ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ С ОДНОРОДНЫМИ ВЕСАМИ

К. Ю. ОСИПЕНКО

Аннотация. В работе рассматриваются задачи восстановления операторов по неточно заданной информации в весовых пространствах L_q с однородными весами. Доказан ряд общих теорем, которые применяются к задачам восстановления дифференциальных операторов по неточно заданному преобразованию Фурье. В частности, получены оптимальные методы восстановления степеней оператора Лапласа по неточно заданному преобразованию Фурье в L_p-метрике.

Библиография: 30 названий.

1. Общая постановка

Пусть T — некоторое непустое множество, Σ — σ-алгебра подмножеств T и μ — неотрицательная σ-аддитивная мера на Σ. Через $L_p(T,\mu)$ обозначим совокупность всех Σ-измеримых функций со значениями в $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, для которых

$$\|x(\cdot)\|_{L_p(T,\mu)} = \begin{cases} \left(\displaystyle\int_T |x(t)|^p\,d\mu\right)^{1/p} < \infty, & 1 \le p < \infty, \\ \operatorname*{vraisup}\limits_{t\in T} |x(t)| < \infty, & p = \infty. \end{cases}$$

Положим

$$\mathcal{W} = \{\, x(\cdot) \in L_p(T,\mu) : \|\varphi(\cdot)x(\cdot)\|_{L_r(T,\mu)} < \infty \,\},$$
$$W = \{\, x(\cdot) \in \mathcal{W} : \|\varphi(\cdot)x(\cdot)\|_{L_r(T,\mu)} \le 1 \,\},$$

где $1 \le p, r \le \infty$, а $\varphi(\cdot)$ — некоторая функция на T.

Рассмотрим задачу восстановления оператора $\Lambda\colon \mathcal{W} \to L_q(T,\mu)$, $1 \le q \le \infty$, задаваемого равенством $\Lambda x(\cdot) = \psi(\cdot)x(\cdot)$, где $\psi(\cdot)$ — некоторая функция на T, на классе W по функции $x(\cdot) \in W$, известной с погрешностью на T (будем считать, что функции $\varphi(\cdot)$ и $\psi(\cdot)$ таковы, что оператор Λ отображает пространство $\mathcal{W}$ в $L_q(T,\mu)$).

Предполагается, что для каждой функции $x(\cdot) \in W$ известна функция $y(\cdot) \in L_p(T,\mu)$ такая, что $\|x(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_p(T,\mu)} \le \delta$, $\delta > 0$. Требуется по функции $y(\cdot)$ восстановить функцию $\Lambda x(\cdot)$. В качестве методов восстановления рассматриваются всевозможные отображения $m\colon L_p(T,\mu) \to L_q(T,\mu)$. Погрешностью метода m называется величина

$$e_{pqr}(m) = \sup_{\substack{x(\cdot)\in W,\ y(\cdot)\in L_p(T,\mu) \\ \|x(\cdot)-y(\cdot)\|_{L_p(T,\mu)}\le\delta}} \|\Lambda x(\cdot) - m(y)(\cdot)\|_{L_q(T,\mu)}.$$

Date: 28.06.2020.

Величина

$$E_{pqr} = \inf_{m\colon L_p(T,\mu)\to L_q(T,\mu)} e_{pqr}(m) \tag{1.1}$$

называется погрешностью оптимального восстановления, а метод, на котором достигается нижняя грань, называется оптимальным.

Рассматриваемая задача является частным случаем общей задачи восстановления линейного оператора Λ, действующего из линейного пространства X в линейное нормированное пространство Z, на множестве $W\subset X$ по значениям линейного оператора I, действующего из X в линейное нормированное пространство Y и заданного с некоторой погрешностью δ. В задаче (1.1) $X=\mathcal{W}$, $Z=L_q(T,\mu)$, $Y=L_p(T,\mu)$, а оператор $I\colon\mathcal{W}\to L_p(T,\mu)$ определен равенством $Ix(\cdot)=x(\cdot)$.

Первоначальная постановка общей задачи восстановления возникла как обобщение задачи А. Н. Колмогорова о наилучшей квадратурной формуле [1] и была поставлена С. А. Смоляком [2]. В этой постановке Λ — линейный функционал, оператор I состоит из конечного набора линейных функционалов, заданных точно ($\delta=0$), а в качестве методов восстановления, в отличие от задачи о наилучших квадратурных формулах, рассматривались всевозможные методы приближения (не обязательно линейные). С. А. Смоляк доказал, что для выпуклых и центрально-симметричных множеств W среди оптимальных методов существует линейный.

Н. С. Бахвалов предложил обобщить эту постановку на случай, когда информация о линейных функционалах известна не точно, а с некоторой погрешностью. Оказалось, что и в этом случае имеет место аналогичный результат [3].

Наиболее общий вид задача восстановления получила в работе [4], где уже речь шла о восстановлении линейного оператора в бесконечномерном случае. Вопросы существования линейного оптимального метода в случае восстановления линейного функционала рассматривались в работах [4]–[6]. Наиболее общий результат в этом направлении был получен в работе [7], а окончательный, в определенном смысле (критерий существования линейного оптимального метода), — в работе [8].

В отличие от восстановления линейных функционалов, в задаче восстановления линейных операторов может не существовать линейного оптимального метода. Соответствующий пример можно найти в работе [9]. В этой работе были сформулированы условия, при которых среди оптимальных методов существуют линейные и имеет место равенство погрешности оптимального восстановления значению двойственной экстремальной задачи

$$\sup\{\,\|\Lambda x\|_Z : x\in W,\quad \|Ix\|_Y\le\delta\,\}. \tag{1.2}$$

Величину (1.2) часто называют модулем непрерывности оператора Λ на классе W (относительно оператора I). Исследование этой величины играет важную роль при получении ряда точных неравенств типа неравенств Карлсона, неравенств для производных типа Ландау–Колмогорова, в задаче Стечкина и других. Само неравенство Карлсона оказалось тесно связанным с неравенствами для производных, например, неравенство Тайкова [10] может быть легко получено из обобщенного неравенства Карлсона (см. [11]), полученного В. И. Левиным [12] еще в 1948 году. Более подробные сведения о связи величины (1.2) с задачей Стечкина и с задачами восстановления можно найти в работах [13], [14].

Отметим еще цикл работ В. В. Арестова [15]–[18] для операторов дифференцирования на числовой оси, которые весьма близки к рассматриваемым в данной работе, а также подобные задачи с несколькими переменными [19], [20].

Способ построения оптимального метода восстановления для линейных операторов, предложенный в работе [9], применим только для случая, когда все метрики в задаче (1.1) евклидовы. Для неевклидовых метрик при условии совпадения любых двух из них в работе [21] был предложен метод, который используется и в данной работе. Он состоит из двух этапов. На первом этапе используется оценка снизу погрешности оптимального восстановления через значение экстремальной задачи (1.2). При этом для сокращения доказательств само решение задачи (1.2) нет необходимости приводить, так как поскольку оценка дается снизу, достаточно предъявить "правильно" выбранную допустимую функцию (хотя, как правило, эта "правильно" выбранная функцию находится в результате решения самой экстремальной задачи (1.2)). На втором этапе происходит оценка сверху. Для этого рассматривается метод, представляющий из себя оператор восстановления, который применялся бы при точной информации, и содержащий некоторый сглаживающий множитель. Далее, погрешность этого метод оценивается с помощью неравенства Коши–Буняковского или Гельдера с некоторыми весами. Затем подбираются веса и сглаживающий множитель так, чтобы оценка сверху совпала с оценкой снизу.

Ситуация, когда в задаче (1.1) все три параметра p, q и r различны, рассматривалась в работе [11]. Здесь схема построения оптимального метода восстановления тоже состоит из оценок снизу и сверху, но предварительно требуется более тонкое исследование функций Лагранжа для экстремальной задачи (1.2) и для экстремальной задачи, возникающей при нахождении погрешности оцениваемого метода восстановления. Этот подход, реализованный в работе [11], позволил не только найти оптимальный метод восстановления, но и получить точное неравенство типа Карлсона в достаточно общем виде. В случае однородных весов из полученного неравенства вытекает неравенство, найденное ранее в работе [22].

В данной работе решена задача (1.1) для однородных весов $\varphi(\cdot)$ и $\psi(\cdot)$ при $(p,q,r)\in P_1\cup P_2$, где

$$P_1=\{\,(p,q,r):1\le q=r<p<\infty\,\},\quad P_2=\{\,(p,q,r):1\le q=p<r<\infty\,\}.$$

Случай, когда $(p,q,r)\in P=\{\,(p,q,r)\,:\,1\le q<p,r<\infty\,\}$, был рассмотрен ранее в работе [21]. Основные результаты работы, опирающиеся на решение задачи (1.2), состоят в получении оптимальных методов восстановления в многомерном случае для линейных операторов, задаваемых в образах Фурье умножение на однородные веса, на классах функций, определяемых через операторы подобного типа, в метриках $L_2(\mathbb{R}^d)$ и $L_\infty(\mathbb{R}^d)$ по информации о неточно заданном преобразовании Фурье в $L_p(\mathbb{R}^d)$ (теоремы 3, 5). На основе этих общих результатов получены методы оптимального восстановления степеней оператора Лапласа $(-\Delta)^{k/2}$ и производных D^α порядка $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_d)\in\mathbb{R}^d_+$. Ранее подобные результаты были известны только для степеней оператора Лапласа при значениях $p=2,\infty$ в случае метрики $L_2(\mathbb{R}^d)$ ([25], [24]) и $p=\infty$ в случае метрики $L_\infty(\mathbb{R}^d)$ ([30]). В данной работе в первом случае получены результаты для $2<p<\infty$, а во втором — для $1\le p<\infty$.

2. Оптимальное восстановление с однородными весами при совпадении двух метрик

Будем использовать обозначение

$$a_+ = \begin{cases} a, & a \ge 0, \\ 0, & a < 0. \end{cases}$$

Нам потребуется следующий результат, доказанный в работе [21].

Теорема 1. 1. *Пусть* $(p,q,r) \in P_1$. *Если* $\widehat{\lambda}_2$ *является решением уравнения*

$$\left(\int_T \left(|\psi(t)|^q - \widehat{\lambda}_2|\varphi(t)|^q\right)_+^{\frac{p}{p-q}}\,d\mu(t)\right)^{1/p} = \delta\left(\int_T |\varphi(t)|^q\left(|\psi(t)|^q - \widehat{\lambda}_2|\varphi(t)|^q\right)_+^{\frac{q}{p-q}}\,d\mu(t)\right)^{1/q} > 0, \tag{2.1}$$

а

$$\widehat{\lambda}_1 = \frac{q}{p}\delta^{q-p}\left(\int_T \left(|\psi(t)|^q - \widehat{\lambda}_2|\varphi(t)|^q\right)_+^{\frac{p}{p-q}}\,d\mu(t)\right)^{\frac{p-q}{p}},$$

то

$$E_{pqq} = \left(\frac{p}{q}\widehat{\lambda}_1\delta^p + \widehat{\lambda}_2\right)^{1/q},$$

а метод

$$\widehat{m}(y)(t) = \left(1 - \widehat{\lambda}_2\frac{|\varphi(t)|^q}{|\psi(t)|^q}\right)_+\psi(t)y(t) \tag{2.2}$$

является оптимальным.

