ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНЫХ ОГРАНИЧЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ И ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ПО НЕТОЧНЫМ ДАННЫМ

К.Ю. ОСИПЕНКО, М.И. СТЕСИН

Обозначим через $C(\Omega)$ линейное пространство непрерывных функций (комплексных или вещественных), определенных на $\Omega \subset \mathbb{C}$ и удовлетворяющих условию

$$\|f\|_\Omega = \sup_{z \in \Omega} |f(z)| < \infty,$$

Пусть X — некоторое подпространство на $C(\Omega)$ и $BX = \{f \in X : \|f\|_\Omega \le 1\}$, L — линейный функционал на X и $M \subset \Omega$. Рассмотрим задачу о нахождении величины

$$E(L, M, \delta, X) = \inf_S \sup_{\substack{f \in BX \\ \|f - \widetilde{f}\|_M \le \delta}} |Lf - S\widetilde{f}|, \tag{1}$$

где нижняя грань берется по всевозможным функциям (методам) $S : C(M) \to \mathbb{C}(\mathbb{R})$. Метод S_0 назовем оптимальным, если на нем достигается нижняя грань в (1). Если S_0 — оптимальный метод, то функция f_0, для которой

$$\sup_{\|f - \widetilde{f}\|_M \le \delta} |Lf_0 - S_0\widetilde{f}| = E(L, M, \delta, X)$$

называется экстремальной.

Задача (1), называемая задачей об оптимальном восстановлении функционала L по неточным данным (или по информации, заданной с погрешностью), была поставлена в работе [1] (см. также [2]–[5] и обширную библиографию, представленную в этих работах).

В данной работе рассматривается задача (1), когда X — подпространство аналитических или гармонических в Ω функций (эти подпространства обозначаются через $H_\infty(\Omega)$ и $h_\infty(\Omega)$, соответственно), $Lf = f'(x)$, $x \in \Omega$. Будем обозначать величину (1) в этом случае через $E_1(x, M, \delta, X)$. Аналогичные задачи для классов гладких функций рассматривались в работах [3], [6].

1. Предварительные сведения. Хорошо известно (см. [1]– [5]), что в задаче (1) среди оптимальных методов существует линейный (т. е. метод, являющийся линейным функционалом на $C(M)$)

и справедливо равенство

$$E(L, M, \delta, X) = \sup_{\substack{f \in BX \\ \|f\|_M \le \delta}} |Lf|.$$

В тех случаях, когда удается построить метод, погрешность которого допускает интегральное представление определенного вида, можно доказать оптимальность такого метода. А именно, имеет место следующий результат (мы формулируем частный случай теоремы 2 из [7]).

Теорема 1. *Пусть* $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $M \subset \Omega$, X *— подпространство функций из* $C(\Omega)$, *имеющих почти всюду граничные значения,* $f_0 \in BX$, $|f_0(e^{i\theta})| = 1$ *почти всюду,* $\|f_0\|_M \le \delta$, S_0 *— линейный функционал на* $C(M)$, $S_0 f_0 = \delta\|S_0\|$, $\varphi(e^{i\theta}) \in L_1(0, 2\pi)$ *и при всех* $f \in X$ *справедливо равенство*

$$Lf - S_0 f = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{f_0(e^{i\theta})}|\varphi(e^{i\theta})| f(e^{i\theta})\, d\theta.$$

Тогда S_0 *— оптимальный метод,* f_0 *— экстремальная функция и*

$$E(L, M, \delta, X) = Lf_0 = \int_0^{2\pi} |\varphi(e^{i\theta})|\, d\theta + \delta\|S_0\|.$$

Положим $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $H_\infty = H_\infty(D)$, $h_\infty = h_\infty(D)$. Через H_2 обозначим пространство аналитических в D функций, удовлетворяющих условию

$$\|f\|_{H_2} = \sup_{0<r<1} \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^2\, d\theta\right)^{1/2} < \infty.$$

Соответствующее пространство гармонических функций обозначим через h_2.

