

# ОБ ОПТИМАЛЬНЫХ МЕТОДАХ ВОССТАНОВЛЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВАХ ХАРДИ–СОБОЛЕВА

К. Ю. ОСИПЕНКО

Аннотация. В работе предложен общий подход к построению оптимальных методов восстановления линейных функционалов по известному решению двойственной экстремальной задачи, основанный на некоторой параметризации этого решения. С помощью предложенного подхода удастся решить ряд задач оптимального восстановления функций на классах Харди–Соболева таких, как восстановление значений функции по информации о коэффициентах Фурье или о значениях в некоторой системе узлов в периодическом и непериодическом случаях.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И МЕТОД ПАРАМЕТРИЗАЦИИ

Пусть  $W$  — некоторое множество из линейного пространства  $X$ . Рассмотрим задачу оптимального восстановления линейного функционала  $L$  на этом множестве по значениям линейных функционалов  $l_1, \dots, l_n$ . Положим для  $x \in W$

$$Ix := (l_1x, \dots, l_nx).$$

Оператор  $I: W \rightarrow K^n$ , где  $K = \mathbb{R}$  или  $\mathbb{C}$  в зависимости от того, вещественное или комплексное линейное пространство  $X$ , называется *информационным* оператором. Величина

$$e(L, W, I) := \inf_{S: K^n \rightarrow K} \sup_{x \in W} |Lx - S(Ix)|$$

называется *погрешностью* оптимального восстановления функционала  $L$  на множестве  $W$ . Всякий метод  $S_0$ , для которого

$$\sup_{x \in W} |Lx - S_0(Ix)| = e(L, W, I),$$

будем называть *оптимальным* методом восстановления.

С. А. Смоляком [1] было доказано, что в вещественном случае для выпуклого и центрально-симметричного множества  $W$  среди

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №99-01-01181 и №00-15-96109).

оптимальных методов восстановления существует линейный и имеет место равенство

$$(1) \quad e(L, W, I) = \sup_{\substack{x \in W \\ Ix=0}} |Lx|.$$

Аналогичный результат в комплексном случае для выпуклого и уравновешенного множества  $W$  был доказан в работе [2] (более общие постановки задач восстановления и соответствующие результаты можно найти в работе [3] и цитируемой там литературе).

Всякий элемент  $x_0 \in W$ , для которого  $Ix_0 = 0$  и

$$|Lx_0| = \sup_{\substack{x \in W \\ Ix=0}} |Lx|,$$

будем называть *экстремальным*. Задача нахождения экстремального элемента чаще оказывается более простой, чем задача нахождения оптимального метода восстановления. Цель данной работы — предложить способ, позволяющий по экстремальному элементу (при наличии некоторой его параметризации) получать оптимальный метод восстановления, и построить ряд оптимальных методов восстановления, используя предложенную схему.

**Теорема 1.** Пусть  $X$  — вещественное линейное пространство,  $W$  — выпуклое центрально-симметричное множество из  $X$  и  $x_0$  — экстремальный элемент в задаче оптимального восстановления линейного функционала  $L$  на множестве  $W$  по значениям линейных функционалов  $l_1x, \dots, l_nx$ . Предположим, что при всех  $M = (t_1, \dots, t_{s+n}) \in \mathbb{R}^{n+s}$  из некоторой окрестности точки  $M_0 \in \mathbb{R}^{n+s}$  существуют  $x(M) \in X$  такие, что  $x(M_0) = x_0$  и для заданных функций  $\psi_1(M), \dots, \psi_s(M)$  таких, что  $\psi_j(M_0) = 0$ ,  $j = 1, \dots, s$ , при всех  $M$  из окрестности  $M_0$ , удовлетворяющих условию  $\psi_j(M) = 0$ ,  $j = 1, \dots, s$ ,  $x(M) \in W$  (в случае  $s = 0$  будем считать, что при всех  $M$  из окрестности  $M_0$   $x(M) \in W$ ). Тогда, если функции  $\varphi(M) := Lx(M)$ ,  $\varphi_j(M) := l_jx(M)$ ,  $j = 1, \dots, n$ , и  $\psi_j(M)$ ,  $j = 1, \dots, s$ , имеют в окрестности  $M_0$  непрерывные частные производные по всем аргументам и определитель матрицы

$$J(M) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_1} & \frac{\partial \psi_1}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial \psi_s}{\partial t_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_{n+s}} & \cdots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_{n+s}} & \frac{\partial \psi_1}{\partial t_{n+s}} & \cdots & \frac{\partial \psi_s}{\partial t_{n+s}} \end{pmatrix}$$

отличен от нуля в точке  $M_0$ , то единственным линейным оптимальным методом восстановления является метод

$$Lx \approx \sum_{j=1}^n C_j l_j x,$$

где  $C_1, \dots, C_n$  — решения системы

$$J(M_0)\mathbf{C} = \text{grad } \varphi|_{M_0},$$

в которой  $\mathbf{C} = (C_1, \dots, C_{n+s})$ .

*Доказательство.* Пусть

$$Lx \approx \sum_{j=1}^n C_j l_j x$$

— оптимальный метод восстановления. Тогда в силу того, что  $x_0$  экстремальный элемент, имеем при всех  $x \in W$

$$|Lx - \sum_{j=1}^n C_j l_j x| \leq |Lx_0|.$$

Следовательно, при всех  $M$  из некоторой окрестности  $M_0$  таких, что  $\psi_j(M_0) = 0$ ,  $j = 1, \dots, s$ , выполнено неравенство

$$|\varphi(M) - \sum_{j=1}^n C_j \varphi_j(M)| \leq |\varphi(M_0)|.$$

Поскольку  $\varphi_j(M_0) = 0$ ,  $j = 1, \dots, n$ , то отсюда легко вытекает, что функция

$$\varphi(M) - \sum_{j=1}^n C_j \varphi_j(M)$$

имеет относительный экстремум в точке  $M_0$ . Метод Лагранжа приводит к необходимым условиям

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t_m} - \sum_{j=1}^n C_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial t_m} - \sum_{j=1}^s C_{n+j} \frac{\partial \psi_j}{\partial t_m} = 0, \quad m = 1, \dots, n + s,$$

из которых однозначно определяются  $C_1, \dots, C_n$ .  $\square$

Приведем один простейший пример. Пусть  $\mathcal{H}_\infty^{\mathbb{R}}$  пространство функций, аналитических в единичном круге

$$D := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\},$$

ограниченных в нем и вещественных на интервале  $(-1, 1)$ . В качестве множества  $W$  рассмотрим  $H_\infty^{\mathbb{R}}$  — множество функций из  $\mathcal{H}_\infty^{\mathbb{R}}$ , удовлетворяющих условию

$$\sup_{z \in D} |f(z)| \leq 1.$$

Для задачи оптимального восстановления функций из  $H_\infty^{\mathbb{R}}$  в точке  $\tau \in (-1, 1)$  по их значениям в нуле двойственная экстремальная задача (1) решается сразу же с помощью леммы Шварца:

$$\sup_{\substack{f \in H_\infty^{\mathbb{R}} \\ f(0)=0}} |f(\tau)| = |\tau|.$$

Тем самым функция  $f_0(z) = z$  является экстремальной для рассматриваемой задачи. Положим

$$f_1(z, t) = \frac{z + t}{1 + tz}.$$

Легко убедиться, что  $f_1(z, t) \in H_\infty^{\mathbb{R}}$  при всех  $t \in (-1, 1)$ . Кроме того,  $f_1(z, 0) = f_0(z)$  и  $f_1(0, t) = t$ . Из теоремы 1 получаем, что единственным линейным оптимальным методом восстановления является метод

$$f(\tau) \approx \left( \frac{\partial f_1}{\partial t}(0, 0) \right)^{-1} \frac{\partial f_1}{\partial t}(\tau, 0) f(0) = (1 - \tau^2) f(0).$$

Более общие результаты относительно рассмотренной задачи можно найти в [2] и [4] (они также могут быть получены предлагаемым методом).