2. *Пусть* $(p,q,r) \in P_2$. *Если* $\widehat{\lambda}_1$ *является решением уравнения*

$$\left(\int_T |\varphi(t)|^{\frac{pr}{p-r}}\left(|\psi(t)|^p - \widehat{\lambda}_1\right)_+^{\frac{p}{r-p}}\,d\mu(t)\right)^{1/p} = \delta\left(\int_T |\varphi(t)|^{\frac{pr}{p-r}}\left(|\psi(t)|^p - \widehat{\lambda}_1\right)_+^{\frac{r}{r-p}}\,d\mu(t)\right)^{1/r} > 0, \tag{2.3}$$

а

$$\widehat{\lambda}_2 = \frac{p}{r}\delta^{p-r}\left(\int_T |\varphi(t)|^{\frac{pr}{p-r}}\left(|\psi(t)|^p - \widehat{\lambda}_1\right)_+^{\frac{p}{r-p}}\,d\mu(t)\right)^{\frac{r-p}{p}},$$

то

$$E_{ppr} = \left(\widehat{\lambda}_1\delta^p + \frac{r}{p}\widehat{\lambda}_2\right)^{1/p},$$

а метод

$$\widehat{m}(y)(t) = \alpha(t)\psi(t)y(t),$$

где

$$\alpha(t) = \min\left\{1, \frac{\widehat{\lambda}_1}{|\psi(t)|^p}\right\},$$

является оптимальным.

Применим этот результат к случаю, когда T — конус в линейном пространстве, $|\psi(\cdot)|$ и $|\varphi(\cdot)|$ — однородные функции порядков $k \ge 0$ и $n > 0$ (k и n — не обязательно целые), а $\mu(\cdot)$ — однородная мера порядка $d > 0$.

Следствие 1. 1. *Пусть* $(p,q,r)\in P_1$, $k\ge 0$, $n>k$ *и*

$$I_1=\int_T (|\psi(\xi)|^q-|\varphi(\xi)|^q)_+^{\frac{p}{p-q}}\,d\mu(\xi)<\infty,$$
$$I_2=\int_T |\varphi(\xi)|^q(|\psi(\xi)|^q-|\varphi(\xi)|^q)_+^{\frac{q}{p-q}}\,d\mu(\xi)<\infty.$$

Тогда

$$E_{pqq}=I_1^{-\frac{1}{p}\frac{n-k}{n+d(1/q-1/p)}}I_2^{-\frac{1}{q}\frac{k+d(1/q-1/p)}{n+d(1/q-1/p)}}(I_1+I_2)^{1/q}\delta^{\frac{n-k}{n+d(1/q-1/p)}},$$

а метод

$$\widehat{m}(y)(t)=\left(1-\left(\delta\frac{I_2^{1/q}}{I_1^{1/p}}\right)^{\frac{(n-k)q}{n+d(1/q-1/p)}}\frac{|\varphi(t)|^q}{|\psi(t)|^q}\right)_+\psi(t)y(t) \tag{2.4}$$

является оптимальным.

2. *Пусть* $(p,q,r)\in P_2$, $k>0$, $n>k+d(1/p-1/r)$ *и*

$$J_1=\int_T |\varphi(\xi)|^{\frac{pr}{p-r}}\,(|\psi(\xi)|^p-1)_+^{\frac{p}{r-p}}\;d\mu(\xi)<\infty,$$
$$J_2=\int_T |\varphi(\xi)|^{\frac{pr}{p-r}}\,(|\psi(\xi)|^p-1)_+^{\frac{r}{r-p}}\;d\mu(\xi)<\infty.$$

Тогда

$$E_{ppr}=J_1^{-\frac{1}{p}\frac{n-k-d(1/p-1/r)}{n-d(1/p-1/r)}}J_2^{-\frac{1}{r}\frac{k}{n-d(1/p-1/r)}}(J_1+J_2)^{1/p}\delta^{\frac{n-k-d(1/p-1/r)}{n-d(1/p-1/r)}},$$

а метод

$$\widehat{m}(y)(t)=\min\left\{1,\left(\frac{J_1^{1/p}}{\delta J_2^{1/r}}\right)^{\frac{kp}{n-d(1/p-1/r)}}\frac{1}{|\psi(t)|^p}\right\}\psi(t)y(t) \tag{2.5}$$

является оптимальным.

Доказательство. 1. Рассмотрим уравнение (2.1). Будем искать $\widehat{\lambda}_2$ в виде $\widehat{\lambda}_2=a^{(k-n)q}$, $a>0$. Сделав в уравнении (2.1) замену $t=a\xi$, получаем

$$a^{\frac{kq}{p-q}+\frac{d}{p}}I_1^{1/p}=\delta a^{n+\frac{kq}{p-q}+\frac{d}{q}}I_2^{1/q}.$$

Отсюда

$$a=\left(\frac{I_1^{1/p}}{\delta I_2^{1/q}}\right)^{\frac{1}{n+d(1/q-1/p)}}.$$

После той же замены имеем

$$\widehat{\lambda}_1=\frac{q}{p}\delta^{q-p}a^{q(k+d(1/q-1/p))}I_1^{\frac{p-q}{p}}.$$

Остается подставить полученные величины в выражения для погрешности оптимального восстановления и для оптимального метода.

2. Рассмотрим уравнение (2.3). Будем искать $\widehat{\lambda}_1$ в виде $\widehat{\lambda}_1=a^{kp}$, $a>0$. Сделав в уравнении (2.3) замену $t=a\xi$, получаем

$$a^{\frac{nr}{p-r}+\frac{d}{p}}J_1^{1/p}=\delta a^{\frac{np}{p-r}+\frac{d}{r}}J_2^{1/r}.$$

Отсюда

$$a=\left(\frac{J_1^{1/p}}{\delta J_2^{1/r}}\right)^{\frac{1}{n+d(1/r-1/p)}}.$$

После той же замены имеем

$$\widehat{\lambda}_2=\frac{p}{r}\delta^{p-r}a^{r(-n+kp/r+d(1/p-1/r))}J_1^{\frac{r-p}{p}}.$$

Подставляя полученные величины в выражения для погрешности оптимального восстановления и для оптимального метода, получаем доказываемое утверждение. □

3. Однородные веса в $\mathbb{R}^d$

Пусть T — конус в $\mathbb{R}^d$, $d\mu(t)=dt$, $|\psi(\cdot)|$ и $|\varphi(\cdot)|$ — однородные функции порядков $k\ge 0$ и $n>0$, $\varphi(t)\ne 0$ и $\psi(t)\ne 0$ для почти всех $t\in T$. Рассмотрим сферическую систему координат

$$\begin{aligned}
t_1&=\rho\cos\omega_1,\\
t_2&=\rho\sin\omega_1\cos\omega_2,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
t_{d-1}&=\rho\sin\omega_1\sin\omega_2\dots\sin\omega_{d-2}\cos\omega_{d-1},\\
t_d&=\rho\sin\omega_1\sin\omega_2\dots\sin\omega_{d-2}\sin\omega_{d-1}.
\end{aligned}$$

Положим $\omega=(\omega_1,\dots,\omega_{d-1})$,

$$\begin{aligned}
\widetilde{\psi}(\omega)&=\rho^{-k}|\psi(\rho\cos\omega_1,\dots,\rho\sin\omega_1\sin\omega_2\dots\sin\omega_{d-2}\sin\omega_{d-1})|,\\
\widetilde{\varphi}(\omega)&=\rho^{-n}|\varphi(\rho\cos\omega_1,\dots,\rho\sin\omega_1\sin\omega_2\dots\sin\omega_{d-2}\sin\omega_{d-1})|.
\end{aligned}\tag{3.1}$$

Обозначим через Ω область изменения ω, когда $t\in T$. Из того, что T — конус, следует, что Ω не зависит от ρ. Положим

$$J(\omega)=\sin^{d-2}\omega_1\sin^{d-3}\omega_2\dots\sin\omega_{d-2}.$$

Если $1\le q<p,r$ функция $\kappa^{r-q}(1-\kappa)^{-(p-q)}$ при $\kappa\in[0,1)$ монотонно возрастает от 0 до $+\infty$. Поэтому для всех $t\in T$ можно определить функцию $\kappa(t)$ равенством

$$\frac{\kappa^{r-q}(t)}{(1-\kappa(t))^{p-q}}=\frac{|\psi(t)|^{q(p-r)}}{|\varphi(t)|^{r(p-q)}}.$$

При $q=r$ положим

$$\kappa(t)=\left(1-\frac{|\varphi(t)|^q}{|\psi(t)|^q}\right)_+,$$

а при $q=p$

$$\kappa(t)=\min\left\{1,|\psi(t)|^{-p}\right\}.$$

Введем величину

$$\gamma=\frac{n-k-d(1/q-1/r)}{n+d(1/r-1/p)}.$$

Пусть $k>d(1/p-1/q)$ и $n>k+d(1/q-1/r)$. Тогда легко показать, что $\gamma\in(0,1)$. Определим число q^* в этом случае равенством

$$\frac{1}{q^*}=\frac{1}{q}-\frac{\gamma}{p}-\frac{1-\gamma}{r}.$$

Теорема 2. *Пусть* $k > d(1/p-1/q)$, $n > k+d(1/q-1/r)$ *и* $(p,q,r) \in P\cup P_1\cup P_2$. *Предположим, что*

$$I = \int_\Omega \frac{\widetilde{\psi}^{q^*}(\omega)}{\widetilde{\varphi}^{q^*(1-\gamma)}(\omega)} J(\omega)\,d\omega < \infty.$$

Тогда $E_{pqr} = C\delta^\gamma$, *где*

$$C = \gamma^{-\frac{\gamma}{p}}(1-\gamma)^{-\frac{1-\gamma}{r}} \left(\frac{B\left(q^*\gamma/p+1, q^*(1-\gamma)/r\right) I}{r(n-k-d(1/q-1/r))}\right)^{1/q^*},$$

а $B(\cdot,\cdot)$ — B*-функция Эйлера. Кроме того, метод*

$$\widehat{m}(y)(t) = \kappa\left(\xi_1^{\frac{1}{n+d(1/r-1/p)}} t\right)\psi(t)y(t),$$

где

$$\xi_1 = \delta\left(\gamma^{q-r}(1-\gamma)^{p-q}C^{(p-r)q}\right)^{\frac{q^*}{pqr}}$$

является оптимальным.

Доказательство. Случай, когда $(p,q,r) \in P$ доказан в работе [11, теорема 3] (в этой работе ответ дается в терминах B-функции с аргументами $q^*\gamma/p$ и $q^*(1-\gamma)/r$, но нам удобнее перейти к аргументам $q^*\gamma/p+1$ и $q^*(1-\gamma)/r$, что легко сделать, пользуясь свойствами B-функции). Остается рассмотреть два случая: $(p,q,r) \in P_1$ и $(p,q,r) \in P_2$.