Напомним, что бесконечным произведением Бляшке называется функция вида

$$B(z) = \prod_{n=1}^{\infty} -\frac{\overline{z}_n}{|z_n|} \cdot \frac{z - z_n}{1 - \overline{z}_n z}, \tag{2}$$

где $z_n \in D$ (для $z_n = 0$ частное $-\overline{z}_n/|z_n|$ заменяется на единицу). Известно (см., например, [8, с. 61]), что если $z_n \in D$ удовлетворяют условию Бляшке $\sum_{n=1}^{\infty}(1 - |z_n|) < \infty$, то произведение (2) сходится в D, $B(z) \in BH_\infty$ и $|B(e^{i\theta})| = 1$ почти всюду.

Лемма 1. *Пусть* $z_n \in (0, 1)$ *удовлетворяют условию Бляшке,* $z_1 < z_2 < \ldots < z_n < \ldots$,

$$B(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{z_n^2 - z^2}{1 - z_n^2 z^2}$$

и существуют такие $a_n \in (z_n, z_{n+1})$, *что* $|B(a_n)| \ge c > 0$. *Тогда при всех* $f \in H_2$ *имеет место равенство*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(z)\,dz}{B(z)z^2} = \frac{f'(0)}{B(0)} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(z_n)-f(-z_n)}{B'(z_n)z_n^2}.$$

Доказательство. Положим $D_n^j = \{z \in \mathbb{C} : |z-(-1)^j| \le 1-a_n\}$, $j=1,2$, $D_n = D\setminus(D_n^1 \cup D_n^2)$, $\Gamma_n = \partial D \cap D_n$, $\gamma_n = \partial D_n \cap D$. По теореме о вычетах и в силу нечетности $B'(z)$ имеем

$$\begin{aligned} r_n = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(z)\,dz}{B(z)z^2} - \frac{f'(0)}{B(0)} - \sum_{j=1}^{n}\frac{f(z_j)-f(-z_j)}{B'(z_j)z_j^2}\right| \\ = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(z)\,dz}{B(z)z^2} - \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_n}\frac{f(z)\,dz}{B(z)z^2}\right| \\ = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_n}\frac{f(z)\,dz}{B(z)z^2} - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n}\frac{f(z)\,dz}{B(z)z^2}\right| \\ \le \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_n}|f(z)|\,|dz| + \frac{1}{2\pi}\frac{b_n}{a_n^2}\int_{\gamma_n}|f(z)|\,|dz|, \end{aligned}$$

где $b_n = \sup\limits_{z\in\gamma_n}|B(z)|^{-1}$. Нетрудно убедиться, что множество точек z, для которых

$$\left|\frac{z-z_j}{1-z_j z}\right| < \left|\frac{a_n - z_j}{1-z_j a_n}\right|,$$

при всех $j \ge n+1$ является кругом, лежащим внутри D_n^2, а при всех $j \le n$ — кругом, лежащим вне D_n^2. Отсюда следует, что при всех $z \in \gamma_n \cap D_n^2$ и любом j

$$\left|\frac{z-z_j}{1-z_j z}\right| \ge \left|\frac{a_n - z_j}{1-z_j a_n}\right|.$$

Аналогично доказывается справедливость при всех j и $z \in \gamma_n \cap D_n^2$ неравенств

$$\left|\frac{z+z_j}{1+z_j z}\right| \ge \left|\frac{a_n + z_j}{1+z_j a_n}\right|.$$

Следовательно, при всех $z \in \gamma_n \cap D_n^2$ $|B(z)| \ge |B(a_n)| \ge c$. В силу четности $B(z)$ это неравенство справедливо при всех $z \in \gamma_n$ Таким образом, $b_n \le c^{-1}$.