## 2. ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПО КОЭФФИЦИЕНТАМ ФУРЬЕ

Классом Харди–Соболева  $H_{\infty, \beta}^r$  будем называть множество  $2\pi$ -периодических функций, аналитических в полосе  $S_\beta := \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| < \beta\}$  и удовлетворяющих условию  $|f^{(r)}(z)| \leq 1, z \in S_\beta$ . Через  $H_{\infty, \beta}^{r, \mathbb{R}}$  будем обозначать класс функций из  $H_{\infty, \beta}^r$ , вещественных на вещественной оси. В случае  $r = 0$  эти классы будем обозначать через  $H_{\infty, \beta}$  и  $H_{\infty, \beta}^{\mathbb{R}}$ , соответственно.

Положим

$$a_j(f) := \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x) \cos jx \, dx, \quad j = 0, 1, \dots, \\ b_j(f) := \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x) \sin jx \, dx, \quad j = 1, 2, \dots,$$

где  $\mathbb{T} := [0, 2\pi)$ . Рассмотрим задачу оптимального восстановления значения  $f(\xi)$ ,  $f \in H_{\infty, \beta}^r$ ,  $\xi \in \mathbb{T}$ , по значениям информационного оператора

$$If = (a_0(f), a_1(f), \dots, a_{n-1}(f), b_1(f), \dots, b_{n-1}(f)).$$

В силу инвариантности рассматриваемого класса относительно сдвига погрешность оптимального восстановления не зависит от точки  $\xi$ . Будем обозначать ее через  $e(H_{\infty, \beta}^r, I)$ .

Решение исследуемой задачи дается в терминах теории эллиптических функций. Напомним некоторые определения из этой теории. Полными эллиптическими интегралами первого рода для модулей  $k$  и  $k' := \sqrt{1 - k^2}$  называются величины

$$K := \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \quad K' := \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k'^2t^2)}}.$$

В дальнейшем будем считать, что  $k$  выбрано из условия

$$\frac{\pi K'}{2K} = \beta.$$

При этом  $k$  определяется равенством (см., например, [5])

$$k = 4e^{-\beta} \left( \frac{\sum_{m=0}^{\infty} e^{-2\beta m(m+1)}}{1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} e^{-2\beta m^2}} \right)^2.$$

Мы будем использовать стандартные обозначения  $\operatorname{sn}(z, k)$ ,  $\operatorname{cn}(z, k)$  и  $\operatorname{dn}(z, k)$  для эллиптических функций Якоби, опуская зависимость их от модуля, когда последний равен  $k$ .

Положим

$$\Phi_{n,0}^{\beta}(z) := \sqrt{\lambda} \operatorname{sn} \left( \frac{2n\Lambda}{\pi} z, \lambda \right), \quad \Phi_{n,r}^{\beta} := D_r * \Phi_{n,0}, \quad r \geq 1,$$

где  $\Lambda$  — полный эллиптический интеграл первого рода для модуля  $\lambda$ , определяемого равенством

$$\frac{\Lambda'}{\Lambda} = 2n \frac{K'}{K} = \frac{4\beta n}{\pi},$$

$$D_r(t) = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(mt - \pi r/2)}{m^r}, \quad r = 1, 2, \dots,$$

— ядро Бернулли, а

$$(f * g)(z) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(z-t)g(t) dt.$$

Функции  $\Phi_{n,r}^{\beta}$ , введенные в работе [6], обладают свойствами, аналогичными свойствам идеальных сплайнов Эйлера (см., например, [7, стр. 72]). Идеальные сплайны Эйлера являются решениями ряда классических экстремальных задач на классах Соболева (о точных значениях поперечников, о неравенстве для производных колмогоровского типа и др.), а функции  $\Phi_{n,r}^{\beta}$  оказываются решениями аналогичных задач для аналитических функций из классов Харди–Соболева. Из работы [6] следует, что

$$\begin{aligned} \Phi_{n,r}^{\beta}(z) &= \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}\Lambda n^r} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin((2m+1)nz - \pi r/2)}{(2m+1)^r \operatorname{sh}((2m+1)2n\beta)}, \\ \|\Phi_{n,r}^{\beta}\|_{\infty} &= \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}\Lambda n^r} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m(r+1)}}{(2m+1)^r \operatorname{sh}((2m+1)2n\beta)}, \end{aligned} \quad r = 0, 1, \dots$$

(через  $\|\cdot\|_{\infty}$  мы обозначаем стандартную норму в  $L_{\infty}(\mathbb{T})$ ).

В [8] было доказано, что

$$e(H_{\infty,\beta}^r, I) = \|\Phi_{n,r}^{\beta}\|_{\infty},$$

а экстремальной функцией для задачи оптимального восстановления значения  $f(0)$  на классе  $H_{\infty, \beta}^r$  по информационному оператору  $I$  является функция

$$\varphi_{n,r}^{\beta}(z) := \begin{cases} \Phi_{n,r}^{\beta}\left(z + \frac{\pi}{2n}\right), & r = 2l, \\ \Phi_{n,r}^{\beta}(z), & r = 2l + 1. \end{cases}$$

Однако вопрос о самом оптимальном методе восстановления остался открытым. Пользуясь теоремой 1, мы построим линейный оптимальный метод восстановления для этой задачи.

Докажем сначала один вспомогательный результат. Положим

$$\operatorname{ctn} z := \frac{\operatorname{cn} z \operatorname{dn} z}{\operatorname{sn} z}.$$

**Лемма 1.** При всех  $0 \leq t_1 < \dots < t_{2n} < 2K$  система функций

$$1, \operatorname{ctn}\left(\frac{K}{\pi}z - t_1\right), \dots, \operatorname{ctn}\left(\frac{K}{\pi}z - t_{2n}\right)$$

является чебышевской на множестве  $\mathbb{T} \setminus \{\pi t_1/K, \dots, \pi t_{2n}/K\}$ .