1. Пусть $(p,q,r) \in P_1$. Воспользуемся следствием 1. Перейдем в интеграле I_1 к сферической системе координат

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{+\infty} \rho^{d-1}\,d\rho \int_\Omega \left(\rho^{kq}\widetilde{\psi}^q(\omega) - \rho^{nq}\widetilde{\varphi}^q(\omega)\right)_+^{\frac{p}{p-q}} J(\omega)\,d\omega \\ &= \int_\Omega \widetilde{\psi}^{\frac{qp}{p-q}}(\omega)J(\omega)\,d\omega \int_0^{+\infty} \rho^{\frac{kqp}{p-q}+d-1}\left(1-\rho^{(n-k)q}\frac{\widetilde{\varphi}^q(\omega)}{\widetilde{\psi}^q(\omega)}\right)_+^{\frac{p}{p-q}} d\rho. \end{aligned}$$

Зафиксируем ω и сделаем во втором интеграле замену

$$t = \rho^{(n-k)q}\frac{\widetilde{\varphi}^q(\omega)}{\widetilde{\psi}^q(\omega)}. \tag{3.2}$$

Тогда

$$\begin{aligned} I_1 = \frac{1}{(n-k)q}\int_\Omega \widetilde{\psi}^{\frac{qp}{p-q}}(\omega)\left(\frac{\widetilde{\psi}(\omega)}{\widetilde{\varphi}(\omega)}\right)^{\frac{kqp}{(p-q)(n-k)}+\frac{d}{n-k}} J(\omega)\,d\omega \\ \times \int_0^1 t^{\frac{kp}{(p-q)(n-k)}+\frac{d}{(n-k)q}-1}(1-t)^{\frac{p}{p-q}}\,dt = \frac{I}{(n-k)q}B\left(q^*\gamma/p+2, q^*(1-\gamma)/q\right). \end{aligned}$$

Проведем аналогичные вычисления для I_2

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^{+\infty} \rho^{nq+d-1}\,d\rho \int_\Omega \widetilde{\varphi}^q(\omega)\left(\rho^{kq}\widetilde{\psi}^q(\omega) - \rho^{nq}\widetilde{\varphi}^q(\omega)\right)_+^{\frac{q}{p-q}} J(\omega)\,d\omega \\ &= \int_\Omega \widetilde{\varphi}^q(\omega)\widetilde{\psi}^{\frac{q^2}{p-q}}(\omega)J(\omega)\,d\omega \int_0^{+\infty} \rho^{nq+\frac{kq^2}{p-q}+d-1}\left(1-\rho^{(n-k)q}\frac{\widetilde{\varphi}^q(\omega)}{\widetilde{\psi}^q(\omega)}\right)_+^{\frac{q}{p-q}} d\rho. \end{aligned}$$

Сделав ту же замену (3.2), получим

$$I_2=\frac{1}{(n-k)q}\int_\Omega \widetilde{\varphi}^q(\omega)\widetilde{\psi}^{\frac{q^2}{p-q}}(\omega)\left(\frac{\widetilde{\psi}(\omega)}{\widetilde{\varphi}(\omega)}\right)^{\frac{nq}{n-k}+\frac{kq^2}{(p-q)(n-k)}+\frac{d}{n-k}}J(\omega)\,d\omega$$
$$\times\int_0^1 t^{\frac{n}{n-k}+\frac{kq}{(p-q)(n-k)}+\frac{d}{(n-k)q}-1}(1-t)^{\frac{q}{p-q}}\,dt$$
$$=\frac{I}{(n-k)q}B\left(q^*\gamma/p+1,q^*(1-\gamma)/q+1\right).$$

Положим

$$B_1=B\left(q^*\gamma/p+1,q^*(1-\gamma)/r\right).$$

Тогда, пользуясь свойствами B-функции, будем иметь

$$I_1=\frac{q^*\gamma/p+1}{q(n-k)(q^*\gamma/p+1+q^*(1-\gamma)/q)}B_1I,$$
$$I_2=\frac{q^*(1-\gamma)/q}{q(n-k)(q^*\gamma/p+1+q^*(1-\gamma)/q)}B_1I.$$

В рассматриваемом случае (когда $r=q$)

$$\frac{1}{q^*}=\gamma\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right),\quad \gamma=\frac{n-k}{n+d(1/q-1/p)}.$$

Поэтому $q^*\gamma/p+1=q^*\gamma/q$. Отсюда

$$I_1=\gamma\frac{B_1I}{q(n-k)},\quad I_2=(1-\gamma)\frac{B_1I}{q(n-k)}.$$

Из следствия 1 получаем

$$E_{pqq}=I_1^{-\frac{\gamma}{p}}I_2^{-\frac{1-\gamma}{q}}(I_1+I_2)^{1/q}\delta^\gamma$$
$$=\gamma^{-\frac{\gamma}{p}}(1-\gamma)^{-\frac{1-\gamma}{q}}\left(\frac{B_1I}{q(n-k)}\right)^{\gamma(1/q-1/p)}\delta^\gamma=C\delta^\gamma.$$

Метод (2.4) может быть записан в виде

$$\widehat{m}(y)(t)=\kappa\left(b^{\frac{1}{n+d(1/r-1/p)}}t\right)\psi(t)y(t),$$

где

$$b=\delta\frac{I_2^{1/q}}{I_1^{1/p}}=\delta\gamma^{-\frac{1}{p}}(1-\gamma)^{\frac{1}{q}}\left(\frac{B_1I}{q(n-k)}\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}=\delta\gamma^{-\frac{1}{p}}(1-\gamma)^{\frac{1}{q}}C^{\frac{1}{\gamma}}\gamma^{\frac{1}{p}}(1-\gamma)^{\frac{1-\gamma}{q\gamma}}$$
$$=\delta(1-\gamma)^{\frac{1}{q\gamma}}C^{\frac{1}{\gamma}}=\delta\left((1-\gamma)C^q\right)^{\frac{1}{q\gamma}}=\delta\left((1-\gamma)C^q\right)^{\frac{q^*}{q}\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)}$$
$$=\delta\left((1-\gamma)C^q\right)^{\frac{q^*(p-q)}{pq^2}}=\xi_1.$$

2. Пусть $(p,q,r)\in P_2$. Воспользуемся снова следствием 1. Перейдем в интеграле J_1 к сферической системе координат

$$J_1=\int_0^{+\infty}\rho^{d-1}\,d\rho\int_\Omega \rho^{\frac{npr}{p-r}}\widetilde{\varphi}^{\frac{pr}{p-r}}(\omega)\left(\rho^{kp}\widetilde{\psi}^p(\omega)-1\right)_+^{\frac{p}{r-p}}J(\omega)\,d\omega$$
$$=\int_\Omega \widetilde{\varphi}^{\frac{pr}{p-r}}(\omega)J(\omega)\,d\omega\int_0^{+\infty}\rho^{\frac{npr}{p-r}+d-1}\left(\rho^{kp}\widetilde{\psi}^p(\omega)-1\right)_+^{\frac{p}{r-p}}\,d\rho.$$

Зафиксируем ω и сделаем во втором интеграле замену

$$t=\rho^{kp}\widetilde{\psi}^p(\omega). \tag{3.3}$$

Тогда

$$J_1=\frac{1}{kp}\int_\Omega \widetilde{\varphi}^{\frac{pr}{p-r}}(\omega)\widetilde{\psi}^{-\frac{npr}{(p-r)k}-\frac{d}{k}}(\omega)J(\omega)\,d\omega\int_1^{+\infty}t^{\frac{nr}{(p-r)k}+\frac{d}{kp}-1}(t-1)^{\frac{p}{r-p}}\,dt$$
$$=\frac{I}{kp}\int_0^1 s^{\frac{nr}{(r-p)k}-\frac{p}{r-p}-\frac{d}{kp}-1}(1-s)^{\frac{p}{r-p}}\,ds=\frac{I}{kp}B\left(q^*\gamma/p+1,q^*(1-\gamma)/r+1\right).$$

Проведем аналогичные вычисления для J_2

$$J_2=\int_0^{+\infty}\rho^{d-1}\,d\rho\int_\Omega \rho^{\frac{npr}{p-r}}\widetilde{\varphi}^{\frac{pr}{p-r}}(\omega)\left(\rho^{kp}\widetilde{\psi}^p(\omega)-1\right)_+^{\frac{r}{r-p}}J(\omega)\,d\omega$$
$$=\int_\Omega \widetilde{\varphi}^{\frac{pr}{p-r}}(\omega)J(\omega)\,d\omega\int_0^{+\infty}\rho^{\frac{npr}{p-r}+d-1}\left(\rho^{kp}\widetilde{\psi}^p(\omega)-1\right)_+^{\frac{r}{r-p}}\,d\rho.$$

Сделав ту же замену (3.3), получим

$$J_2=\frac{1}{kp}\int_\Omega \widetilde{\varphi}^{\frac{pr}{p-r}}(\omega)\widetilde{\psi}^{-\frac{npr}{(p-r)k}-\frac{d}{k}}(\omega)J(\omega)\,d\omega\int_1^{+\infty}t^{\frac{nr}{(p-r)k}+\frac{d}{kp}-1}(t-1)^{\frac{r}{r-p}}\,dt$$
$$=\frac{I}{kp}\int_0^1 s^{\frac{nr}{(r-p)k}-\frac{r}{r-p}-\frac{d}{kp}-1}(1-s)^{\frac{r}{r-p}}\,ds=\frac{I}{kp}B\left(q^*\gamma/p,q^*(1-\gamma)/r+2\right).$$

Положим

$$B_2=B\left(q^*\gamma/p,q^*(1-\gamma)/r+1\right).$$

Тогда, пользуясь свойствами B-функции, будем иметь

$$J_1=\frac{q^*\gamma/p}{kp(q^*\gamma/p+q^*(1-\gamma)/r+1)}B_2I,$$
$$J_2=\frac{q^*(1-\gamma)/r+1}{kp(q^*\gamma/p+q^*(1-\gamma)/r+1)}B_2I.$$

В рассматриваемом случае (когда $q=p$)

$$\frac{1}{q^*}=(1-\gamma)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right),\quad \gamma=\frac{n-k-d(1/p-1/r)}{n-d(1/p-1/r)}.$$

Поэтому $q^*(1-\gamma)/r+1=q^*(1-\gamma)/p$. Отсюда

$$J_1=\gamma\frac{B_2I}{kp},\quad J_2=(1-\gamma)\frac{B_2I}{kp}.$$

Из следствия 1 получаем

$$E_{ppr}=J_1^{-\frac{\gamma}{p}}J_2^{-\frac{1-\gamma}{r}}(J_1+J_2)^{1/p}\delta^\gamma=\gamma^{-\frac{\gamma}{p}}(1-\gamma)^{-\frac{1-\gamma}{r}}\left(\frac{B_2I}{kp}\right)^{(1-\gamma)(1/p-1/r)}\delta^\gamma.$$

Из свойств B-функции вытекает, что

$$B_2=\frac{q^*(1-\gamma)/r}{q^*\gamma/p}B_1=\frac{kpB_1}{r(n-k-d(1/q-1/r))}.$$

Следовательно,

$$E_{ppr}=\gamma^{-\frac{\gamma}{p}}(1-\gamma)^{-\frac{1-\gamma}{r}}\left(\frac{B_1I}{r(n-k-d(1/q-1/r))}\right)^{1/q^*}\delta^\gamma=C\delta^\gamma.$$

Метод (2.5) может быть записан в виде

$$\widehat{m}(y)(t)=\kappa\left(c^{\frac{1}{n-d(1/p-1/r)}}t\right)\psi(t)y(t),$$

где

$$c=\delta\frac{J_2^{1/r}}{J_1^{1/p}}=\delta\gamma^{-\frac{1}{p}}(1-\gamma)^{\frac{1}{r}}\left(\frac{B_2I}{kp}\right)^{\frac{1}{r}-\frac{1}{p}}=\delta\gamma^{-\frac{1}{p}}(1-\gamma)^{\frac{1}{r}}C^{-\frac{1}{1-\gamma}}\gamma^{-\frac{\gamma}{p(1-\gamma)}}(1-\gamma)^{-\frac{1}{r}}$$
$$=\delta\gamma^{-\frac{1}{p(1-\gamma)}}C^{-\frac{1}{1-\gamma}}=\delta\left(\gamma C^p\right)^{-\frac{1}{p(1-\gamma)}}=\delta\left(\gamma C^p\right)^{(p-r)\frac{q^*}{p^2r}}=\xi_1.$$