Из неравенства Коши–Буняковского имеем

$$\int_{\Gamma_n}|f(z)|\,|dz| \le \sqrt{|\Gamma_n|}\left(\int_{\Gamma_n}|f(z)|^2\,|dz|\right)^{1/2} \le \sqrt{2\pi|\Gamma_n|}\|f\|_{H_2}.$$

Тем самым

$$r_n \le \sqrt{\frac{|\Gamma_n|}{2\pi}}\|f\|_{H_2} + \frac{1}{2\pi c a_n^2}\int_{\gamma_n}|f(z)|\,|dz|.$$

Поскольку z_n удовлетворяет условию Бляшке, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$, и следовательно, $|\Gamma_n| \to 0$ при $n \to \infty$. Остается показать, что

$$\int_{\gamma_n} |f(z)|\,|dz| \to 0$$

при $n \to \infty$. Это легко сделать, пользуясь известной оценкой

$$|f(z)| \le \|f\|_{H_2}(1-|z|^2)^{-1/2}.$$

Лемма доказана. $\square$

Пусть $0 < \delta < 1$. Обозначим через K и K' — полные эллиптические интегралы первого рода для модулей $k = \delta^2$ и $r' = \sqrt{1-\delta^4}$, соответственно. Положим

$$\alpha_n = \operatorname{th}\left[(2n-1)\frac{\pi K}{2K'}\right], \quad n = 1, 2, \dots ,$$

и рассмотрим произведение Бляшке

$$B_0(z,\delta) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 + z}{1 + \alpha_n^2 z}.$$

Эта функция является экстремальной в задаче Мию о нахождении величины

$$\sup_{\substack{f\in BH_\infty \\ \|f\|_{(-1,0)}}} |f(z_0)|$$

для $z_0 \in (0,1)$ и была найдена Хейнсом в работе [9] (см. также [10]). Она может быть выражена через эллиптические функпии в следующем виде

(3) $$B_0(z,\delta) = \delta \operatorname{sn}\left(\frac{2}{\pi}K'v + K, \delta^2\right), \quad z = -\operatorname{th}^2 v.$$

Положим

$$B_2(z,\delta) = B_0(-z^2,\delta) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 - z^2}{1 - \alpha_n^2 z^2}.$$

Из представления (3) имеем

(4) $$B_2(z,\delta) = \delta \operatorname{sn}\left(\frac{2}{\pi}K' \operatorname{arth} z + K, \delta^2\right).$$

Отметим, что при всех $z \in (-1,1)$ $|B_0(z,\delta)| \le \delta$ и для $\beta_n = \operatorname{th}\left(n\dfrac{\pi K}{K'}\right)$, $n = 0, 1, \dots$, справедливы равенства

(5) $$B_2(\pm\beta_n,\delta) = (-1)^n\delta.$$

Рассмотрим также функцию

$$B_1(z,\delta) = B_2\left(\frac{z-\alpha_1}{1-\alpha_1 z}, \delta\right).$$

Нетрудно убедиться, что

$$(6)\qquad B_1(z,\delta)=z\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\beta_n^2-z^2}{1-\beta_n^2z^2}=\delta\,\mathrm{sn}\left(\frac{2}{\pi}K'\,\mathrm{arth}\,z,\delta^2\right).$$

Положим

$$h_0(z,\delta)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-\beta_n^2z^2}{1-\alpha_n^2z^2}\right)^2.$$

Поскольку

$$\alpha_n=\frac{1-h^{2n-1}}{1+h^{2n-1}},\quad \beta_n=\frac{1-h^{2n}}{1+h^{2n}},$$

где $h=e^{-\frac{\pi K}{K'}}$, то, пользуясь известными формулами из теории эллиптических функций (см., например, [11]), получаем

$$h_0(z,\delta)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+h^{2n-1}}{1+h^{2n}}\right)^4\left(\frac{1+2h^{2n}\cos 2\pi v+h^{4n}}{1+2h^{2n-1}\cos 2\pi v+h^{4n-2}}\right)^2$$
$$=\frac{\mathrm{cn}^2(2K'v,k')}{\mathrm{dn}^2(2K'v,k')\cos^2\pi v},$$

где $\cos 2\pi v=(1+z^2)(1-z^2)^{-1}$. В силу того, что $v=\left(\dfrac{i}{\pi}\right)\mathrm{arth}\,z$ и

$$\mathrm{cn}(iu,k')=\frac{1}{\mathrm{cn}(u,k)},\quad \mathrm{dn}(iu,k')=\frac{\mathrm{dn}(u,k)}{\mathrm{cn}(u,k)}$$