*Доказательство.* Предположим, что существуют вещественные числа  $C_0, C_1, \dots, C_{2n}$ , не все равные нулю, для которых функция

$$C_0 + \sum_{j=1}^{2n} C_j \operatorname{ctn}\left(\frac{K}{\pi}z - t_j\right)$$

имеет  $2n + 1$  нулей на множестве  $\mathbb{T} \setminus \{\pi t_1/K, \dots, \pi t_{2n}/K\}$ . Тогда функция

$$\begin{aligned} g(z) &= C_0 \prod_{j=1}^{2n} \operatorname{sn}\left(\frac{K}{\pi}z - t_j\right) \\ &+ \sum_{m=1}^{2n} C_m \operatorname{cn}\left(\frac{K}{\pi}z - t_m\right) \operatorname{dn}\left(\frac{K}{\pi}z - t_m\right) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq m}}^{2n} \operatorname{sn}\left(\frac{K}{\pi}z - t_j\right) \end{aligned}$$

должна иметь не менее  $2n + 1$  нулей на  $\mathbb{T}$ . Функция  $g(z)$  — эллиптическая функция с периодами  $2\pi, 2\pi K'/K$ . Из теоремы Лиувилля (см. [5, стр. 14]) следует, что число нулей  $g(z)$  в параллелограмме периодов, подсчитанное с учетом кратностей, совпадает с числом полюсов. Число полюсов у функции  $g(z)$  в параллелограмме периодов не превосходит  $2n + 1$ . Поскольку число нулей с учетом кратности  $2\pi$ -периодической функции  $g(z)$  должно быть четным, то оно не превосходит  $2n$ , что противоречит сделанному предположению.  $\square$

Положим

$$\sigma(z) := \operatorname{sn}\left(\frac{2n\Lambda}{\pi}z, \lambda\right) \operatorname{ctn} \frac{K}{\pi}z.$$

**Теорема 2.** Для всех  $\xi \in \mathbb{T}$  метод

$$f(\xi) \approx d_0 \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{j=1}^{n-1} d_j (a_j(f) \cos j\xi + b_j(f) \sin j\xi),$$

где

$$d_j = \frac{2}{na_j(\sigma)} \sum_{m=1}^n (-1)^{m+1} \operatorname{ctn} \frac{2m-1}{2n} K \cos j \frac{2m-1}{2n} \pi, \\ j = 0, \dots, n-1,$$

является оптимальным на классе  $H_{\infty, \beta}$ . При  $r \geq 1$  для всех  $\xi \in \mathbb{T}$  оптимальным методом на классе  $H_{\infty, \beta}^r$  является метод

$$f(\xi) \approx \frac{a_0(f)}{2} + \frac{2}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{j^r d_{jr}}{a_j(\sigma)} (a_j(f) \cos j\xi + b_j(f) \sin j\xi),$$

где

$$d_{jr} = \begin{cases} (-1)^{r/2} \sum_{m=1}^n (D_r * \sigma) \left( \frac{2m-1}{2n} \pi \right) \cos j \frac{2m-1}{2n} \pi, & r = 2l, \\ (-1)^{(r-1)/2} \sum_{m=1}^{n-1} (D_r * \sigma) \left( \frac{m}{n} \pi \right) \sin j \frac{m}{n} \pi, & r = 2l + 1. \end{cases}$$

*Доказательство.* Рассмотрим сначала задачу об оптимальном восстановлении значения  $f(0)$  на классе  $H_{\infty, \beta}^{r, \mathbb{R}}$  по информационному оператору

$$I_0 f := (a_0(f), a_1(f), \dots, a_{n-1}(f)).$$

Имеем

$$e(H_{\infty, \beta}^{r, \mathbb{R}}, I_0) = \sup_{\substack{f \in H_{\infty, \beta}^{r, \mathbb{R}} \\ I_0 f = 0}} |f(0)| \geq |\varphi_{n,r}^\beta(0)|.$$

С другой стороны, если  $f \in H_{\infty, \beta}^{r, \mathbb{R}}$  и  $I_0 f = 0$ , то, положив

$$f_0(z) := \frac{f(z) + f(-z)}{2},$$

получаем, что  $f_0 \in H_{\infty, \beta}^{r, \mathbb{R}}$ ,  $I_0 f_0 = 0$  и, кроме того, поскольку  $f_0$  четная функция,  $b_m(f) = 0$ ,  $m \in \mathbb{N}$ . Следовательно,

$$f(0) = f_0(0) \leq \sup_{\substack{f \in H_{\infty, \beta}^{r, \mathbb{R}} \\ I f = 0}} |f(0)| = |\varphi_{n,r}^\beta(0)|.$$

Тем самым

$$e(H_{\infty, \beta}^{r, \mathbb{R}}, I_0) = |\varphi_{n,r}^\beta(0)|.$$

С помощью первого главного преобразования эллиптических функций  $2n$ -й степени можно показать (см. [9]), что

$$\varphi_{n,0}^\beta(z) = \sqrt{\lambda} \operatorname{sn} \left( \frac{2n\Lambda}{\pi} z + \Lambda, \lambda \right) = k^n \prod_{m=1}^{2n} \operatorname{sn} \left( \frac{K}{\pi} z - \frac{2m-1}{2n} K \right).$$

Положим для  $M = (t_1, \dots, t_n)$

$$h_M(z) := k^n \prod_{m=1}^n \operatorname{sn} \left( \frac{K}{\pi} z - t_m \right) \prod_{m=n+1}^{2n} \operatorname{sn} \left( \frac{K}{\pi} z - \frac{2m-1}{2n} K \right).$$

Тогда при всех  $M \in [0, 2K]^n$   $h_M \in H_{\infty,\beta}^{\mathbb{R}}$ , а для

$$t_m^0 := \frac{2m-1}{2n} K$$

и  $M_0 := (t_1^0, \dots, t_n^0)$   $h_{M_0} = \varphi_{n,0}^\beta$ .

Пусть  $r = 0$ . Покажем, что определитель матрицы  $J(M_0)$ , состоящей из элементов

$$\frac{\partial}{\partial t_m} a_j(h_M) \Big|_{M_0} = a_j \left( \frac{\partial h_M}{\partial t_m} \Big|_{M_0} \right), \quad m = 1, \dots, n, \quad j = 0, \dots, n-1,$$

отличен от нуля. Если предположить противное, то найдутся вещественные числа  $C_1, \dots, C_n$ , не все равные нулю, такие, что для функции

$$g = \sum_{m=1}^n C_m \frac{\partial h_M}{\partial t_m} \Big|_{M_0}$$

будут выполнены равенства  $a_0(g) = \dots = a_{n-1}(g) = 0$ . Следовательно, для четной функции  $g_0(z) := g(z) + g(-z)$  будут выполняться равенства

$$a_0(g_0) = a_1(g_0) = b_1(g_0) = \dots = a_{n-1}(g_0) = b_{n-1}(g_0) = 0.$$

Поскольку

$$\frac{\partial h_M}{\partial t_m}(z) = -h_M(z) \operatorname{ctn} \left( \frac{K}{\pi} z - t_m \right),$$

то в силу четности функции  $h_{M_0}$  имеем

$$\begin{aligned} g_0(z) &= -h_{M_0}(z) \sum_{m=1}^n C_m \left( \operatorname{ctn} \left( \frac{K}{\pi} z - t_m^0 \right) - \operatorname{ctn} \left( \frac{K}{\pi} z + t_m^0 \right) \right) \\ &= -h_{M_0}(z) \sum_{m=1}^n C_m \left( \operatorname{ctn} \left( \frac{K}{\pi} z - t_m^0 \right) - \operatorname{ctn} \left( \frac{K}{\pi} z - \tau_m^0 \right) \right), \end{aligned}$$

где  $\tau_m^0 = 2K - t_m^0$ . Положим

$$F := g_0 - C_0 h_{M_0},$$

где  $C_0 = g_0(0)/h_{M_0}(0)$ . Для функции  $F$  выполняются равенства

$$a_0(F) = a_1(F) = b_1(F) = \dots = a_{n-1}(F) = b_{n-1}(F) = 0.$$

В силу того, что тригонометрическая система

$$1, \cos x, \sin x, \dots, \cos(n-1)x, \sin(n-1)x$$

является чебышевской, функция  $F$  должна иметь не менее  $2n$  перемен знака на  $\mathbb{T}$  (см. [10, стр. 41]). Кроме того, функция  $F(z)$  в силу четности имеет нуль при  $z = 0$  без перемены знака. Тем самым у функции  $F$  не менее  $2n+1$  различных нулей на  $\mathbb{T}$ , что противоречит лемме 1.