□

Из работ [21], [11] вытекает, что во всех рассмотренных случаях справедливо равенство

$$E_{pqr}=\sup_{\substack{x(\cdot)\in W\\ \|x(\cdot)\|_{L_p(T,\mu)}\le\delta}}\|\Lambda x(\cdot)\|_{L_q(T,\mu)}. \tag{3.4}$$

Отсюда легко получить, что имеет место точное неравенство

$$\|\Lambda x(\cdot)\|_{L_q(T,\mu)}\le C\|x(\cdot)\|^\gamma_{L_p(T,\mu)}\|\varphi(\cdot)x(\cdot)\|^{1-\gamma}_{L_r(T,\mu)}.$$

4. Восстановление дифференциальных операторов по неточно заданному преобразованию Фурье

Пусть $T=\mathbb{R}^d$, $d\mu(t)=dt$, $|\psi(\cdot)|$ и $|\varphi(\cdot)|$, как и ранее, — однородные функции порядков $k\ge0$ и $n>0$, $\varphi(t)\ne0$ и $\psi(t)\ne0$ для почти всех $t\in\mathbb{R}^d$. Положим

$$X_p=\{\,x(\cdot)\in L_2(\mathbb{R}^d):\varphi(\cdot)Fx(\cdot)\in L_2(\mathbb{R}^d),\ Fx(\cdot)\in L_p(\mathbb{R}^d)\,\},$$

где $Fx(\cdot)$ — преобразование Фурье $x(\cdot)$

$$Fx(\xi)=\int_{\mathbb{R}^d}x(t)e^{-i\langle\xi,t\rangle}\,dt,\quad \langle\xi,t\rangle=\xi_1t_1+\ldots\xi_dt_d.$$

Определим оператор D следующим образом

$$Dx(\cdot)=F^{-1}(\varphi(\cdot)Fx(\cdot))(\cdot).$$

Предположим, что $\psi(\cdot)x(\cdot)\in L_2(\mathbb{R}^d)$ для всех $x(\cdot)\in X_p$. Положим

$$\Lambda x(\cdot)=F^{-1}(\psi(\cdot)Fx(\cdot))(\cdot).$$

Рассмотрим задачу об оптимальном восстановлении значений оператора Λ по неточно заданному преобразованию Фурье функции $x(\cdot)$ на классе

$$W_p=\{\,x(\cdot)\in X_p:\|Dx(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\le1\,\}.$$

Будем считать, что для каждой функции $x(\cdot)\in W_p$ известна функция $y(\cdot)\in L_p(\mathbb{R}^d)$ такая, что $\|Fx(\cdot)-y(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}\le\delta$, $\delta>0$. Требуется по функции

$y(\cdot)$ восстановить функцию $\Lambda x(\cdot)$. Предположим, что $\Lambda x(\cdot) \in L_q(\mathbb{R}^d)$ для всех $x(\cdot) \in X_p$. В качестве методов восстановления рассматриваются всевозможные отображения $m\colon L_p(\mathbb{R}^d) \to L_q(\mathbb{R}^d)$. Погрешностью метода m называется величина

$$e_{pq}(\Lambda, D, m) = \sup_{\substack{x(\cdot)\in W_p,\ y(\cdot)\in L_p(\mathbb{R}^d)\\ \|Fx(\cdot)-y(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}\le\delta}} \|\Lambda x(\cdot) - m(y)(\cdot)\|_{L_q(\mathbb{R}^d)}.$$

Величина

$$E_{pq}(\Lambda, D) = \inf_{m\colon L_p(\mathbb{R}^d)\to L_q(\mathbb{R}^d)} e_{pq}(\Lambda, D, m) \tag{4.1}$$

называется погрешностью оптимального восстановления, а метод, на котором достигается нижняя грань, называется оптимальным.

4.1. **Восстановление в метрике $L_2(\mathbb{R}^d)$.** В силу теоремы Планшереля

$$\|\Lambda x(\cdot) - m(y)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\|\widetilde{\Lambda}x(\cdot) - F(m(y))(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)},$$

где

$$\widetilde{\Lambda}x(\cdot) = \psi(\cdot)Fx(\cdot).$$

Кроме того,

$$\|Dx(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\|\varphi(\cdot)Fx(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

Таким образом, рассматриваемая задача с точностью до множителя $(2\pi)^{-d/2}$ совпадает с задачей (1.1) при $q = r = 2$ с заменой $\varphi(\cdot)$ на $(2\pi)^{-d/2}\varphi(\cdot)$.

Положим

$$\widetilde{\gamma} = \frac{n-k}{n + d(1/2 - 1/p)}, \quad \widetilde{q} = \frac{1}{\widetilde{\gamma}(1/2 - 1/p)},$$

$$C_p(n,k) = \widetilde{\gamma}^{-\frac{\widetilde{\gamma}}{p}}(1-\widetilde{\gamma})^{-\frac{1-\widetilde{\gamma}}{2}}\left(\frac{B\left(\widetilde{q}\widetilde{\gamma}/p + 1, \widetilde{q}(1-\widetilde{\gamma})/2\right)}{2(n-k)}\right)^{1/\widetilde{q}}.$$

Теорема 3. *Пусть $k \ge 0$, $n > k$, $2 < p \le \infty$,*

$$I = \int_{\Pi_{d-1}} \frac{\widetilde{\psi}^{\widetilde{q}}(\omega)}{\widetilde{\varphi}^{\widetilde{q}(1-\widetilde{\gamma})}(\omega)} J(\omega)\, d\omega < \infty, \quad \Pi_{d-1} = [0,\pi]^{d-2}\times[0,2\pi].$$

Тогда

$$E_{p2}(\Lambda, D) = \frac{1}{(2\pi)^{d\widetilde{\gamma}/2}} C_p(n,k) I^{1/\widetilde{q}}\delta^{\widetilde{\gamma}}.$$

Метод

$$\widehat{m}(y)(\cdot) = F^{-1}\left(\left(1 - \beta\left|\frac{\varphi(\xi)}{\psi(\xi)}\right|^2\right)_+ \psi(\xi)y(\xi)\right)(\cdot), \tag{4.2}$$

где

$$\beta = \frac{k + d(1/2 - 1/p)}{n + d(1/2 - 1/p)} C_p^2(n,k)\left(\frac{\delta I^{1/2-1/p}}{(2\pi)^{d/2}}\right)^{\frac{2(n-k)}{n+d(1/2-1/p)}},$$

является оптимальным.

Доказательство. Случай $2 < p < \infty$ вытекает из теоремы 2. Рассмотрим случай $p = \infty$. Из хорошо известной оценки снизу (см., например, [21]) имеем

$$E_{\infty 2}(\Lambda, D) \geq \sup_{\substack{x(\cdot)\in W_\infty \\ \|Fx(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)}\leq\delta}} \|\Lambda x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \tag{4.3}$$

Определим $\widehat{x}(\cdot)$ так, чтобы

$$F\widehat{x}(\xi) = \begin{cases} \delta, & |\psi(\xi)| > \lambda|\varphi(\xi)|, \\ 0, & |\psi(\xi)| \leq \lambda|\varphi(\xi)|, \end{cases}$$

где $\lambda > 0$ выбрано из условия

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(\xi)|^2|F\widehat{x}(\xi)|^2\,d\xi = 1.$$

Тем самым $\lambda > 0$ надо выбрать из условия

$$\delta^2\int_{|\psi(\xi)|>\lambda|\varphi(\xi)|} |\varphi(\xi)|^2\,d\xi = (2\pi)^d.$$

Переходя к сферической системе координат, получаем

$$\delta^2\int_{\Pi_{d-1}} \widetilde{\varphi}^2(\omega)J(\omega)\,d\omega\int_0^{\Phi_1(\omega)} \rho^{2n+d-1}\,d\rho = (2\pi)^d,$$

где

$$\Phi_1(\omega) = \left(\frac{\widetilde{\psi}(\omega)}{\lambda\widetilde{\varphi}(\omega)}\right)^{\frac{1}{n-k}}.$$

Отсюда

$$\frac{\delta^2}{2n+d}\lambda^{-\frac{2n+d}{n-k}}I = (2\pi)^d.$$

Следовательно,

$$\lambda = \left(\frac{\delta^2 I}{(2\pi)^d(2n+d)}\right)^{\frac{n-k}{2n+d}}.$$

Нетрудно убедиться, что

$$C_\infty^2(n,k) = \frac{1}{2k+d}(2n+d)^{\frac{k+d/2}{n+d/2}}.$$

Поэтому $\lambda^2 = \beta$. Итак, в силу (4.3)

$$\begin{aligned} E_{\infty 2}^2(\Lambda, D) \geq \|\Lambda\widehat{x}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 &= \frac{\delta^2}{(2\pi)^d}\int_{|\psi(\xi)|>\lambda|\varphi(\xi)|} |\psi(\xi)|^2\,d\xi \\ &= \frac{\delta^2}{(2\pi)^d}\int_{\Pi_{d-1}} \widetilde{\psi}^2(\omega)J(\omega)\,d\omega\int_0^{\Phi_1(\omega)} \rho^{2k+d-1}\,d\rho \\ &= \frac{\delta^2}{(2k+d)(2\pi)^d}\lambda^{-\frac{2k+d}{n-k}}I = \frac{1}{(2\pi)^{d\widetilde{\gamma}}}C_\infty^2(n,k)I^{2/\widetilde{q}}\delta^{2\widetilde{\gamma}}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Оценим погрешность метода (4.2). Положим

$$a(\xi) = \left(1 - \beta\frac{|\varphi(\xi)|^2}{|\psi(\xi)|^2}\right)_+.$$

Переходя к преобразованию Фурье, получаем

$$\|\Lambda x(\cdot)-\widehat{m}(y)(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}=\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}|\psi(\xi)|^2\left|Fx(\xi)-a(\xi)y(\xi)\right|^2\,d\xi.$$

Положим $z(\cdot)=Fx(\cdot)-y(\cdot)$ и будем учитывать, что

$$\|z(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)}\le\delta,\quad \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}|\varphi(\xi)|^2|Fx(\xi)|^2\,d\xi\le 1.$$

Тогда

$$\|\Lambda x(\cdot)-\widehat{m}(y)(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}=\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}|\psi(\xi)|^2\left|(1-a(\xi))\,Fx(\xi)+a(\xi)z(\xi)\right|^2\,d\xi.$$

Запишем подынтегральное выражение в виде

$$\left|\frac{|\psi(\xi)|(1-a(\xi))\sqrt{\beta}|\varphi(\xi)|Fx(\xi)}{\sqrt{\beta}|\varphi(\xi)|}+\sqrt{a(\xi)}\sqrt{a(\xi)}|\psi(\xi)|z(\xi)\right|^2.$$