(см. [11, с. 133]), имеем

$$(7)\qquad h_0(z,\delta)=\frac{1-z^2}{\mathrm{dn}^2\left(\dfrac{2}{\pi}K'\,\mathrm{arth}\,z,\delta^2\right)}.$$

Положим

$$\varphi(z,\delta)=\frac{B_1(z,\delta)h_0(z,\delta)}{zB_2(z,\delta)}.$$

Лемма 2. *При всех* $0<\delta<1$ *и* $\theta\in(0,\pi)\cup(\pi,2\pi)$

$$(8)\qquad \frac{2|\sin\theta|}{1+\delta^2}\le\varphi(e^{i\theta},\delta)\le\frac{2|\sin\theta|}{1-\delta^2}.$$

Доказательство. Из (4), (6), (7), положив $u=\dfrac{2}{\pi}K'\,\mathrm{arth}\,z$ и пользуясь преобразованием Гаусса (см. [11, с. 134]), имеем

$$\varphi(z,\delta)=\frac{1-z^2}{z}\frac{\mathrm{sn}(u,\delta^2)}{\mathrm{sn}(u+K,\delta^2)\,\mathrm{dn}^2(u,\delta^2)}=\frac{1-z^2}{z}\frac{\mathrm{sn}(u,\delta^2)}{\mathrm{cn}(u,\delta^2)\,\mathrm{dn}(u,\delta^2)}$$
$$=\frac{1-z^2}{z}\frac{1}{1+\delta^2}\frac{\mathrm{sn}[(1+\delta^2)u,\lambda]}{\mathrm{cn}[(1+\delta^2)u,\lambda]},$$

где $\lambda = 2\delta(1+\delta^2)^{-1}$. Обозначим через L' полный эллиптический интеграл первого рода для модуля $\lambda' = \sqrt{1-\lambda^2}$. Тогда $K' = \dfrac{2}{1+\delta^2}L'$ и $u = \dfrac{4L'}{\pi(1+\delta^2)}\operatorname{arth} z$. Тем самым

$$\varphi(z,\delta) = \frac{1-z^2}{z}\frac{1}{1+\delta^2}\frac{\operatorname{sn}\left(\dfrac{4L'}{\pi}\operatorname{arth} z, \lambda\right)}{\operatorname{cn}\left(\dfrac{4L'}{\pi}\operatorname{arth} z, \lambda\right)}$$

$$= -\frac{1-z^2}{z}\frac{i}{(1+\delta^2)\operatorname{dn}\left(\dfrac{4L'}{\pi}\operatorname{arth} z + iL', \lambda\right)},$$

Положим теперь $z = e^{i\theta}$, $\theta \in (0,\pi)\cup(\pi,2\pi)$. Тогда $\operatorname{arth} z = x + i\dfrac{\pi}{4}\operatorname{sign}\sin\theta$, где $x = \dfrac{1}{2}\ln\left|\operatorname{ctg}\dfrac{\theta}{2}\right|$. Следовательно,

$$\varphi(e^{i\theta},\delta) = -\frac{2\sin\theta}{(1+\delta^2)\operatorname{dn}\left[\dfrac{4L'}{\pi}x + iL'(1+\operatorname{sign}\sin\theta), \lambda\right]}$$

$$= \frac{2|\sin\theta|}{(1+\delta^2)\operatorname{dn}\left(\dfrac{4L'}{\pi}x, \lambda\right)}.$$

В силу того, что для всех $x \in \mathbb{R}$ справедливы неравенства

$$1 \geq \operatorname{dn}\left(\frac{4L'}{\pi}x, \lambda\right) \geq \lambda' = \frac{1-\delta^2}{1+\delta^2},$$

получаем неравенство (8). Лемма доказана. □

2. Основные результаты. Рассмотрим задачу (1) для $X = H_\infty$, $Lf = f'(x)$, $x \in (-1,1)$ и $M = (-1,1)$.

