$$f^*(u) = e^{i\theta}\left(n\frac{p}{2}+1\right)^{1/p} (1-|\xi|^2)^{2/p} \frac{(u-\xi)^n}{(1-\bar{\xi}u)^{n+4/p}}$$

*является экстремальной, а*

$$E(\xi, e_n, Z^\xi_n, A_p) = \frac{n!\left(n\dfrac{p}{2}+1\right)^{1/p}}{(1-|\xi|^2)^{n+2/p}}.$$

*Доказательство.* Положим

$$g(u)=\frac{(u-\xi)^n}{(1-\bar{\xi}u)^{n+4/p}},\qquad \alpha=\frac{n!\left(n\dfrac{p}{2}+1\right)}{(1-|\xi|^2)^{n-2+4/p}},$$

$$I=\frac{n!}{(1-|\xi|^2)^{n-1+4/p}}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{|u|=1}\frac{(1-\bar{\xi}u)^{n-1+4/p}}{(u-\xi)^{n+1}}f(u)\,du.$$

Для любой функции $f\in H_\infty$ имеем

$$I=f^{(n)}(\xi)-\sum_{m=0}^{n-1}c_m(\xi)f^{(m)}(\xi).$$

С другой стороны, по формуле Стокса (см. [9, с. 78])

$$(4)\quad I=\frac{n!}{(1-|\xi|^2)^{n-1+4/p}}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{|u|=1}\left|\frac{u-\xi}{1-\bar{\xi}u}\right|^{n(p-2)}\left(\frac{\overline{u}-\bar{\xi}}{1-\xi\overline{u}}\right)^{n+1}$$
$$\times\frac{f(u)}{(1-\bar{\xi}u)^{2(p-2)/p}}\,du=\frac{n!}{(1-|\xi|^2)^{n-1+4/p}}$$
$$\times\frac{1}{2\pi i}\int_D\frac{\partial}{\partial\overline{u}}\left(\left|\frac{u-\xi}{1-\bar{\xi}u}\right|^{n(p-2)}\left(\frac{\overline{u}-\bar{\xi}}{1-\xi\overline{u}}\right)^{n+1}\frac{f(u)}{(1-\bar{\xi}u)^{2(p-2)/p}}\right)d\overline{u}\wedge du$$
$$=\frac{\alpha}{\pi}\int_D\overline{g(u)}|g(u)|^{p-2}f(u)\,d\sigma.$$

Таким образом, для любой функции $f\in H_\infty$

$$(5)\qquad f^{(n)}(\xi)-\sum_{m=0}^{n-1}c_m(\xi)f^{(m)}(\xi)=\frac{\alpha}{\pi}\int_D\overline{g(u)}|g(u)|^{p-2}f(u)\,d\sigma.$$

Поскольку функции из $H_\infty$ плотны в $A_p$, то равенство (5) имеет место для всех $f\in A_p$. Из равенства (4) при $f=g$ имеем

$$\|g\|_{A_p}^p=\frac{1}{\left(n\dfrac{p}{2}+1\right)(1-|\xi|^2)}\int_{|u|=1}\frac{du}{(u-\xi)(1-\bar{\xi}u)}$$
$$=\frac{1}{\left(n\dfrac{p}{2}+1\right)(1-|\xi|^2)^2}.$$

Теперь доказываемое утверждение следует из теоремы 1. Теорема доказана. $\square$

В силу того, что $c_0(0)=\ldots=c_{n-1}(0)=0$, из теоремы 3 вытекает равенство

$$\sup_{\|f\|_{A_p}\le 1}|f^{(n)}(0)|=n!\left(n\frac{p}{2}+1\right)^{1/p}.$$

**Теорема 4.** *Метод* $f(\xi) \approx \sum_{m=0}^{n-1} c_m(\xi, z) f^{(m)}(z)$, *где*

$$c_m(\xi, z) = \frac{(\xi - z)^n (1 - |\xi|^2)^{2(p-2)/p}}{m!(n-m-1)!(1-\overline{z}\xi)^{n+1}[\varphi(\xi)]^{(p-2)/p}} \times \frac{\partial^{n-m-1}}{\partial u^{n-m-1}} \left[ \frac{(1-\overline{z}u)^{n+1}(\varphi(u))^{(p-2)/p}}{(\xi - u)(1-\overline{\xi}u)^{2(p-2)/p}} \right] \Bigg|_{u=z},$$

$$\varphi(u) = 1 + n\frac{p}{2} - n\frac{p}{2}\frac{u-z}{1-\overline{z}u} \cdot \frac{\overline{\xi} - \overline{z}}{1 - z\overline{\xi}},$$