Воспользуемся неравенством Коши–Буняковского

$$|ab+cd|^2\le(|a|^2+|c|^2)(|b|^2+|d|^2).$$

Получаем следующую оценку

$$\begin{aligned}&\|\Lambda x(\cdot)-\widehat{m}(y)(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}\\&\qquad\le\operatorname*{vraisup}_{\xi\in\mathbb{R}^d}S(\xi)\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}\left(\beta|\varphi(\xi)|^2|Fx(\xi)|^2+a(\xi)|\psi(\xi)|^2|z(\xi)|^2\right)\,d\xi,\end{aligned}$$

где

$$S(\xi)=\frac{|\psi(\xi)|^2|(1-a(\xi))^2}{\beta|\varphi(\xi)|^2}+a(\xi).$$

Если $|\psi(\xi)|^2\le\beta|\varphi(\xi)|^2$, то $a(\xi)=0$ и $S(\xi)\le 1$. Если $|\psi(\xi)|^2>\beta|\varphi(\xi)|^2$, то $S(\xi)=1$. Таким образом,

$$\begin{aligned}e^2_{\infty 2}(\Lambda,D,\widehat{m})&\le\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}\left(\beta|\varphi(\xi)|^2|Fx(\xi)|^2+a(\xi)|\psi(\xi)|^2|z(\xi)|^2\right)\,d\xi\\&\le\beta+\frac{\delta^2}{(2\pi)^d}\int_{|\psi(\xi)|>\lambda|\varphi(\xi)|}\left(|\psi(\xi)|^2-\beta|\varphi(\xi)|^2\right)\,d\xi\\&=\beta+\frac{\delta^2}{(2\pi)^d}\int_{|\psi(\xi)|>\lambda|\varphi(\xi)|}|\psi(\xi)|^2\,d\xi-\beta\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}|\varphi(\xi)|^2|F\widehat{x}(\xi)|^2\,d\xi\\&=\frac{\delta^2}{(2\pi)^d}\int_{|\psi(\xi)|>\lambda|\varphi(\xi)|}|\psi(\xi)|^2\,d\xi\le E^2_{\infty 2}(\Lambda,D).\end{aligned}$$

Отсюда следует, что метод $\widehat{m}(y)(\cdot)$ является оптимальным и (с учетом (4.4))

$$E^2_{\infty 2}(\Lambda,D)=\frac{\delta^2}{(2\pi)^d}\int_{|\psi(\xi)|>\lambda|\varphi(\xi)|}|\psi(\xi)|^2\,d\xi=\frac{1}{(2\pi)^{d\widetilde{\gamma}}}C^2_\infty(n,k)I^{2/\widetilde{q}}\delta^{2\widetilde{\gamma}}.$$

□

При $d=1$ (в этом случае $I=2$), $D=\dfrac{d^n}{dt^n}$ и $\Lambda=\dfrac{d^k}{dt^k}$ утверждение теоремы 3 было получено в работе [23].

Определим оператор $(-\Delta)^{n/2}$, $n\ge 0$, следующим образом

$$(-\Delta)^{n/2}x(\cdot)=F^{-1}(|\xi|^nFx(\xi))(\cdot),\quad |\xi|=\sqrt{\xi_1^2+\ldots+\xi_d^2}.$$

Положим

$$I_0 = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}. \tag{4.5}$$

Следствие 2. *Пусть $k \ge 0$, $n > k$, $2 < p \le \infty$. Тогда*

$$E_{p2}((-\Delta)^{k/2}, (-\Delta)^{n/2}) = \frac{1}{(2\pi)^{d\widetilde{\gamma}/2}} C_p(n,k) I_0^{1/\widetilde{q}} \delta^{\widetilde{\gamma}}.$$

Метод

$$\widehat{m}(y)(\cdot) = F^{-1}\left(\left(1 - \beta|\xi|^{2(n-k)}\right)_+ |\xi|^k y(\xi)\right)(\cdot), \tag{4.6}$$

где

$$\beta = \frac{k + d(1/2 - 1/p)}{n + d(1/2 - 1/p)} C_p^2(n,k) \left(\frac{\delta I_0^{1/2-1/p}}{(2\pi)^{d/2}}\right)^{\frac{2(n-k)}{n+d(1/2-1/p)}},$$

является оптимальным.

Доказательство. В силу того, что в рассматриваемом случае $\widetilde{\psi}(\omega) = \widetilde{\varphi}(\omega) = 1$, имеем

$$I = \int_{\Pi_{d-1}} J(\omega)\, d\omega = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} = I_0.$$

Далее, применяется теорема 3. □

При $p = \infty$ утверждение следствия было получено в работе [24].

Выражение для $E_{22}((-\Delta)^{k/2}, (-\Delta)^{n/2})$ и соответствующий оптимальный метод были получены в работе [25].

Отметим, что оптимальный метод (4.6) использует информацию о неточном преобразовании Фурье функции $x(\cdot)$, измеренном только в шаре

$$|\xi| < \beta^{-\frac{1}{2(n-k)}}.$$

Причем, чем с большей погрешностью δ известна исходная информация, тем меньше шар, где содержится “полезная” информация.

Рассмотрим еще один пример. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{R}_+^d$. Определим оператор D^α (производная порядка α) следующим образом

$$D^\alpha x(\cdot) = F^{-1}((i\xi)^\alpha Fx(\xi))(\cdot),$$

где $(i\xi)^\alpha = (i\xi_1)^{\alpha_1} \dots (i\xi_d)^{\alpha_d}$. Функция $|(i\xi)^\alpha|$ является однородной функцией порядка $k = \alpha_1 + \dots + \alpha_d$. Рассмотрим задачу (4.1) при $\Lambda = D^\alpha$ и $D = (-\Delta)^{n/2}$.

Следствие 3. *Пусть $n > k$, $2 < p \le \infty$. Тогда*

$$E_{p2}(D^\alpha, (-\Delta)^{n/2}) = \frac{1}{(2\pi)^{d\widetilde{\gamma}/2}} C_p(n,k) I^{1/\widetilde{q}} \delta^{\widetilde{\gamma}},$$

где

$$I = 2\frac{\Gamma((\alpha_1\widetilde{q} + 1)/2) \dots \Gamma((\alpha_d\widetilde{q} + 1)/2)}{\Gamma((k\widetilde{q} + d)/2)}.$$

Метод

$$\widehat{m}(y)(\cdot) = F^{-1}\left(\left(1 - \beta\frac{|\xi|^{2n}}{|\xi^{2\alpha}|}\right)_+ (i\xi)^\alpha y(\xi)\right)(\cdot), \tag{4.7}$$

где

$$\beta = \frac{k + d(1/2 - 1/p)}{n + d(1/2 - 1/p)} C_p^2(n,k) \left(\frac{\delta I^{1/2-1/p}}{(2\pi)^{d/2}} \right)^{\frac{2(n-k)}{n+d(1/2-1/p)}},$$

является оптимальным.

Доказательство. По известной формуле Дирихле

$$\int_{\substack{\xi_1 \geq 0, \ldots, \xi_d \geq 0 \\ \xi_1^2 + \ldots + \xi_d^2 \leq 1}} \xi_1^{p_1 - 1} \ldots \xi_d^{p_d - 1} \, d\xi_1 \ldots d\xi_d = \frac{\Gamma(p_1/2) \ldots \Gamma(p_d/2)}{2^d \Gamma(p_1/2 + \ldots + p_d/2 + 1)},$$

$p_1, \ldots, p_d > 0$. Следовательно,

$$\int_{\xi_1^2 + \ldots + \xi_d^2 \leq 1} |\xi_1|^{p_1 - 1} \ldots |\xi_d|^{p_d - 1} \, d\xi_1 \ldots d\xi_d = \frac{\Gamma(p_1/2) \ldots \Gamma(p_d/2)}{\Gamma(p_1/2 + \ldots + p_d/2 + 1)}.$$

Перейдем к сферическим координатам

$$\int_{\Pi_{d-1}} \Phi(\omega, p_1, \ldots, p_d) J(\omega) \, d\omega \int_0^1 \rho^{p_1 + \ldots + p_d - 1} \, d\rho = \frac{\Gamma(p_1/2) \ldots \Gamma(p_d/2)}{\Gamma(p_1/2 + \ldots + p_d/2 + 1)},$$

где

$$\Phi(\omega, p_1, \ldots, p_d) = |\cos \omega_1|^{p_1 - 1} \ldots |\sin \omega_1 \sin \omega_2 \cdots \sin \omega_{d-2} \sin \omega_{d-1}|^{p_d - 1}.$$

Отсюда

$$\int_{\Pi_{d-1}} \Phi(\omega, p_1, \ldots, p_d) J(\omega) \, d\omega = 2 \frac{\Gamma(p_1/2) \ldots \Gamma(p_d/2)}{\Gamma(p_1/2 + \ldots + p_d/2)}.$$

Таким образом, для величины I из теоремы 3 имеем

$$(4.8) \quad I = \int_{\Pi_{d-1}} |\cos \omega_1|^{\alpha_1 \widetilde{q}} \ldots |\sin \omega_1 \sin \omega_2 \ldots \sin \omega_{d-2} \sin \omega_{d-1}|^{\alpha_d \widetilde{q}} J(\omega) \, d\omega$$

$$= \int_{\Pi_{d-1}} \Phi(\omega, \alpha_1 \widetilde{q} + 1, \ldots, \alpha_d \widetilde{q} + 1) J(\omega) \, d\omega = 2 \frac{\Gamma((\alpha_1 \widetilde{q} + 1)/2) \ldots \Gamma((\alpha_d \widetilde{q} + 1)/2)}{\Gamma((k\widetilde{q} + d)/2)}.$$

Теперь утверждение следствия вытекает из теоремы 3.

□

Рассмотрим случай $p = 2$. Он довольно близок к исследованиям, проведенным в работах [26], [27], хотя класс, на котором восстанавливался оператор D^α, здесь другой.

Теорема 4. *Пусть* $n > k > 0$. *Тогда*

$$(4.9) \qquad E_{22}(D^\alpha, (-\Delta)^{n/2}) = \frac{\alpha^{\alpha/2}}{k^{k/2}} \left(\frac{\delta}{(2\pi)^{d/2}} \right)^{1 - k/n},$$

а все методы

$$(4.10) \qquad \widehat{m}(y)(\cdot) = F^{-1}(a(\xi)(i\xi)^\alpha y(\xi))(\cdot),$$

где $a(\cdot)$ — *измеримые функции, удовлетворяющие условию*

$$(4.11) \qquad |\xi^{2\alpha}| \left(\frac{|1 - a(\xi)|^2}{\lambda_2 |\xi|^{2n}} + \frac{|a(\xi)|^2}{(2\pi)^d \lambda_1} \right) \leq 1,$$

в котором

$$\lambda_1 = \frac{\alpha^\alpha (n-k)}{(2\pi)^d k^k n} \left(\frac{\delta^2}{(2\pi)^d} \right)^{-k/n}, \quad \lambda_2 = \lambda_1 \frac{k}{n-k} \delta^2,$$

являются оптимальными.