Из теоремы 1 (при  $s = 0$ ) вытекает, что для нахождения оптимального метода остается решить систему

$$(2) \quad \sum_{j=0}^{n-1} C_j a_j \left( \frac{\partial h_M}{\partial t_m} \Big|_{M_0} \right) = \frac{\partial h_M(0)}{\partial t_m} \Big|_{M_0} = \sqrt{\lambda} \operatorname{ctn} \frac{2m-1}{2n} K, \\ m = 1, \dots, n.$$

Имеем

$$a_j \left( \frac{\partial h_M}{\partial t_m} \Big|_{M_0} \right) = -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} h_{M_0}(z) \operatorname{ctn} \left( \frac{K}{\pi} z - t_m^0 \right) \cos jz \, dz \\ = -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} h_{M_0} \left( z + \frac{2m-1}{2n} \pi \right) \operatorname{ctn} \frac{K}{\pi} z \cos j \left( z + \frac{2m-1}{2n} \pi \right) \, dz \\ = (-1)^{m+1} \sqrt{\lambda} a_j(\sigma) \cos j \frac{2m-1}{2n} \pi.$$

Из того, что определитель системы (2) отличен от нуля, вытекает, что  $a_j(\sigma) \neq 0$ ,  $j = 0, \dots, n-1$ . Тем самым система (2) эквивалентна системе

$$(3) \quad \sum_{j=0}^{n-1} C_j a_j(\sigma) \cos j \frac{2m-1}{2n} \pi = (-1)^{m+1} \operatorname{ctn} \frac{2m-1}{2n} K, \\ m = 1, \dots, n.$$

В силу ортогональности системы функций  $1, \cos x, \dots, \cos(n-1)x$  на сетке  $\frac{2m-1}{2n}\pi$ ,  $m = 1, \dots, n$ , получаем, что  $C_0 = d_0/2$ ,  $C_j = d_j$ ,  $j = 1, \dots, n-1$ .

Пусть теперь  $r \geq 1$ . Рассмотрим функцию

$$h_{P,r}(z) := \begin{cases} \frac{t_0}{2} + (D_r * h_M)(z), & r = 2l, \\ \frac{t_0}{2} + (D_r * h_M) \left( z - \frac{\pi}{2n} \right), & r = 2l + 1, \end{cases}$$

где  $P = (t_0, t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ . При всех  $P$  таких, что

$$\psi(P) := a_0(h_M) = 0,$$

$h_{P,r} \in H_{\infty,\beta}^{r,\mathbb{R}}$  и, кроме того, для  $P_0 := (0, t_1^0, \dots, t_n^0)$   $h_{P_0,r} = \varphi_{n,r}^\beta$ . Из теоремы 1 (теперь уже с  $s = 1$ ) следует, что для нахождения оптимального метода восстановления надо решить систему

$$(4) \quad \sum_{j=0}^{n-1} C_j \frac{\partial a_j(h_{P,r})}{\partial t_m} \Big|_{P_0} + C_n \frac{\partial \psi}{\partial t_m} = \frac{\partial h_{P,r}(0)}{\partial t_m} \Big|_{P_0}, \quad m = 0, \dots, n.$$

Имеем (все частные производные вычисляются в точке  $P_0$ )

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_0(h_{P,r})}{\partial t_0} &= 1, & \frac{\partial a_j(h_{P,r})}{\partial t_0} &= 0, \quad j = 1, \dots, n-1, & \frac{\partial \psi}{\partial t_0} &= 0, \\ \frac{\partial a_0(h_{P,r})}{\partial t_m} &= 0, & \frac{\partial \psi}{\partial t_m} &= (-1)^{m+1} \sqrt{\lambda} a_0(\sigma), & m &= 1, \dots, n, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial a_j(h_{P,r})}{\partial t_m} = \begin{cases} (-1)^{r/2+m+1} \frac{\sqrt{\lambda} a_j(\sigma)}{j^r} \cos j \frac{2m-1}{2n} \pi, & r = 2l, \\ (-1)^{r/2+m-1/2} \frac{\sqrt{\lambda} a_j(\sigma)}{j^r} \sin j \frac{m}{n} \pi, & r = 2l+1, \end{cases} \\ j = 1, \dots, n-1, \quad m = 1, \dots, n.$$

При  $r = 2l$  система (4) принимает вид:  $C_0 = 1/2$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{r/2} \frac{a_j(\sigma)}{j^r} C_j \cos j \frac{2m-1}{2n} \pi + a_0(\sigma) C_n \\ = (D_r * \sigma) \left( \frac{2m-1}{2n} \pi \right), \quad m = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

и решается аналогично системе (2).

Если  $r = 2l+1$ , то система (4) сводится к следующей:  $C_0 = 1/2$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{(r-1)/2} \frac{a_j(\sigma)}{j^r} C_j \sin j \frac{m}{n} \pi - a_0(\sigma) C_n \\ = (D_r * \sigma) \left( \frac{m}{n} \pi \right), \quad m = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Пользуясь ортогональностью системы функций  $\sin x, \dots, \sin(n-1)x$  на сетке  $m\pi/n$ ,  $m = 1, \dots, n-1$ , получаем решение этой системы.

Докажем, что построенный метод (обозначим его через  $S$ ) является оптимальным на классе  $H_{\infty,\beta}^r$ . Предположим, что найдется функция  $f_0 \in H_{\infty,\beta}^r$ , для которой

$$(5) \quad |f_0(0) - S(I_0 f_0)| > e(H_{\infty,\beta}^r, I_0).$$

Тогда для функции  $\overline{f_0(\bar{z})} \in H_{\infty,\beta}^r$  также выполнено неравенство (5). Без ограничения общности можно считать, что  $f_0(0) - S(I_0 f_0) > 0$ .

Следовательно, для функции

$$g(z) := \frac{f_0(z) + \overline{f_0(\bar{z})}}{2} \in H_{\infty, \beta}^{r, \mathbb{R}}$$

имеем

$$g(0) - S(I_0 g) > e(H_{\infty, \beta}^r, I_0) \geq e(H_{\infty, \beta}^{r, \mathbb{R}}, I_0),$$

что невозможно в силу оптимальности метода  $S$  на классе  $H_{\infty, \beta}^{r, \mathbb{R}}$ .