*является наилучшим методом восстановления на классе* $BA_p$, $1 \le p < \infty$. *При этом функция*

$$f^*(u) = e^{i\theta} \frac{(1-|\xi|^2)^{2/p}}{(\varphi(\xi))^{1/p}} \left( \frac{u-z}{1-\overline{z}u} \right)^n \frac{(\varphi(u))^{2/p}}{(1-\overline{\xi}u)^{4/p}}$$

*является экстремальной, а*

$$E(\xi, e_0, Z_n^z, A_p) = \left| \frac{\xi - z}{1 - \overline{z}\xi} \right|^n \frac{(\varphi(\xi))^{1/p}}{(1-|\xi|^2)^{2/p}}.$$

*Доказательство.* Положим

$$g(u) = \left( \frac{u-z}{1-\overline{z}u} \right)^n \frac{(\varphi(u))^{2/p}}{(1-\overline{\xi}u)^{4/p}}, \quad \alpha = \left( \frac{\xi - z}{1-\overline{z}\xi} \right)^n \frac{(1-|\xi|^2)^{2(p-2)/p}}{(\varphi(\xi))^{(p-2)/p}},$$

$$I = \frac{\alpha}{1-\overline{z}\xi} \frac{1}{2\pi i} \int_{|u|=1} \frac{(1-\overline{z}u)^{n+1}(\varphi(u))^{(p-2)/p}}{(u-\xi)(u-z)^n(1-\overline{\xi}u)^{2(p-2)/p}} f(u)\, du.$$

Для $f \in H_\infty$

$$I = f(\xi) - \sum_{m=0}^{n-1} c_m(\xi, z) f^{(m)}(z).$$

С другой стороны, теорема Стокса дает

$$I = \frac{\alpha}{1-\overline{z}\xi} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{|u|=1} \left| \frac{u-z}{1-\overline{z}u} \right|^{n(p-2)} \times \frac{(\overline{u} - \overline{z})^{n+1}(\varphi(u))^{(p-2)/p}}{(1-\xi\overline{u})(1-z\overline{u})^n(1-\overline{\xi}u)^{2(p-2)/p}} f(u)\, du = \frac{\alpha}{\pi} \int_D \overline{g(u)} |g(u)|^{p-2} f(u)\, d\sigma.$$

Далее повторяются рассуждения, использовавшиеся при доказательстве теоремы 3. Теорема доказана. □

Из теоремы 4, в частности, следует, что

$$E(\xi, e_0, Z_n^0, A_p) = |\xi|^n \frac{\left(1 + n\frac{p}{2}(1-|\xi|^2)\right)^{1/p}}{(1-|\xi|^2)^{2/p}}.$$

Отметим, что при $p = 2$ и $z = 0$ наилучшим методом восстановления является отрезок ряда Тейлора. Этот же факт имеет место в аналогичной задаче на классе $BH_2$, что отмечалось в работе [4].

Положим теперь

$$\beta(\xi) = \lambda_0 \frac{1 - |\xi|^2}{2} + \lambda_1 \frac{2}{p} \overline{\xi},$$
$$D_0 = \left\{ \xi \in D : |\beta(\xi)| \geq \frac{3p - 2}{2p} |\lambda_1| \right\}, \quad D_1 = D \setminus D_0.$$

Пусть

$$\psi(x) = \left(1 - \frac{p}{2}\right) |\lambda_1| x^3 - \left(1 - \frac{p}{2}\right) |\beta(\xi)| x^2 + \left(2 + \frac{p}{2} - \frac{2}{p}\right) |\lambda_1| x - \left(1 + \frac{p}{2}\right) |\beta(\xi)|.$$

При $\xi \in D_1$ через $b_1(\xi)$ обозначим корень уравнения $\psi(x) = 0$, удовлетворяющий условию $0 \leq b_1(\xi) < 1$. Существование такого корня следует из того, что

$$\psi(0) = -\left(1 + \frac{p}{2}\right) |\beta(\xi)| \leq 0,$$
$$\psi(1) = \frac{3p - 2}{2p} |\lambda_1| - 2|\beta(\xi)| > 0.$$

Можно показать, что такой корень единственен. Положим, кроме того,

$$b = \begin{cases} 2 \dfrac{\overline{\lambda}_1}{\overline{\beta(\xi)}} \left[ 1 + \sqrt{1 - \dfrac{2(p-2)}{p} \left| \dfrac{\lambda_1}{\beta(\xi)} \right|^2} \right]^{-1}, & \xi \in D_0, \\ e^{i \arg \beta(\xi)} \cdot b_1(\xi), & \xi \in D_1, \end{cases}$$
$$a = \frac{\xi - \overline{b}}{1 - \overline{\xi} \overline{b}}.$$