Теорема 2. *При всех* $0 < \delta < 1$ *и* $x \in (-1,1)$ *метод*

$$f'(x) \approx S_0(x,\delta)\widetilde{f} = \frac{2\pi}{K'(1-\delta^4)(1-x^2)}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\operatorname{sh}^2\left[(2n-1)\dfrac{\pi K}{K'}\right]}\widetilde{f}(z_n),$$

где

$$z_n = \frac{\operatorname{th}\left[(2n-1)\dfrac{\pi K}{K'}\right] + x}{1 + x\operatorname{th}\left[(2n-1)\dfrac{\pi K}{K'}\right]},$$

является оптимальным на классе BH_∞*, функция* $B_1\left(\dfrac{z-x}{1-xz},\delta\right)$ *— экстремальная и*

$$E_1(x,(-1,1),\delta,H_\infty)=\frac{2\delta K'}{\pi(1-x^2)}=\frac{4}{\pi(1-x^2)}\delta\ln\frac{2}{\delta}+O\left(\delta^5\ln\frac{2}{\delta}\right).$$

Доказательство. Для $f\in H_\infty$ положим

$$\mathcal{I}f=\frac{\delta}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{h_0(z,\delta)f(z)}{B_2(z,\delta)z^2}\,dz.$$

Так как $H_\infty\subset H_2$, то из равенства (5) следует, что к этому интегралу применима формула, полученная в лемме 1. Имеем

$$\mathcal{I}f=f'(0)+\sum_{n=1}^{\infty}\delta\frac{f(\alpha_n)-f(-\alpha_n)}{B'(\alpha_n,\delta)\alpha_n^2}h_0(\alpha_n,\delta).$$

Используя равенства (4) и (7), получаем

$$B_2'(\alpha_n,\delta)=\delta(-1)^n\frac{2K'}{\pi(1-\alpha_n^2)},\quad h_0(\alpha_n,\delta)=\frac{1-\alpha_n^2}{1-\delta^4}.$$

Тем самым

$$\mathcal{I}f=f'(0)-\frac{2\pi}{K'(1-\delta^4)}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{f(\alpha_n)-f(-\alpha_n)}{\operatorname{sh}^2\left[(2n-1)\dfrac{\pi K}{K'}\right]}$$
$$=f'(0)-S_0(0,\delta)f.$$

С другой стороны, нетрудно убедиться, что

$$\mathcal{I}f=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overline{B_1(e^{i\theta},\delta)}\psi(e^{i\theta})f(e^{i\theta})\,d\theta,$$

где $\psi(e^{i\theta})=\delta\varphi(e^{i\theta},\delta)$. Из леммы 2 $\psi(e^{i\theta})>0$ почти всюду и $\psi(e^{i\theta})\in L_1(0,2\pi)$. Поскольку $B_1(\cdot,\delta)\in BH_\infty$, $\|B_1(\cdot,\delta)\|_{(-1,1)}=\delta$ и

$$S_0(0,\delta)B_1(z,\delta)=\delta\frac{2\pi}{K'(1-\delta^4)}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\operatorname{sh}^2\left[(2n-1)\dfrac{\pi K}{K'}\right]}=\delta\|S_0\|,$$

то, применяя теорему 1, учитывая равенства

$$B_1'(0,\delta)=\frac{2}{\pi}\delta K',\quad K'=\ln\frac{4}{k}+O\left(k^2\ln\frac{4}{k}\right),$$

получаем утверждение теоремы для $x=0$. Если $x\in(-1,1)$, то с помощью конформного преобразования единичного круга $w(z)=(z+x)(1+xz)^{-1}$ и рассмотрения функций $g(z)=f(w(z))$, для которых $g'(0)=(1-x^2)f'(x)$, получаем утверждение теоремы в общем случае. Теорема доказана. $\square$

Положим $D_H = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| < H/2\}$. Тогда с помощью конформного отображения этой полосы на единичный круг $w(z) = \operatorname{th} \dfrac{\pi z}{2H}$ из теоремы 2 получаем