Для нахождения оптимального метода восстановления значения  $f(\xi)$  достаточно рассмотреть оптимальный метод восстановления в нуле для функции  $F(z) = f(z + \xi)$ .  $\square$

**Следствие 1.** Для всех  $\xi \in \mathbb{T}$  метод

$$f(\xi) \approx \frac{1}{n} \sum_{|j| \leq n-1} \left( \sum_{m=1}^n (-1)^{m+1} \operatorname{ctn} \frac{2m-1}{2n} K \cos j \frac{2m-1}{2n} \pi \right) \frac{e^{ij\xi}}{c_j(\sigma)} c_j(f)$$

является оптимальным методом восстановления на классе  $H_{\infty, \beta}$  по значениям коэффициентов Фурье

$$c_j(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) e^{-ijt} dt, \quad |j| \leq n-1.$$

При  $r \geq 1$  для всех  $\xi \in \mathbb{T}$  оптимальным методом на классе  $H_{\infty, \beta}^r$  является метод

$$f(\xi) \approx c_0(f) + \frac{1}{n} \sum_{\substack{|j| \leq n-1 \\ j \neq 0}} |j|^r d_{|j|^r} \frac{e^{ij\xi}}{c_j(\sigma)} c_j(f).$$

### 3. ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПО ЗНАЧЕНИЯМ В ТОЧКАХ

Рассмотрим теперь задачу оптимального восстановления значения  $f(\xi)$ ,  $f \in H_{\infty, \beta}^r$ ,  $\xi \in \mathbb{T}$ , по значениям информационного оператора

$$I_\tau := (f(\tau_1), \dots, f(\tau_{2n})),$$

где  $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_{2n})$ ,  $0 \leq \tau_1 < \dots < \tau_{2n} < 2\pi$ . Будем считать, что  $r \geq 1$  (при  $r = 0$  решение рассматриваемой задачи было получено в [8]).

Докажем сначала ряд вспомогательных утверждений.

**Лемма 2.** При всех  $0 \leq \tau_1 < \dots < \tau_{2n} < 2\pi$  найдутся такие  $0 \leq \theta_1 < \dots < \theta_{2n} < 2\pi$ , что для функции  $f_0 \in H_{\infty, \beta}^r$ , имеющей вид

$$f_0 = c + D_r * B_0,$$

где  $c \in \mathbb{R}$ , а

$$B_0(t) = k^n \prod_{j=1}^{2n} \operatorname{sn} \left( \frac{K}{\pi} (t - \theta_j) \right),$$

$a_0(B_0) = 0$  и  $f_0(\tau_1) = \dots = f_0(\tau_{2n}) = 0$ .

*Доказательство.* Напомним, что произведением Бляшке порядка  $m$  для области  $\Omega \subset \mathbb{C}$  называется функция вида

$$B(z) = \varepsilon \exp\left(-\sum_{j=1}^m P(z, \zeta_j)\right),$$

где  $\zeta_1, \dots, \zeta_m$  — точки из  $\Omega$ ,  $|\varepsilon| = 1$ ,  $P(z, \zeta) = u(z, \zeta) + iv(z, \zeta)$ ,  $u(z, \zeta)$  — функция Грина области  $\Omega$  с особенностью в точке  $\zeta$ , а  $v(z, \zeta)$  — сопряженная к  $u(z, \zeta)$  функция (в общем случае многозначная). Обозначим через  $\mathcal{B}_{2n}$  множество однозначных произведений Бляшке в кольце  $\Omega_\beta = \{z \in \mathbb{C} : e^{-\beta} < |z| < e^\beta\}$  степени не выше  $2n$ , вещественных на единичном круге  $E = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ . В работе [11] с помощью обобщенной задачи Неванлинны–Пика было построено нечетное и непрерывное в топологии равномерной сходимости на компактах из  $\Omega_\beta$  отображение  $\sigma : S^{2n} \rightarrow \mathcal{B}_{2n}$ , где

$$S^{2n} = \left\{ x = (x_0, \dots, x_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n+1} : \sum_{j=0}^{2n+1} |x_j|^2 = 1 \right\}.$$

Положим для  $x \in S^{2n}$

$$\sigma_0(x) = (a_0(B), f_B(\tau_2) - f_B(\tau_1), \dots, f_B(\tau_{2n}) - f_B(\tau_1)),$$

где  $B(t) = \sigma(x)(e^{it})$ , а  $f_B = D_r * B$ . Тогда отображение  $\sigma_0 : S^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  является нечетным и непрерывным, а следовательно, по теореме Борсука существует  $x_0 \in S^{2n}$ , для которого  $\sigma_0(x_0) = 0$ . Тем самым построена функция  $\widehat{B}(t) := \sigma(x_0)(e^{it})$ , для которой  $a_0(\widehat{B}) = 0$ , и функция  $\widehat{f} := a + D_r * \widehat{B}$ , для которой при  $a = -(D_r * \widehat{B})(\tau_1)$

$$\widehat{f}(\tau_1) = \dots = \widehat{f}(\tau_{2n}) = 0.$$

Поскольку  $\widehat{f}^{(r)} = \widehat{B}$ , то из теоремы Ролля вытекает, что  $\widehat{B}$  имеет не менее  $2n$  различных нулей на  $\mathbb{T}$ , а в силу того, что  $\sigma(x_0) \in \mathcal{B}_{2n}$ ,  $\widehat{B}$  имеет ровно  $2n$  нулей на  $\mathbb{T}$ . Остается заметить, что из вида произведений Бляшке для кольца с нулями на единичной окружности (см. [9]) вытекает равенство

$$\widehat{B}(t) = \varepsilon B_0(t),$$

где  $\varepsilon = 1$  или  $-1$ . Положив  $f_0 = \varepsilon \widehat{f}$ , получим утверждение леммы.  $\square$

**Предложение 1.** Пусть  $0 \leq \tau_1 < \dots < \tau_{2n} < 2\pi$  и  $f_0$  — функция из леммы 2. Тогда для любого  $\xi \in \mathbb{T}$  и любой функции  $f \in H_{\infty, \beta}^r$  такой, что  $f(\tau_1) = \dots = f(\tau_{2n}) = 0$  выполнено неравенство

$$|f(\xi)| \leq |f_0(\xi)|.$$

*Доказательство.* Предположим, что при некотором  $\xi \in \mathbb{T} \setminus \{\tau_1, \dots, \tau_{2n}\}$  найдется функция  $g \in H_{\infty, \beta}^r$ , для которой  $g(\tau_1) = \dots = g(\tau_{2n}) = 0$  и  $|g(\xi)| > |f_0(\xi)|$ . Так как для функции  $\widehat{g}(z) = g(z) \exp(-i \arg g(\xi))$

выполнены те же условия, можно без ограничения общности считать, что  $g(\xi) > 0$ . Положим

$$g_0(z) := \frac{g(z) + \overline{g(\bar{z})}}{2}.$$

Очевидно, что  $g_0 \in H_{\infty, \beta}^{r, \mathbb{R}}$  и  $g_0(\xi) = g(\xi)$ . Рассмотрим функцию

$$F := f_0 - \rho g_0, \quad \rho = \frac{f_0(\xi)}{g_0(\xi)}.$$

Эта функция имеет нули в точках  $\tau_1, \dots, \tau_{2n}, \xi$ . Следовательно, по теореме Ролля  $F^{(r)}$  имеет не менее  $2n + 1$  нулей на  $\mathbb{T}$ . Отсюда вытекает, что однозначная и аналитическая в кольце  $\Omega_\beta$  функция  $F^{(r)} \left( \frac{1}{i} \ln w \right)$  имеет в этом кольце не менее  $2n + 1$  нулей. Поскольку произведение Бляшке на границе  $\Omega_\beta$  удовлетворяет условию

$$\left| B_0 \left( \frac{1}{i} \ln w \right) \right| = 1, \quad w \in \partial\Omega_\beta,$$

а  $f_0^{(r)} = B_0$ , то при  $w \in \partial\Omega_\beta$

$$\begin{aligned} \left| f_0^{(r)} \left( \frac{1}{i} \ln w \right) - F^{(r)} \left( \frac{1}{i} \ln w \right) \right| &= \left| \rho g_0^{(r)} \left( \frac{1}{i} \ln w \right) \right| \\ &\leq |\rho| < 1 = \left| f_0^{(r)} \left( \frac{1}{i} \ln w \right) \right|. \end{aligned}$$