Доказательство. Положим для $\varepsilon > 0$

$$\widehat{\xi} = \frac{1}{\sqrt{k}}\left(\frac{(2\pi)^d}{\delta^2}\right)^{\frac{1}{2n}}(\sqrt{\alpha_1},\ldots,\sqrt{\alpha_d}), \quad \widehat{\xi}_\varepsilon = \widehat{\xi}\left(1 - \frac{\varepsilon}{|\widehat{\xi}|}\right),$$

$$B_\varepsilon = \{\xi \in \mathbb{R}^d : |\xi - \widehat{\xi}_\varepsilon| < \varepsilon\}.$$

Определим функцию $x_\varepsilon(\cdot)$ так, чтобы

$$Fx_\varepsilon(\xi) = \begin{cases} \dfrac{\delta}{\sqrt{\operatorname{mes} B_\varepsilon}}, & \xi \in B_\varepsilon, \\ 0, & \xi \notin B_\varepsilon. \end{cases}$$

Тогда $\|Fx_\varepsilon(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} = \delta^2$,

$$\|(-\Delta)^{n/2}x_\varepsilon(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} = \frac{\delta^2}{(2\pi)^d \operatorname{mes} B_\varepsilon}\int_{B_\varepsilon}|\xi|^{2n}\,d\xi \le \frac{\delta^2}{(2\pi)^d}|\widehat{\xi}|^{2n} = 1.$$

Пользуясь оценкой, аналогичной (4.3), получаем

$$E^2_{22}(D^\alpha, (-\Delta)^{n/2}) \ge \sup_{\substack{\|(-\Delta)^{n/2}x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \le 1 \\ \|Fx(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \le \delta}} \|D^\alpha x(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}$$

$$\ge \|D^\alpha x_\varepsilon(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} = \frac{\delta^2}{(2\pi)^d \operatorname{mes} B_\varepsilon}\int_{B_\varepsilon}|\xi^{2\alpha}|\,d\xi = \frac{\delta^2}{(2\pi)^d}|\xi_0^{2\alpha}|,$$

где ξ_0 — некоторая точка из B_ε. Устремляя ε к нулю, получаем оценку

$$E^2_{22}(D^\alpha, (-\Delta)^{n/2}) \ge \frac{\delta^2}{(2\pi)^d}|\widehat{\xi}^{2\alpha}| = \frac{\alpha^\alpha}{k^k}\left(\frac{\delta^2}{(2\pi)^d}\right)^{1-k/n}. \tag{4.12}$$

Будем искать оптимальные методы среди методов, имеющих вид (4.10). Переходя к преобразованию Фурье, получаем

$$\|D^\alpha x(\cdot) - \widehat{m}(y)(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}|\xi^{2\alpha}|\,|Fx(\xi) - a(\xi)y(\xi)|^2\,d\xi.$$

Положим $z(\cdot) = Fx(\cdot) - y(\cdot)$ и будем учитывать, что

$$\int_{\mathbb{R}^d}|z(\xi)|^2\,d\xi \le \delta^2, \quad \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}|\xi|^{2n}|Fx(\xi)|^2\,d\xi \le 1.$$

Тогда

$$\|D^\alpha x(\cdot) - \widehat{m}(y)(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}|\xi^{2\alpha}|\,|(1 - a(\xi))\,Fx(\xi) + a(\xi)z(\xi)|^2\,d\xi.$$

Запишем подынтегральное выражение в виде

$$|\xi^{2\alpha}|\left|\frac{(1 - a(\xi))\sqrt{\lambda_2}|\xi|^n Fx(\xi)}{\sqrt{\lambda_2}|\xi|^n} + \frac{a(\xi)}{(2\pi)^{d/2}\sqrt{\lambda_1}}(2\pi)^{d/2}\sqrt{\lambda_1}z(\xi)\right|^2.$$

Применяя неравенство Коши–Буняковского, получим следующую оценку

$$\|D^\alpha x(\cdot) - \widehat{m}(y)(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}$$

$$\le \operatorname*{vraisup}_{\xi \in \mathbb{R}^d} S(\xi)\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}\left(\lambda_2|\xi|^{2n}|Fx(\xi)|^2 + (2\pi)^d\lambda_1|z(\xi)|^2\right)d\xi,$$

где

$$S(\xi) = |\xi^{2\alpha}| \left(\frac{|1 - a(\xi)|^2}{\lambda_2 |\xi|^{2n}} + \frac{|a(\xi)|^2}{(2\pi)^d \lambda_1} \right).$$

Если предположить, что $S(\xi) \le 1$ для почти всех ξ, то, учитывая (4.12), получаем

$$\begin{aligned} (4.13) \quad e_{22}^2(D^\alpha, (-\Delta)^{n/2}, \widehat{m}) &\le \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\lambda_2 |\xi|^{2n} |Fx(\xi)|^2 + (2\pi)^d \lambda_1 |z(\xi)|^2 \right) d\xi \\ &\le \lambda_2 + \lambda_1 \delta^2 = \frac{\alpha^\alpha}{k^k} \left(\frac{\delta^2}{(2\pi)^d} \right)^{1-k/n} \le E_{22}^2(D^\alpha, (-\Delta)^{n/2}). \end{aligned}$$

Отсюда вытекает оптимальность рассматриваемых методов и равенство (4.9).

Остается доказать, что множество функций $a(\cdot)$, удовлетворяющих условию (4.11) не пусто. Условие (4.11) можно переписать в эквивалентной форме

$$\left| a(\xi) - \frac{(2\pi)^d \lambda_1}{(2\pi)^d \lambda_1 + \lambda_2 |\xi|^{2n}} \right|^2 \le \frac{(2\pi)^d \lambda_1 \lambda_2 |\xi|^{2n}}{|\xi^{2\alpha}| ((2\pi)^d \lambda_1 + \lambda_2 |\xi|^{2n})^2} (-|\xi^{2\alpha}| + (2\pi)^d \lambda_1 + \lambda_2 |\xi|^{2n}).$$

Поэтому достаточно показать, что при всех $\xi \in \mathbb{R}^d$

$$(4.14) \qquad -|\xi^{2\alpha}| + (2\pi)^d \lambda_1 + \lambda_2 |\xi|^{2n} \ge 0.$$

Из теоремы о среднем арифметическом и среднем геометрическом (см. [28, стр. 29]) следует, что

$$|\xi^{2\alpha}| \le \frac{\alpha^\alpha}{k^k} |\xi|^{2k}.$$

Рассмотрим функцию $y(s) = s^{k/n}$, $s \ge 0$. Касательная к этой функции в любой точке $s_0 > 0$ имеет вид

$$y = \frac{k}{n} s_0^{k/n-1} s + \frac{n-k}{n} s_0^{k/n}.$$

Функция $y(\cdot)$ — вогнутая, поэтому при всех $s \ge 0$

$$s^{k/n} \le \frac{k}{n} s_0^{k/n-1} s + \frac{n-k}{n} s_0^{k/n}.$$

Положив $s_0 = |\widehat{\xi}|^{2n}$, $s = |\xi|^{2n}$, получаем

$$|\xi^{2\alpha}| \le \frac{\alpha^\alpha}{k^k} |\xi|^{2k} \le \frac{\alpha^\alpha}{k^k} \left(\frac{k}{n} |\widehat{\xi}|^{2(k-n)} |\xi|^{2n} + \frac{n-k}{n} |\widehat{\xi}|^{2k} \right).$$

Легко проверить, что

$$\lambda_1 = \frac{\alpha^\alpha (n-k)}{(2\pi)^d k^k n} |\widehat{\xi}|^{2k}, \quad \lambda_2 = \frac{\alpha^\alpha}{k^{k-1} n} |\widehat{\xi}|^{2(k-n)}.$$

Тогда получаем

$$|\xi^{2\alpha}| \le (2\pi)^d \lambda_1 + \lambda_2 |\xi|^{2n},$$

что эквивалентно неравенству (4.14). □

4.2. **Восстановление в метрике $L_\infty(\mathbb{R}^d)$.** Положим

$$
\begin{gathered}
\gamma_1=\frac{n-k-d/2}{n+d(1/2-1/p)},\quad q_1=\frac{1}{1/2+\gamma_1(1/2-1/p)},\\
\widetilde{C}_p(n,k)=\gamma_1^{-\frac{\gamma_1}{p}}(1-\gamma_1)^{-\frac{1-\gamma_1}{2}}\left(\frac{B\left(q_1\gamma_1/p+1,q_1(1-\gamma_1)/2\right)}{2(n-k-d/2)}\right)^{1/q_1}.
\end{gathered}\tag{4.15}
$$

Пусть функция $\kappa_1(\cdot)$ при $1<p<\infty$ определена равенством

$$
\frac{\kappa_1(t)}{(1-\kappa_1(t))^{p-1}}=\frac{|\psi(t)|^{p-2}}{|\varphi(t)|^{2(p-1)}},
$$

при $p=1$

$$
\kappa_1(t)=\min\{1,|\psi(t)|^{-1}\},
$$

а при $p=\infty$

$$
\kappa_1(t)=\left(1-\frac{|\varphi(t)|^2}{|\psi(t)|}\right)_+.
$$

Теорема 5. *Пусть $k\ge 0$, $n>k+d/2$, $1\le p\le\infty$, $k+p>1$,*

$$
I=\int_{\Pi_{d-1}}\frac{\widetilde{\psi}^{q_1}(\omega)}{\widetilde{\varphi}^{q_1(1-\gamma_1)}(\omega)}J(\omega)\,d\omega<\infty,\quad \Pi_{d-1}=[0,\pi]^{d-2}\times[0,2\pi].
$$

Тогда

$$
E_{p\infty}(\Lambda,D)=\frac{1}{(2\pi)^{d(1+\gamma_1)/2}}\widetilde{C}_p(n,k)I^{1/q_1}\delta^{\gamma_1}.
$$

Метод

$$
\widehat{m}(y)(\cdot)=F^{-1}\left(\kappa_1\left(\xi_1^{\frac{1}{n+d(1/2-1/p)}}\xi\right)\psi(\xi)y(\xi)\right)(\cdot),
$$

где

$$
\xi_1=\delta\left(\frac{(1-\gamma_1)^{p-1}}{\gamma_1}\right)^{\frac{q_1}{2p}}\left(\frac{\widetilde{C}_p(n,k)I^{1/q_1}}{(2\pi)^{d(1+\gamma_1)/2}}\right)^{q_1(1/2-1/p)},
$$

является оптимальным.