Следствие 1. *При всех $0 < \delta < 1$ и $x \in \mathbb{R}$ метод*

$$f'(x) \approx S_0^H(x,\delta)\widetilde{f} = \frac{\pi^2}{HK'(1-\delta^4)} \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\operatorname{sh}^2\left[(2n-1)\dfrac{\pi K}{K'}\right]} \widetilde{f}\left(x + (2n-1)\frac{HK}{K'}\right)$$

является оптимальным на классе $BH_\infty(D_H)$, $\delta \operatorname{sn}\left[\dfrac{K'}{H}(z-x), \delta^2\right]$ — экстремальная функция и

$$E_1(x, \mathbb{R}, \delta, H_\infty(D_H)) = \frac{\delta K'}{H} = \frac{2}{H}\delta \ln\frac{2}{\delta} + O\left(\delta^5 \ln\frac{2}{\delta}\right).$$

Пусть теперь $X = h_\infty$, $Lu = u'(x)$, $x \in (-1,1)$ и $M = (-1,1)$ $\left(\text{для } u(z) \in h_\infty \text{ через } u'(x) \text{ обозначается } \left.\dfrac{\partial u(z)}{\partial x}\right|_{z=x}\right)$.

Теорема 3. *При всех $0 < \delta < 1$ и $x \in (-1,1)$ метод*

$$u'(x) \approx \cos^{-2}\frac{\pi}{4}\delta S_0\left(x, \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\delta\right)\widetilde{u}$$

является оптимальным на классе Bh_∞, функция

$$\frac{4}{\pi}\operatorname{Re}\operatorname{arctg} B_1\left(\frac{z-x}{1-xz}, \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\delta\right)$$

— экстремальная и

$$E_1(x, (-1,1), \delta, h_\infty) = \frac{8\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}\delta}{\pi^2(1-x^2)}K_0' = \frac{4}{\pi(1-x^2)}\delta\ln\frac{8}{\pi\delta} + O\left(\delta^3\ln\frac{8}{\pi\delta}\right),$$

где K_0' — полный эллиптический интеграл первого рода для модуля $k_0 = \sqrt{1 - \operatorname{tg}^4\dfrac{\pi}{4}\delta}$.

Доказательство. Для $f \in H_2$ положим

$$\mathcal{I}f = \frac{\Delta}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{h_0(z,\Delta)(1 + B_1^2(z,\Delta))}{B_2(z,\Delta)z^2} f(z)\,dz,$$

где $\Delta = \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}\delta$. Аналогично рассуждениям, приведенным в доказательстве теоремы 2, получаем

$$\mathcal{I}f = f'(0) - (1+\Delta^2)S_0(0,\Delta)f. \tag{9}$$

С другой стороны,

$$\mathcal{I}f = \frac{\Delta}{2\pi i}\int_{\partial D} 2[\operatorname{Re} B_1(z,\Delta)]\varphi(z,\Delta)f(z)\,\frac{dz}{z}.$$

Рассмотрим гармоническую в D функцию

$$u_1(z,\Delta) = \frac{4}{\pi}\operatorname{Re}\operatorname{arctg} B_1(z,\Delta).$$

В силу того, что $u_1(e^{i\theta},\Delta) = \operatorname{sign}\operatorname{Re}\operatorname{arctg} B_1(e^{i\theta},\Delta)$ при $\theta \in (0,\pi)\cup(\pi,2\pi)$, имеем

$$\mathcal{I}f = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_1(e^{i\theta},\Delta)\psi_1(e^{i\theta})f(e^{i\theta})\,d\theta, \tag{10}$$

где $\psi_1(z) = 2\Delta|\operatorname{Re} B_1(z,\Delta)|\varphi(z,\Delta)$. Из леммы 2 следует, что $\psi_1(e^{i\theta}) > 0$ почти всюду и $\psi_1(e^{i\theta}) \in L_1(0,2\pi)$. Взяв вещественные части от равенств (9), (10) и обозначив через $u = \operatorname{Re} f$, получаем

$$u'(0) - (1+\Delta^2)S_0(0,\Delta)u = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_1(e^{i\theta},\Delta)\psi_1(e^{i\theta})u(e^{i\theta})\,d\theta. \tag{11}$$