Так как у  $B_0 \left( \frac{1}{i} \ln w \right)$  ровно  $2n$  нулей в области  $\Omega_\beta$ , то по теореме Руше точно такое же число нулей должно быть и у функции  $F^{(r)} \left( \frac{1}{i} \ln w \right)$ . Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.  $\square$

**Теорема 3.** При всех  $\xi \in \mathbb{T}$  метод

$$f(\xi) \approx \sum_{j=1}^{2n} C_j(\xi) f(\tau_j),$$

в котором  $C_1(\xi), \dots, C_{2n}(\xi)$  являются решениями системы

$$(6) \quad \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 0 \\ f_1(\tau_1) & \dots & f_1(\tau_{2n}) & a_0(g_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{2n}(\tau_1) & \dots & f_{2n}(\tau_{2n}) & a_0(g_{2n}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1(\xi) \\ C_2(\xi) \\ \vdots \\ C_{2n+1}(\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ f_1(\xi) \\ \vdots \\ f_{2n}(\xi) \end{pmatrix},$$

где

$$f_m = (D_r * g_m), \quad g_m(t) = B_0(t) \operatorname{ctn} \left( \frac{K}{\pi} (t - \theta_m) \right), \quad m = 1, \dots, 2n,$$

а функция  $B_0$  с нулями  $\theta_m$  определена в лемме 2, является оптимальным на классе  $H_{\infty, \beta}^r$ . При этом для погрешности оптимального восстановления имеет место равенство

$$e(\xi, H_{\infty, \beta}^r, I_\tau) = |(D_r * B_0)(\xi) - (D_r * B_0)(\tau_1)|.$$

*Доказательство.* Положим  $\theta_0 := -(D_r * B_0)(\tau_1)$  и

$$B_P(t) := k^n \prod_{j=1}^{2n} \operatorname{sn} \left( \frac{K}{\pi} (t - t_j) \right), \quad f_P := t_0 + D_r * B_P,$$

где  $P = (t_0, t_1, \dots, t_{2n})$ . Тогда при  $P = P_0 := (\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{2n})$  в силу соотношения двойственности (1) и предложения 1 функция  $f_{P_0}$  является экстремальной в задаче оптимального восстановления значения  $f(\xi)$  на классе  $H_{\infty, \beta}^r$ , а также и на классе  $H_{\infty, \beta}^{r, \mathbb{R}}$ . Положим  $\tau_0 := \xi$ ,

$$\varphi_j(P) := f_P(\tau_j), \quad j = 0, \dots, 2n, \quad \psi(P) := a_0(B_P).$$

Имеем

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial t_0} = 1, \quad j = 0, \dots, 2n, \quad \frac{\partial \psi}{\partial t_0} = 0,$$

и при всех  $m = 1, \dots, 2n$

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial t_m} \Big|_{P_0} = -\frac{K}{\pi} f_m(\tau_j), \quad j = 0, \dots, 2n, \quad \frac{\partial \psi}{\partial t_m} \Big|_{P_0} = -\frac{K}{\pi} a_0(g_m).$$

Из теоремы 1 вытекает, что коэффициенты оптимального метода восстановления определяются из системы (6) при условии, что определитель этой системы отличен от нуля. Если предположить противное, то должны найтись вещественные  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{2n}$ , не все равные нулю, для которых функция

$$g = \alpha_0 + D_r * \left( \sum_{j=1}^{2n} \alpha_j g_j \right)$$

обращается в нуль в точках  $\tau_1, \dots, \tau_{2n}$  и, кроме того,

$$a_0 \left( \sum_{j=1}^{2n} \alpha_j g_j \right) = 0.$$

Пусть  $\tau_0 \in \mathbb{T} \setminus \{\tau_1, \dots, \tau_{2n}\}$ . Рассмотрим функцию

$$F := g - \rho f_{P_0}, \quad \rho = \frac{g(\tau_0)}{f_{P_0}(\tau_0)}.$$

Функция  $F$  имеет нули в точках  $\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_{2n}$ . Следовательно, по теореме Ролля  $F^{(r)}$  имеет не менее  $2n + 1$  нулей на  $\mathbb{T}$ . Имеем

$$F^{(r)}(t) = \sum_{j=1}^{2n} \alpha_j g_j(t) - \rho B_0(t) = B_0(t) \left( \sum_{j=1}^{2n} \alpha_j \operatorname{ctn} \left( \frac{K}{\pi} (t - \theta_j) \right) - \rho \right).$$

Из леммы 1 вытекает, что  $F^{(r)}$  не может иметь более, чем  $2n$  нулей на  $\mathbb{T}$ . Полученное противоречие доказывает, что определитель системы (6) отличен от нуля.

Для доказательства оптимальности построенного метода на классе  $H_{\infty, \beta}^r$  можно воспользоваться теми же рассуждениями, которые были проведены в доказательстве теоремы 2.  $\square$

Обозначим матрицу системы (6) через  $A$ . Тогда оптимальный метод, построенный в теореме 3, будет иметь вид

$$f(\xi) \approx (A^{-1}\mathbf{G}(\xi), \mathbf{f}) = (\mathbf{G}(\xi), (A^*)^{-1}\mathbf{f}),$$

где  $\mathbf{G}(\xi) = (1, f_1(\xi), \dots, f_{2n}(\xi))$ ,  $\mathbf{f} = (f(\tau_1), \dots, f(\tau_{2n}), 0)$ , а  $A^*$  — матрица, сопряженная к  $A$  (здесь  $(\cdot, \cdot)$  — стандартное скалярное произведение в  $\mathbb{R}^{2n+1}$ ). Тем самым оптимальный метод может быть записан в виде

$$f(\xi) \approx d_0 + \sum_{m=1}^{2n} d_m (D_r * g_m)(\xi),$$

где  $d_0, d_1, \dots, d_{2n}$  — решения системы

$$(7) \quad \begin{cases} d_0 + \sum_{m=1}^{2n} d_m (D_r * g_m)(\tau_j) = f(\tau_j), & j = 1, \dots, 2n, \\ \sum_{m=1}^{2n} d_m a_0(g_m) = 0. \end{cases}$$

Пусть  $X_{2n}^\theta$  — множество функций вида

$$c_0 + \sum_{n=1}^{2n} c_m (D_r * g_m),$$

где  $c_1, \dots, c_{2n}$  удовлетворяют условию

$$\sum_{n=1}^{2n} c_m a_0(g_m) = 0.$$

Тогда, учитывая (7), получаем

**Следствие 2.** Пусть  $0 \leq \tau_1 < \dots < \tau_{2n} < 2\pi$ , а  $0 \leq \theta_1 < \dots < \theta_{2n} < 2\pi$  — определены леммой 2. Тогда функция  $g(\xi) \in X_{2n}^\theta$ , интерполирующая  $f$  в точках  $\tau_1, \dots, \tau_{2n}$ , является оптимальным методом восстановления значения  $f(\xi)$ ,  $\xi \in \mathbb{T}$ , на классе  $H_{\infty, \beta}^r$  по значениям в точках  $\tau_1, \dots, \tau_{2n}$ .