**Теорема 5.** *При всех $1 \le p < \infty$ имеет место равенство*

$$\sup_{\|f\|_{A_p}\le 1} |\lambda_0 f(\xi) + \lambda_1 f'(\xi)|$$
$$= \begin{cases} \dfrac{|\lambda_0|}{(1-|\xi|^2)^{2/p}}, & \xi \in D_0,\ \lambda_1 = 0, \\ \dfrac{2|\lambda_1|\left(1+\dfrac{1}{2}|b|^2\right)^{(p-1)/p}}{(1-|\xi|^2)^{(p+2)/p}|b|}, & \xi \in D_0,\ \lambda_1 \ne 0, \\ \dfrac{|\lambda_1|\left[\left(1-\dfrac{p}{2}\right)|b|^4 + 4|b|^2 + 1 + \dfrac{p}{2}\right]^{(p-1)/p}}{(1-|\xi|^2)^{(p+2)/p}\left[\left(1-\dfrac{p}{2}\right)|b|^2 + 1 + \dfrac{p}{2}\right]^{(p-2)/p}}, & \xi \in D_1. \end{cases}$$

*Функция*

$$f^*(u)$$
$$= \begin{cases} \dfrac{e^{i\theta}|1-\xi b|^{2/p}(1-|\xi|^2)^{2/p}(1-\overline{a}u)^{2/p}}{\left(1+\dfrac{1}{2}|b|^2\right)^{1/p}(1-\overline{\xi}u)^{6/p}}, & \xi \in D_0, \\ \dfrac{e^{i\theta}|1-\xi b|^{4/p}(u-a)(\varphi(u))^{2/p}}{\left[\left(1-\dfrac{p}{2}\right)|b|^4 + 4|b|^2 + 1 + \dfrac{p}{2}\right]^{1/p}(1-\overline{a}u)(1-\overline{\xi}u)^{4/p}}, & \xi \in D_1, \end{cases}$$

*где*

$$\varphi(u) = \left(1+\frac{p}{2}\right)(1-|a|^2) + 2(\overline{\xi}-\overline{a})\frac{u-a}{1-\overline{\xi}u},$$

*является экстремальной в данной задаче.*

*Доказательство.* Покажем сначала, что функция $\varphi(u)$ не обращается в нуль при $u \in D$. В силу определения $a$ имеем

$$\varphi(u) = \frac{1-|\xi|^2}{|1-\xi b|^2}\left[\left(1+\frac{p}{2}\right)(1-|b|^2) + 2|b|^2 + 2b\frac{u-\xi}{1-\overline{\xi}u}\right].$$

Остается заметить, что

$$\left(1+\frac{p}{2}\right)(1-|b|^2) + 2|b|^2 > 1 + |b|^2 > 2|b|.$$

Положим при $\xi \in D_1$

$$g(u) = \frac{u-a}{1-\overline{a}u}\frac{(\varphi(u))^{2/p}}{(1-\overline{\xi}u)^{4/p}}, \quad \alpha = \frac{\lambda_1(1-|\xi|^2)^{2(p-2)/p}}{(1-\overline{a}\xi)^2(\varphi(\xi))^{(p-2)/p}},$$

$$I = \frac{\alpha}{2\pi i}\int_{|u|=1}\frac{(1-\overline{a}u)^2(\varphi(u))^{(p-2)/p}}{(u-\xi)^2(1-\overline{\xi}u)^{2(p-2)/p}}f(u)\,du.$$

Далее доказательство проводится по той же схеме, что и доказательства теорем 3 и 4. □

В заключение авторы благодарят В. М. Тихомирова за внимание к работе и полезные обсуждения.

МАТИ им. К. Э. Циолковского

Поступило
06.09.88

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] О с и п е н к о К . Ю. Наилучшее приближение аналитических функций по информации об их значениях в конечном числе точек // Математические заметки. 1976. Т. 19, вып. 1. С. 29–40.

[2] M i c c h e l l i C. A., R i v l i n T. J. A survey of optimal recovery // Optimal estimation in approximation theory. New York: Plenum Press, 1977. P. 1–54.

[3] F i s h e r S. D., M i c c h e l l i C. A. The $n$-width of sets of analytic functions // Duke Math. J. 1980. V. 47, №4. P.789–801.

[4] R i v l i n T. J. The optimal recovery of functions // Contemp. Math. 1982. V. 9. P. 121–151.

[5] Г о л у з и н Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966.

[6] Г а р н е т т Дж. Ограниченные аналитические функции. М.: Мир, 1984.

[7] П е в н ы й А. Б. Об оптимальности некоторых онлайновых алгоритмов // Изв. вузов. Математика. 1986. № 5. С. 43–49.

[8] D i e u d o n n é J. Recherches sur quelques problems ralatifs aux polinomes et aux fonctions bornées d'une variable complexe //Ann. Ecole Norm. sup. 1931. V. 3, N 48. P. 247–358.

[9] Ш а б а т Б. В. Введение в комплексный анализ. II. М.: Наука, 1976.