Если $u \in h_\infty \subset h_2$, то сопряженная функция $v \in h_2$ (см. [12, с. 380]) и, следовательно, $u+iv \in H_2$. Тем самым равенство (11) справедливо для всех $u \in h_\infty$. Для применения теоремы 1 остается заметить, что $S_0(0,\Delta)u_1 = \delta\|S_0(0,\Delta)\|$, так как $u_1(\alpha_n,\Delta) = (-1)^{n+1}\delta$. Таким образом, при $x = 0$ метод

$$(1+\Delta^2)S_0(0,\Delta) = \cos^{-2}\frac{\pi}{4}\delta S_0\left(x,\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\delta\right)$$

является оптимальным, функция $u_1(z,\Delta)$ — экстремальная и

$$E_1(0,(-1,1),\delta,h_\infty) = \left.\frac{\partial u_1(z,\Delta)}{\partial x}\right|_{z=0} = \frac{8\Delta}{\pi^2}K_0'.$$

Переход к произвольному $x \in (-1,1)$ осуществляется аналогично соответствующему переходу в доказательстве теоремы 2. Теорема доказана. □

Следствие 2. *При всех* $0 < \delta < 1$ *и* $x \in \mathbb{R}$ *метод*

$$u'(x) \approx \cos^{-2}\frac{\pi}{4}\delta S_0^H\left(x,\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\delta\right)\widetilde{u}$$

является оптимальным на классе $Bh_\infty(D_H)$, *функция*

$$\frac{4}{\pi}\operatorname{Re}\operatorname{arctg}\left[\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\delta\operatorname{sn}\left(\frac{K_0'}{H}(z-x),\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{4}\delta\right)\right]$$

— экстремальная и

$$E_1(x,\mathbb{R},\delta,h_\infty(D_H)) = \frac{4\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\delta}{\pi H}K_0' = \frac{2}{H}\delta\ln\frac{8}{\pi\delta} + O\left(\delta^3\ln\frac{8}{\pi\delta}\right),$$

Московский авиационный технологический институт им. К.Э.Циолковского
Всесоюзный научно-исследовательский институт электроэнергетики

Поступило 18.05.90

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Марчук А.Г., Осипенко К.Ю. Наилучшее приближение функций, заданных с погрешностью в конечном числе точек // Математические заметки. 1975. Т. 17. №3. С. 359–368.

[2] Micchelli C.A., Rivlin T.J. A survey of optimal recovery // Optimal estimation in approximation theory. Plenum Press, 1977. P. 1–53.

[3] Габушин В.Н. Оптимальные методы вычисления значений оператора Ux, если x задано с погрешносью. Дифференцирование функций, определенных с ошибкой // Труды МИАН СССР. 1980. Т. 145. С. 63–78.

[4] Micchelli C.A., Rivlin T.J. Lectures on optimal recovery // Lect. Notes Math. 1985. V. 1129. P. 21-93.

[5] Арестов В.В. Наилучшее восстановление операторов и родственные задачи // Труды МИАН СССР. 1989. Т. 189. С. 3–20.

[6] Micchelli C.A. On an optimal method for the numerical differentiation of smooth functions // J. Approx. Theory 1976. V. 18. P. 189–204.

[7] Osipenko K.Yu., Stesin M.I. On some problems of optimal recovery of analytic and harmonic functions from inaccurate data. // USSR Academy of Sciences. Scientific Council for Cibernetics. Preprint. Moscow. 1990.

[8] Гарнетт Дж. Ограниченные аналитические функции. М.: Мир, 1984.

[9] Heins M. The problem of Milloux for functions analytic thronghout the interior of the unit circle // Amer. Journ. Math. 1945. V. 67. №2. P. 212–234.

[10] Хавинсон С.Я. Теория экстремальных задач для ограниченных аналитических функций, удовлетворяющих дополнительным условиям внутри области // УМН. 1963. Т. 18. №2. С. 25–98.

[11] Ахиезер Н.И. Элементы теории эллиптических функций. М.: Наука, 1970.

[12] Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966.