Рассмотрим задачу оптимального восстановления для равномерной сетки

$$\tau_m^0 := \frac{m-1}{n}\pi, \quad m = 1, \dots, 2n.$$

Положим

$$t_{mr} := \begin{cases} \tau_m^0, & r = 2l, \\ \tau_m^0 + \frac{\pi}{2n}, & r = 2l + 1, \end{cases} \quad m = 1, \dots, 2n.$$

**Теорема 4.** При всех  $\xi \in \mathbb{T}$  метод

$$f(\xi) \approx \hat{f}_1 + \frac{1}{2n} \sum_{m=1}^{2n} \left( \sum_{j=2}^{2n} \frac{\hat{f}_j}{\hat{c}_j} e^{-i(m-1)(j-1)\pi/n} \right) (D_r * \sigma)(\xi - t_{mr}),$$

где

$$\begin{aligned} \hat{f}_j &= \frac{1}{2n} \sum_{m=1}^{2n} f(\tau_m^0) e^{i(m-1)(j-1)\pi/n}, \\ \hat{c}_j &= \frac{1}{2n} \sum_{m=1}^{2n} (D_r * \sigma)(t_{mr}) e^{i(m-1)(j-1)\pi/n}, \end{aligned} \quad j = 1, \dots, 2n,$$

является оптимальным методом восстановления на классе  $H_{\infty, \beta}^r$ , использующим информацию о значениях функции в равномерной сетке  $\tau_m^0$ ,  $m = 1, \dots, 2n$ .

*Доказательство.* Пусть  $r = 2l$ . Тогда  $\Phi_{n,r}^\beta(\tau_m^0) = 0$ ,  $m = 1, \dots, 2n$ . Поскольку

$$\Phi_{n,r}^\beta = (D_r * \varphi_{n,0}^\beta) \left( z - \frac{\pi}{2n} \right),$$

а

$$\varphi_{n,0}^\beta \left( z - \frac{\pi}{2n} \right) = -k^n \prod_{m=1}^{2n} \operatorname{sn} \left( \frac{k}{\pi} (z - \tau_m^0) \right),$$

то для системы точек  $\tau_m^0$  точки  $\theta_m$  из леммы 2 совпадают с  $\tau_m^0$ . Тем самым

$$g_m(z) = (-1)^{m+1} \sqrt{\lambda} \sigma(z - \tau_m^0).$$

Система (7) в рассматриваемом случае будет иметь вид

$$\begin{cases} d_0 + \sqrt{\lambda} \sum_{m=1}^{2n} (-1)^{m+1} d_m (D_r * \sigma)(\tau_j^0 - \tau_m^0) = f(\tau_j), & j = 1, \dots, 2n, \\ \sum_{m=1}^{2n} (-1)^{m+1} d_m = 0. \end{cases}$$

Положив  $x_0 = d_0$ ,  $x_m = \sqrt{\lambda} (-1)^{m+1} d_m$ ,  $c_m = (D_r * \sigma)(\tau_m^0)$  и пользуясь периодичностью и четностью функции  $D_r * \sigma$ , приходим к системе

$$\begin{pmatrix} 1 & c_1 & c_2 & \dots & c_{2n} \\ 1 & c_{2n} & c_1 & \dots & c_{2n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & c_2 & c_3 & \dots & c_1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{2n-1} \\ x_{2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(\tau_1^0) \\ f(\tau_2^0) \\ \vdots \\ f(\tau_{2n}^0) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Сложив первые  $2n$  равенств этой системы и пользуясь последним равенством, находим, что  $x_0 = \widehat{f}_1$ . Далее решение легко может быть найдено с помощью равенства

$$U^*CU = \begin{pmatrix} \widehat{c}_1 & & & 0 \\ & \widehat{c}_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \widehat{c}_{2n} \end{pmatrix},$$

где

$$U = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2n}} e^{i(j-1)(m-1)\pi/n} \right\}_{j,m=1}^{2n}, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_{2n} \\ c_{2n} & c_1 & \dots & c_{2n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_2 & c_3 & \dots & c_1 \end{pmatrix}.$$

Если  $r = 2l + 1$ , то

$$\Phi_{n,r}^\beta \left( \tau_m^0 + \frac{\pi}{2n} \right) = 0, \quad m = 1, \dots, 2n.$$

Поскольку

$$\Phi_{n,r}^\beta \left( z + \frac{\pi}{2n} \right) = (D_r * \varphi_{n,0}^\beta)(z),$$

а

$$\varphi_{n,0}^\beta(z) = k^n \prod_{m=1}^{2n} \operatorname{sn} \left( \frac{K}{\pi} \left( z - \left( \tau_m^0 + \frac{\pi}{2n} \right) \right) \right),$$

то точки  $\theta_m$  из леммы 2 совпадают в этом случае с точками  $\tau_m^0 + \frac{\pi}{2n}$ . Следовательно,

$$g_m(z) = (-1)^m \sqrt{\lambda} \sigma \left( z - \left( \tau_m^0 + \frac{\pi}{2n} \right) \right).$$

Далее рассуждения проводятся аналогично четному случаю.  $\square$

#### 4. НЕПЕРИОДИЧЕСКИЙ СЛУЧАЙ

В непериодическом случае классом Харди–Соболева  $H_\infty^r$  будем называть множество функций, аналитических в единичном круге  $D := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  и удовлетворяющих условию  $|f^{(r)}(z)| < 1$ ,  $z \in D$ . Через  $H_\infty^{r,\mathbb{R}}$  обозначим класс функций из  $H_\infty^r$ , вещественных в интервале  $(-1, 1)$ . При  $r = 0$  класс  $H_\infty^r$  будем обозначать через  $H_\infty$ .

Рассмотрим задачу оптимального восстановления значения  $f(\xi)$ ,  $\xi \in (-1, 1)$ , по значениям информационного оператора

$$I_\tau f = (f(\tau_1), \dots, f(\tau_{n+r})),$$

где  $-1 < \tau_1 < \dots < \tau_{n+r} < 1$ . В случае  $r = 0$  решение рассматриваемой задачи было получено в работе [2], поэтому будем считать, что  $r \geq 1$ .

Для функций  $f$ , аналитических в единичном круге, положим

$$(T_r f)(z) := \int_0^z \frac{(z - \zeta)^{r-1}}{(r-1)!} f(\zeta) d\zeta.$$

Очевидно, что  $(T_r f)^{(r)} = f$ , и, следовательно,  $T_r f \in H_\infty^r$  при всех  $f \in H_\infty$ .

Из работы [12] вытекает следующий результат.

**Предложение 2.** *При всех  $-1 < \tau_1 < \dots < \tau_{n+r} < 1$  найдутся такие  $\tau_1 < z_1 < \dots < z_n < \tau_{n+r}$ , что для функции  $f_0 \in H_\infty^r$ , имеющей вид*

$$f_0 = P_{r-1} + T_r B_0,$$

где  $P_{r-1}$  — полином степени  $r-1$ , а  $B_0$  — произведение Бляшке порядка  $n$

$$B_0(z) = \prod_{j=1}^n \frac{z - z_j}{1 - z_j z},$$

выполняются равенства

$$f_0(\tau_j) = 0, \quad j = 1, \dots, n+r.$$

Кроме того, при всех  $\xi \in (-1, 1)$

$$(8) \quad \sup_{\substack{f \in H_\infty^r \\ f(\tau_1) = \dots = f(\tau_{n+r}) = 0}} |f(\xi)| = |f_0(\xi)|.$$

Из равенства (8) сразу следует, что для погрешности оптимального восстановления значения  $f(\xi)$  на классе  $H_\infty^r$  справедливо равенство

$$e(\xi, H_\infty^r, I_\tau) = |f_0(\xi)|.$$

Оптимальный метод восстановления и в этом случае может быть получен с помощью теоремы 1.