Доказательство. В силу оценки, аналогичной (4.3), имеем

$$
E_{p\infty}(\Lambda,D)\ge\sup_{\substack{x(\cdot)\in W_p\\ \|Fx(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}\le\delta}}\|\Lambda x(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)}.
$$

Предположим, что $x(\cdot)\in W_p$ и $\|Fx(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}\le\delta$. Если взять $\widehat{x}(\cdot)$ так, чтобы

$$
F\widehat{x}(\xi)=\varepsilon(\xi)e^{-i\langle t,\xi\rangle}Fx(\xi),
$$

где

$$
\varepsilon(\xi)=\begin{cases}\dfrac{\overline{\psi(\xi)Fx(\xi)}}{|\psi(\xi)Fx(\xi)|}, & \psi(\xi)Fx(\xi)\ne 0,\\ 0, & \psi(\xi)Fx(\xi)=0,\end{cases}
$$

то $\widehat{x}(\cdot)\in W_p$, $\|F\widehat{x}(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}\le\delta$ и

$$
\left|\int_{\mathbb{R}^d}\psi(\xi)F\widehat{x}(\xi)e^{i\langle t,\xi\rangle}\,d\xi\right|=\int_{\mathbb{R}^d}|\psi(\xi)Fx(\xi)|\,d\xi.
$$

Поэтому

$$E_{p\infty}(\Lambda, D) \geq \frac{1}{(2\pi)^d} \sup_{\substack{x(\cdot)\in W_p \\ \|Fx(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}\leq\delta}} \int_{\mathbb{R}^d} |\psi(\xi)Fx(\xi)|\,d\xi. \tag{4.16}$$

Пусть $1 \leq p < \infty$. Из (3.4) вытекает, что

$$E_{p\infty}(\Lambda, D) \geq E_{p12},$$

где в задаче о нахождении E_{p12} функцию $\varphi(\cdot)$ следует заменить на $(2\pi)^{-d/2}\varphi(\cdot)$, а функцию $\psi(\cdot)$ на $(2\pi)^{-d}\psi(\cdot)$. Применяя теорему 2, получаем

$$E_{p\infty}(\Lambda, D) \geq E_{p12} = \frac{1}{(2\pi)^{d(1+\gamma_1)/2}} \widetilde{C}_p(n,k) I^{1/q_1} \delta^{\gamma_1}.$$

Кроме того, из той же теоремы 2 вытекает, что

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left| \frac{1}{(2\pi)^d}\psi(\xi)Fx(\xi) - m(y)(\xi)\right| d\xi \leq E_{p12},$$

где

$$m(y)(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^d}\kappa_1\left(\xi_1^{\overline{\frac{1}{n+d(1/2-1/p)}}}\xi\right)\psi(\xi)y(\xi).$$

Следовательно,

$$\left|\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}\psi(\xi)Fx(\xi)e^{i\langle t,\xi\rangle}\,d\xi - \int_{\mathbb{R}^d} m(y)(\xi)e^{i\langle t,\xi\rangle}\,d\xi\right|$$
$$\leq \int_{\mathbb{R}^d}\left|\frac{1}{(2\pi)^d}\psi(\xi)Fx(\xi) - m(y)(\xi)\right| d\xi \leq E_{p12} \leq E_{p\infty}(\Lambda, D).$$

Отсюда вытекает, что метод $\widehat{m}(y)(\cdot)$ является оптимальным, а погрешность оптимального восстановления совпадает с величиной E_{p12}.

Теперь рассмотрим случай, когда $p = \infty$. Положим

$$s(\xi) = \begin{cases} \dfrac{\psi(\xi)}{|\psi(\xi)|}, & \psi(\xi) \neq 0, \\ 1, & \psi(\xi) = 0. \end{cases}$$

Пусть функция $\widehat{x}(\cdot)$ такова, что

$$F\widehat{x}(\xi) = \begin{cases} \delta\overline{s(\xi)}, & |\psi(\xi)| \geq \lambda|\varphi(\xi)|^2, \\ \dfrac{\delta}{\lambda}\dfrac{\overline{\psi(\xi)}}{|\varphi(\xi)|^2}, & |\psi(\xi)| < \lambda|\varphi(\xi)|^2. \end{cases}$$

Выберем $\lambda > 0$ так, чтобы $\|D\widehat{x}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = 1$. Тогда для нахождения λ получаем уравнение

$$\frac{\delta^2}{(2\pi)^d}\int_{|\psi(\xi)|\geq\lambda|\varphi(\xi)|^2} |\varphi(\xi)|^2\,d\xi + \frac{\delta^2\lambda^{-2}}{(2\pi)^d}\int_{|\psi(\xi)|<\lambda|\varphi(\xi)|^2}\frac{|\psi(\xi)|^2}{|\varphi(\xi)|^2}\,d\xi = 1.$$

Переходя к сферическим координатам, получаем

$$\frac{\delta^2}{(2\pi)^d}\int_{\Pi_{d-1}}\widetilde{\varphi}^2(\omega)J(\omega)\,d\omega\int_0^{\Phi_2(\omega)}\rho^{2n+d-1}\,d\rho$$
$$+\frac{\delta^2\lambda^{-2}}{(2\pi)^d}\int_{\Pi_{d-1}}\frac{\widetilde{\psi}^2(\omega)}{\widetilde{\varphi}^2(\omega)}J(\omega)\,d\omega\int_{\Phi_2(\omega)}^{+\infty}\rho^{-2n+2k+d-1}\,d\rho = 1,$$

где
$$\Phi_2(\omega)=\left(\frac{\widetilde{\psi}(\omega)}{\lambda\widetilde{\varphi}^2(\omega)}\right)^{\frac{1}{2n-k}}.$$
Тем самым получаем уравнение
$$\frac{\delta^2}{(2\pi)^d}\lambda^{-\frac{2n+d}{2n-k}}\frac{4n-2k}{(2n+d)(2n-2k-d)}I=1.$$
Отсюда
$$\lambda=\left(\frac{\delta^2(4n-2k)}{(2\pi)^d(2n+d)(2n-2k-d)}I\right)^{\frac{2n-k}{2n+d}}.$$
Из (4.16) вытекает, что

$$(4.17)\quad E_{\infty\infty}(\Lambda,D)\ge\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}|\psi(\xi)||F\widehat{x}(\xi)|\,d\xi=\frac{\delta}{(2\pi)^d}\int_{|\psi(\xi)|\ge\lambda|\varphi(\xi)|^2}|\psi(\xi)|\,d\xi$$
$$+\frac{\delta}{\lambda(2\pi)^d}\int_{|\psi(\xi)|<\lambda|\varphi(\xi)|^2}\frac{|\psi(\xi)|^2}{|\varphi(\xi)|^2}\,d\xi=\frac{\delta}{(2\pi)^d}\int_{\Pi_{d-1}}\widetilde{\psi}(\omega)J(\omega)\,d\omega\int_0^{\Phi_2(\omega)}\rho^{k+d-1}\,d\rho$$
$$+\frac{\delta}{\lambda(2\pi)^d}\int_{\Pi_{d-1}}\frac{\widetilde{\psi}^2(\omega)}{\widetilde{\varphi}^2(\omega)}J(\omega)\,d\omega\int_{\Phi_2(\omega)}^{+\infty}\rho^{-2n+2k+d-1}\,d\rho=\frac{\delta\lambda^{-\frac{k+d}{2n-k}}}{(2\pi)^d(k+d)}I$$
$$+\frac{\delta}{\lambda(2\pi)^d(2n-2k-d)}\lambda^{\frac{2n-2k-d}{2n-k}}I=\frac{\delta(2n-k)\lambda^{-\frac{k+d}{2n-k}}I}{(2\pi)^d(k+d)(2n-2k-d)}=\nu,$$
где
$$\nu=\frac{(n+d/2)^{\frac{k+d}{2n+d}}}{k+d}\left(\frac{(2n-k)I}{(2\pi)^d(2n-2k-d)}\right)^{\frac{2n-k}{2n+d}}\delta^{\frac{2n-2k-d}{2n+d}}.$$
Докажем, что для всех $x(\cdot)\in X_\infty$ выполнено равенство

$$(4.18)\quad \Lambda x(t)=\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{|\psi(\xi)|\ge\lambda|\varphi(\xi)|^2}(\psi(\xi)-\lambda s(\xi)|\varphi(\xi)|^2)Fx(\xi)e^{i\langle t,\xi\rangle}\,d\xi$$
$$+\frac{\lambda}{\delta(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}|\varphi(\xi)|^2Fx(\xi)\overline{F\widehat{x}(\xi)}e^{i\langle t,\xi\rangle}\,d\xi.$$

Действительно,
$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{|\psi(\xi)|\ge\lambda|\varphi(\xi)|^2}(\psi(\xi)-\lambda s(\xi)|\varphi(\xi)|^2)Fx(\xi)e^{i\langle t,\xi\rangle}\,d\xi$$
$$+\frac{\lambda}{\delta(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}|\varphi(\xi)|^2Fx(\xi)\overline{F\widehat{x}(\xi)}e^{i\langle t,\xi\rangle}\,d\xi$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{|\psi(\xi)|\ge\lambda|\varphi(\xi)|^2}(\psi(\xi)-\lambda s(\xi)|\varphi(\xi)|^2)Fx(\xi)e^{i\langle t,\xi\rangle}\,d\xi$$
$$+\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{|\psi(\xi)|\ge\lambda|\varphi(\xi)|^2}\lambda s(\xi)|\varphi(\xi)|^2Fx(\xi)e^{i\langle t,\xi\rangle}\,d\xi$$
$$+\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{|\psi(\xi)|<\lambda|\varphi(\xi)|^2}\psi(\xi)Fx(\xi)e^{i\langle t,\xi\rangle}\,d\xi$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}\psi(\xi)Fx(\xi)e^{i\langle t,\xi\rangle}\,d\xi=\Lambda x(t).$$

Оценим погрешность метода

$$m(y)(t)=\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{|\psi(\xi)|\geq\lambda|\varphi(\xi)|^2}(\psi(\xi)-\lambda s(\xi)|\varphi(\xi)|^2)y(\xi)e^{i\langle t,\xi\rangle}\,d\xi.$$

Имеем

$$\begin{aligned}|\Lambda x(t)-m(y)(t)|=\bigg|\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}\psi(\xi)Fx(\xi)e^{i\langle t,\xi\rangle}\,d\xi\\ -\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{|\psi(\xi)|\geq\lambda|\varphi(\xi)|^2}(\psi(\xi)-\lambda s(\xi)|\varphi(\xi)|^2)y(\xi)e^{i\langle t,\xi\rangle}\,d\xi\bigg|\\ \leq\bigg|\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}\psi(\xi)Fx(\xi)e^{i\langle t,\xi\rangle}\,d\xi\\ -\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{|\psi(\xi)|\geq\lambda|\varphi(\xi)|^2}(\psi(\xi)-\lambda s(\xi)|\varphi(\xi)|^2)Fx(\xi)e^{i\langle t,\xi\rangle}\,d\xi\bigg|\\ +\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{|\psi(\xi)|\geq\lambda|\varphi(\xi)|^2}|\psi(\xi)-\lambda s(\xi)|\varphi(\xi)|^2||Fx(\xi)-y(\xi)|\,d\xi.\end{aligned}$$

Для $x(\cdot)$ таких, что

$$\|Fx(\cdot)-y(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)}\leq\delta,\quad \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}|\varphi(\xi)|^2|Fx(\xi)|^2\,d\xi\leq 1,$$

учитывая (4.18), получаем

$$|\Lambda x(t)-m(y)(t)|\leq\frac{\lambda}{\delta(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}|\varphi(\xi)|^2|Fx(\xi)||F\widehat{x}(\xi)|\,d\xi+\mu\leq\frac{\lambda}{\delta}+\mu,$$

где

$$\mu=\frac{\delta}{(2\pi)^d}\int_{|\psi(\xi)|\geq\lambda|\varphi(\xi)|^2}(|\psi(\xi)|-\lambda|\varphi(\xi)|^2)\,d\xi.$$

Выше было вычислено (см. первое слагаемое в оценке (4.17))

$$\frac{\delta}{(2\pi)^d}\int_{|\psi(\xi)|\geq\lambda|\varphi(\xi)|^2}|\psi(\xi)|\,d\xi=\frac{\delta\lambda^{-\frac{k+d}{2n-k}}}{(2\pi)^d(k+d)}I.$$

Далее,

$$\begin{aligned}\frac{\delta\lambda}{(2\pi)^d}\int_{|\psi(\xi)|\geq\lambda|\varphi(\xi)|^2}|\varphi(\xi)|^2\,d\xi=\frac{\delta\lambda}{(2\pi)^d}\int_{\Pi_{d-1}}\widetilde{\varphi}^2(\omega)J(\omega)\,d\omega\int_0^{\Phi_2(\omega)}\rho^{2n+d-1}\,d\rho\\ =\frac{\delta\lambda^{-\frac{k+d}{2n-k}}}{(2\pi)^d(2n+d)}I.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\mu=\frac{\delta\lambda^{-\frac{k+d}{2n-k}}(2n-k)}{(2\pi)^d(k+d)(2n+d)}I.$$