**Теорема 5.** *При всех  $\xi \in (-1, 1)$  метод*

$$f(\xi) \approx \sum_{j=1}^{n+r} C_j(\xi) f(\tau_j),$$

в котором  $C_1(\xi), \dots, C_{n+r}(\xi)$  являются решениями системы

$$(9) \quad \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \tau_1 & \dots & \tau_{n+r} \\ \dots & \dots & \dots \\ \tau_1^{r-1} & \dots & \tau_{n+r}^{r-1} \\ (T_r g_1)(\tau_1) & \dots & (T_r g_1)(\tau_{n+r}) \\ \dots & \dots & \dots \\ (T_r g_n)(\tau_1) & \dots & (T_r g_n)(\tau_{n+r}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1(\xi) \\ C_2(\xi) \\ \vdots \\ C_{n+r}(\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \xi \\ \vdots \\ \xi^{r-1} \\ (T_r g_1)(\xi) \\ \vdots \\ (T_r g_n)(\xi) \end{pmatrix},$$

где

$$g_m(z) = B_0(z) \frac{1 - z^2}{(z - z_m)(1 - z_m z)}, \quad m = 1, \dots, n,$$

а функция  $B_0$  с нулями  $z_m$  определена в предложении 2, является оптимальным на классе  $H_\infty^r$ .

*Доказательство.* Для  $P = (a_0, a_1, \dots, a_{r-1}, t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+r}$  положим

$$f_P(z) := \sum_{j=0}^{r-1} a_j z^j + (T_r B_P)(z),$$

где

$$B_P(z) = \prod_{j=1}^n \frac{z - t_j}{1 - t_j z}.$$

Пусть полином  $P_{r-1}$  из предложения 2 имеет вид

$$P_{r-1} = \sum_{j=0}^{r-1} a_j^0 z^j.$$

Тогда при  $P = P_0 := (a_0^0, a_1^0, \dots, a_{r-1}^0, z_1, \dots, z_n)$  функция  $f_{P_0}$  является экстремальной в задаче оптимального восстановления значения  $f(\xi)$  на классах  $H_\infty^r$  и  $H_\infty^{r, \mathbb{R}}$ . Положим  $\tau_0 := \xi$ ,

$$\varphi_j(P) := f_P(\tau_j), \quad j = 0, \dots, n+r.$$

Имеем при всех  $j = 0, \dots, n+r$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_j}{\partial a_m} &= \tau_j^m, \quad m = 0, \dots, r-1, \\ \frac{\partial \varphi_j}{\partial t_m} &= (T_r g_m)(\tau_j), \quad m = 1, \dots, n+r. \end{aligned}$$

Для получения оптимального метода на классе  $H_\infty^{r, \mathbb{R}}$  остается применить теорему 1, предварительно проверив, что определитель системы (9) отличен от нуля. Если предположить, что этот определитель равен нулю, то найдутся  $C_1, \dots, C_{n+r}$ , не все равные нулю, такие, что функция

$$F(z) := \sum_{j=0}^{r-1} C_{j+1} z^j + \sum_{j=1}^n C_{j+r} (T g_j)(z)$$

обращается в нуль в точках  $\tau_1, \dots, \tau_{n+r}$ . Тогда по теореме Ролля найдутся точки  $\tau_1 < \xi_1 < \dots < \xi_n < \tau_{n+r}$ , в которых  $F^{(r)}$  обращается в нуль. Тем самым

$$F^{(r)} = \sum_{j=1}^n C_{j+r} g_j(\xi_m) = 0, \quad m = 1, \dots, n.$$

В [13] было доказано, что система функций

$$\frac{1}{(z - \xi_m)(1 - \xi_m z)}, \quad m = 1, \dots, n,$$

является чебышевской на множестве  $(-1, 1) \setminus \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ . Следовательно,  $g_1, \dots, g_m$  — чебышевская система на множестве  $(-1, 1)$  и  $C_{r+1} = \dots = C_{n+r} = 0$ . Отсюда вытекает, что и  $C_1 = \dots = C_r = 0$ .

Доказательство оптимальности построенного метода на классе  $H_\infty^r$  проводится по той же схеме, которая использовалась в теореме 2.  $\square$

Для фиксированных  $-1 < z_1 < \dots < z_n < 1$  положим

$$X_{n+r}^z := \text{span}\{1, z, \dots, z^{r-1}, (T_r g_1)(z), \dots, (T_r g_n)(z)\}.$$

Аналогично следствию 2 получаем

**Следствие 3.** Пусть  $-1 < \tau_1 < \dots < \tau_{n+r} < 1$ , а  $\tau_1 < z_1 < \dots < z_n < \tau_{n+r}$  — определены предложением 2. Тогда функция  $g(\xi) \in X_{n+r}^z$ , интерполирующая  $f$  в точках  $\tau_1, \dots, \tau_{n+r}$ , является оптимальным методом восстановления значения  $f(\xi)$ ,  $\xi \in (-1, 1)$ , на классе  $H_\infty^r$  по значениям в точках  $\tau_1, \dots, \tau_{n+r}$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Смоляк С. А. Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них. Канд. дисс. М.: МГУ, 1965.
- [2] Осипенко К. Ю. Наилучшее приближение аналитических функций по информации об их значениях в конечном числе точек // Мат. заметки. 1976. Т. 19. №1. С. 29–40.
- [3] Магарил-Ильев Г. Г., Осипенко К. Ю. Об оптимальном восстановлении функционалов по неточным данным // Мат. заметки. 1991. Т. 50 №6. С. 85–93.
- [4] Fisher S. D., Micchelli C. A. The  $n$ -width of sets of analytic functions // Duke Math. J. 1980. V. 47. №4. P. 789–801.
- [5] Ахиезер Н. И. Элементы теории эллиптических функций. М.: Наука, 1970.
- [6] Osipenko K. Yu. Exact values of  $n$ -widths of Hardy-Sobolev classes // Constr. Approx. 1997. V. 13. P. 17–27.
- [7] Корнейчук Н. П. Точные константы в теории приближения. М.: Наука, 1987.
- [8] Osipenko K. Yu., Wilderotter K. Optimal information for approximating periodic functions // Math. Comput. 1997 V. 66. №220. P. 1579–1592.
- [9] Осипенко К. Ю. Об  $n$ -поперечниках, оптимальных квадратурных формулах и оптимальном восстановлении функций, аналитических в полосе // Изв. РАН. Сер. мат. 1994. Т. 58. №4. С. 55–79.
- [10] Pinkus A.  $n$ -Widths in Approximation Theory. Berlin: Springer-Verlag, 1985.
- [11] Wilderotter K. Optimal approximation of periodic analytic functions with integrable boundary values // J. Approx. Theory. 1996. V. 84. №2. P. 236–246.
- [12] Fisher S. D. Envelopes, widths, and Landau problems for analytic functions // Constr. Approx. 1989. V. 5. №2. P. 171–187.
- [13] Bojanov B. D., Grozev G. R. A note on the optimal recovery of functions in  $H^\infty$  // J. Approx. Theory. 1988. V. 53. №1. P. 67–77.

МАТИ — РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. К. Э. ЦИОЛКОВСКОГО