Нетрудно убедиться, что $\lambda/\delta+\mu=\nu$, поэтому

$$e_{\infty\infty}(\Lambda,D,m)\leq\nu\leq E_{\infty\infty}(\Lambda,D).$$

Отсюда вытекает, что $m(y)(\cdot)$ — оптимальный метод, а погрешность оптимального восстановления равна ν. Несложная проверка показывает, что при $p=\infty$

$$\frac{1}{(2\pi)^{d(1+\gamma_1)/2}}\widetilde{C}_\infty(n,k)I^{1/q_1}\delta^{\gamma_1}=\nu.$$

Вычислим ξ_1 при $p=\infty$. Имеем

$$\xi_1=\delta(1-\gamma_1)^{\frac{q_1}{2}}\left(\frac{\widetilde{C}_\infty(n,k)I^{1/q_1}}{(2\pi)^{d(1+\gamma_1)/2}}\right)^{q_1/2}=\lambda^{\frac{n+d/2}{2n-k}}. \tag{4.19}$$

Метод $m(y)(\cdot)$ может быть записан в виде

$$m(y)(\cdot)=F^{-1}\left(\left(1-\lambda\frac{|\varphi(\xi)|^2}{|\psi(\xi)|}\right)_+\psi(\xi)y(\xi)\right)(\cdot).$$

В силу равенства (4.19)

$$m(y)(\cdot)=F^{-1}\left(\kappa_1\left(\xi_1^{\frac{1}{n+d/2}}\xi\right)\psi(\xi)y(\xi)\right)(\cdot)=\widehat{m}(y)(\cdot).$$

□

Следствие 4. *Пусть $k\ge 0$, $n>k$, $1\le p\le\infty$, $k+p>1$. Тогда*

$$E_{p\infty}\left(\frac{d^k}{dt^k},\frac{d^n}{dt^n}\right)=\frac{1}{(2\pi)^{(1+\gamma_1)/2}}\widetilde{C}_p(n,k)2^{1/q_1}\delta^{\gamma_1},$$

где γ_1, q_1 и $\widetilde{C}_p(n,k)$ определены равенствами (4.15) при $d=1$. Метод

$$\widehat{m}(y)(\cdot)=F^{-1}\left(\kappa_1\left(\xi_1^{\frac{1}{n+1/2-1/p}}\xi\right)(i\xi)^ky(\xi)\right)(\cdot),$$

где

$$\xi_1=\delta\left(\frac{(1-\gamma_1)^{p-1}}{\gamma_1}\right)^{\frac{q_1}{2p}}\left(\frac{\widetilde{C}_p(n,k)2^{1/q_1}}{(2\pi)^{(1+\gamma_1)/2}}\right)^{q_1(1/2-1/p)},$$

является оптимальным.

Утверждения следствия 4 для $p=1,2,\infty$ были получены в работе [29]. Там же рассмотрен случай, когда $p=1$, а $k=0$.

Следствие 5. *Пусть $k\ge 0$, $n>k+d/2$, $1\le p\le\infty$, $k+p>1$. Тогда*

$$E_{p\infty}((-\Delta)^{k/2},(-\Delta)^{n/2})=\frac{1}{(2\pi)^{d(1+\gamma_1)/2}}\widetilde{C}_p(n,k)I_0^{1/q_1}\delta^{\gamma_1},$$

где I_0 определено равенством (4.5). Метод

$$\widehat{m}(y)(\cdot)=F^{-1}\left(\kappa_1\left(\xi_1^{\frac{1}{n+d(1/2-1/p)}}\xi\right)|\xi|^ky(\xi)\right)(\cdot),$$

где

$$\xi_1=\delta\left(\frac{(1-\gamma_1)^{p-1}}{\gamma_1}\right)^{\frac{q_1}{2p}}\left(\frac{\widetilde{C}_p(n,k)I_0^{1/q_1}}{(2\pi)^{d(1+\gamma_1)/2}}\right)^{q_1(1/2-1/p)},$$

является оптимальным.

Утверждения следствия 5 для $p=\infty$ были получено в работе [30].

Рассмотрим теперь применение теоремы 5 к операторам $\Lambda=D^\alpha$ и $D=(-\Delta)^{n/2}$.

Следствие 6. *Пусть* $k = \alpha_1 + \ldots + \alpha_d > 0$, $n > k + d/2$, $1 \le p \le \infty$. *Тогда*

$$E_{p\infty}(D^\alpha, (-\Delta)^{n/2}) = \frac{1}{(2\pi)^{d(1+\gamma_1)/2}} \widetilde{C}_p(n,k) I^{1/q_1} \delta^{\gamma_1},$$

где

$$I = 2\frac{\Gamma((\alpha_1 q_1 + 1)/2)\ldots\Gamma((\alpha_d q_1 + 1)/2)}{\Gamma((kq_1 + d)/2)}. \tag{4.20}$$

Метод

$$\widehat{m}(y)(\cdot) = F^{-1}\left(\kappa_1\left(\xi_1^{\frac{1}{n+d(1/2-1/p)}}\xi\right)(i\xi)^\alpha y(\xi)\right)(\cdot),$$

где

$$\xi_1 = \delta\gamma_1^{-\frac{q_1}{2p}}(1-\gamma_1)^{\frac{q_1}{2}(1-1/p)}\left(\frac{\widetilde{C}_p(n,k)I^{1/q_1}}{(2\pi)^{d(1+\gamma_1)/2}}\right)^{q_1(1/2-1/p)},$$

является оптимальным.

Доказательство. Величина I из теоремы 5 в рассматриваемом случае имеет вид

$$I = \int_{\Pi_{d-1}} |\cos\omega_1|^{\alpha_1 q_1} \ldots |\sin\omega_1 \sin\omega_2 \ldots \sin\omega_{d-2}\sin\omega_{d-1}|^{\alpha_d q_1} J(\omega)\, d\omega.$$

Учитывая (4.8), получаем равенство (4.20). Теперь утверждение следствия непосредственно вытекает из теоремы 5. □

Автор признателен рецензентам за ценные замечания и советы.

Список литературы

[1] Никольский С. М. "К вопросу об оценках приближений квадратурными формулами", *Успехи мат. наук*, **5**:2 (1950), 165–177.

[2] Смоляк С. А. *Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них*, Канд. дисс. Москва: МГУ, 1965.

[3] Марчук А. Г., Осипенко К. Ю. "Наилучшее приближение функций, заданных с погрешностью в конечном числе точек", *Мат. заметки*, **17**:3 (1975), 359–368.

[4] Micchelli C. A., Rivlin T. J. "A survey of optimal recovery", Optimal Estimation in Approximation Theory. New York: Plenum Press, 1977, 1–54.

[5] Scharlach R. "Optimal recovery by linear functionals", *J. Approx. Theory*, **44**:2 (1985), 167–172.

[6] Магарил-Ильяев Г. Г., Чан Тхи Ле, "К задаче оптимального восстановления функционалов", *Успехи мат. наук*, **42**:2 (1987), 237–238.

[7] Арестов В. В. "Наилучшее восстановление операторов и родственные задачи", *Тр. МИАН СССР*, **189** (1989), 3–20.

[8] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. "Об оптимальном восстановлении функционалов по неточным данным", *Мат. заметки*, **50**:6 (1991), 85–93.

[9] Melkman A. A., Micchelli C. A. "Optimal estimation of linear operators in Hilbert spaces from inaccurate data", *SIAM J. Numer. Anal.*, **16** (1979), 87–105.

[10] Тайков Л. Н. "Неравенства типа Колмогорова и наилучшие формулы численного дифференцирования", *Матем. заметки*, **4**:2 (1968), 233–238.

[11] Osipenko K. Yu. "Optimal recovery of operators and multidimensional Carlson type inequalities", *J. Complexity*, **32**:1 (2016), 53–73.

[12] Левин В. И. "Точные константы в неравенствах типа Карлсона", *ДАН*, **59** (1948), 635–638.

[13] Арестов В. В. "Приближение линейных операторов и родственные экстремальные задачи", *Тр. МИАН СССР*, **138** (1975), 29–42.

[14] Арестов В. В. "Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи", *Успехи мат. наук*, **51**:6 (1996), 89–124.

[15] Arestov V. V. “On the best approximation of the differentiation operator”, *Ural Math. J.*, **1**:1 (2015), 20–29.

[16] Арестов В. В. “Наилучшее равномерное приближение оператора дифференцирования ограниченными в пространстве L_2 операторами”, *Тр. ИММ УрО РАН*, **24**:4 (2018), 34–56.

[17] Arestov V. V. “Best approximation of a differentiation operator on the set of smooth functions with exactly or approximately given Fourier transform”, In: Khachay M., Kochetov Y., Pardalos P. (eds) *Mathematical Optimization TTheory and Operation Research. MOTOR 2019.* Lecture Notes in Computer Science, Springer (2019), 434–448.

[18] Arestov V. V. “Uniform approximation of differentiation operators by bounded linear operators in the space L_r”, *Analysis Math.*, **46**:3 (2020), 425–445.

[19] Тимошин О. А. “Наилучшее приближение оператора второй смешанной производной в метриках L и C на плоскости”, *Матем. заметки*, **36**:3 (1984), 369–375.

[20] Тимофеев В. Г. “Неравенства типа Ландау для функций нескольких переменных”, *Матем. заметки*, **37**:5 (1985), 676–689.

[21] Осипенко К. Ю. “Оптимальное восстановление линейных операторов в неевклидовых метриках”, *Матем. сб.*, **205**:10 (2014), 77–106.

[22] Barza S., Burenkov V., Pečarić J., Persson L.-E. “Sharp multidimentional multiplicative inequalities for weighted L_p spaces with homogeneous weights”, *Math. Ineq. Appl.*, **1** (1998), 53–67.

[23] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. “Как наилучшим образом восстановить функцию по неточно заданному спектру?”, *Матем. заметки*, **92**:1 (2012), 59–67.

[24] Сивкова Е. О. “Об оптимальном восстановлении лапласиана функции по ее неточно заданному преобразованию Фурье”, *Владикавк. матем. журн.*, **14**:4 (2012), 63–72.

[25] Магарил-Ильяев Г. Г., Сивкова Е. О. “Наилучшее восстановление оператора Лапласа функции по ее неточно заданному спектру”, *Матем. сб.*, **203**:4 (2012), 119–130.

[26] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. “Оптимальное восстановление производных на соболевских классах”, *Владикавк. матем. журн.*, **5**:1 (2003), 39–47.

[27] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. “О наилучших методах восстановления производных на соболевских классах”, *Изв. РАН. Сер. мат.*, **78**:6 (2014), 83–102.

[28] Харди Г. Г., Литтльвуд Д. Е., Полиа. Г. *Неравенства*, М.: Иностранная литература, 1948.

[29] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. “Оптимальное восстановление значений функций и их производных на прямой по неточно заданному преобразованию Фурье”, *Матем. сб.*, **195**:10 (2004), 67–82.

[30] Сивкова Е. О. “Наилучшее восстановление лапласиана функции и точные неравенства”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **18**:5 (2013), 175–185.

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)

E-mail address: kosipenko@yahoo.com