Министерство образования
Российской Федерации

“МАТИ” — РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. К.Э. ЦИОЛКОВСКОГО

УДК 517.951
№ госрегистрации
Инв. №

УТВЕРЖДАЮ

Проректор университета
по научной работе

____________ И.В.Шевченко

“____” __________ 2000 г.

ОТЧЕТ

по научно–исследовательской работе

РАЗРАБОТКА КАЧЕСТВЕННОЙ ТЕОРИИ НЕКЛАССИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ И МЕХАНИКИ

(заключительный)

Тема №1509–Б

Заведующий кафедрой
“Высшая математика”
д.ф.-м.н., проф. К.Ю.Осипенко

Руководитель НИР
д.ф.-м.н., проф. К.Ю.Осипенко

Москва 2000

Оглавление

Введение

Многочисленные прикладные задачи, в частности, задачи теории разрушения, газовой динамики, гидродинамики, геофизики, теории упругости, оптики, статистической физики, квантовой механики, теории оптимального управления, и, особенно, методы их численного решения на ЭВМ, приводят к изучению различных свойств решений дифференциальных уравнений с обыкновенными и частными производными, интегральных и псевдодифференциальных уравнений, к исследованию возможности разрешимости граничных задач для таких уравнений при возможно более слабых условиях на данные задач и возможности новых постановок задач для соответствующих уравнений. Актуальным является и развитие аналитических и аналитико-численных методов решения указанных уравнений. Решению некоторых проблем из указанного круга задач и посвящена данная НИР. Численные методы, разработанные при решении прикладных задач, сопровождаются подробным теоретическим анализом их адекватности рассматриваемым задачам. Важную роль играют и качественные методы в случаях, когда уравнения нелинейные и численные методы не дают возможности адекватно описать решения этих уравнений и их семейства. При этом приходится привлекать методы самой современной математики, включая функциональный анализ, теории бифуркаций, странных аттракторов и др.

При решении дифференциальных уравнений естественным образом возникают задачи, связанные с восстановлением функций или функционалов от них по некоторой ограниченной информации о функции, заданной, вообще говоря, приближенно. Такого рода задачи, интенсивно изучающиеся в последнее время (особенно в связи с развитием компьютерной техники) составляют новое направление, получившее название оптимальное восстановление. Круг исследуемых в этой области проблем содержит такие важные задачи, как построение оптимальных методов восстановления функций, заданных точно или приближенно в конечном числе точек, построение оптимальных квадратурных формул, восстановление производных (численное дифференцирование), выбор оптимальным образом информации, которую необходимо знать о функции, чтобы с наименьшей погрешностью восстановить ее, аппроксимация функции по ее приближенным коэффициентам Фурье и др. Эти проблемы нашли свое отражении в данной НИР.

Если при классическом подходе, как правило, задаются средства приближения (алгебраические или тригонометрические полиномы, рациональные функции, сплайны, вейвлеты и др.), то в задачах оптимального восстановления вид метода восстановления заранее не фиксируется — он ищется среди всевозможных методов (алгоритмов), использующих значения аппроксимируемой функции. Важность такой постановки обусловлена тем, что при фиксированной информации выбирается наилучший способ приближения функции или функционала (в последнем случае речь может идти, например, об оптимальных методах интегрирования).

Другой круг рассмотренных в данной работе задач связан с вопросом об оптимальном выборе информации. Например, как лучше расположить точки, в которых следует измерять значения функции, чтобы восстановить ее с минимальной погрешностью? Существуют ли функционалы, информация о значениях которых более полезна, чем информация о значениях в точках (естественно, при одинаковом их объеме)? Что лучше знать о периодической функции — значения в фиксированном наборе точек или коэффициенты Фурье? Задачи, возникающие здесь, тесно связаны с классическими аппроксимационными характеристиками, например такими, как колмогоровские, линейные, гельфандовские и бернштейновские n-поперечники.

Хорошо известна роль в приложениях результатов Котельникова и Картрайт о формулах, точно восстанавливающих целые функции по их значениям в равномерной сетке. Однако для аналитических в полосе функций точного восстановления по той же информации не существует. Тем не менее тут можно говорить о наилучшем способе восстановления. Еще одно важное направление — построение аналогов формул Котельникова и Картрайт для аналитических функций.

Еще один класс задач, которые исследуются в предлагаемой работе, связан с рассмотрением алгебраических методов подхода к уравнениям, возникающим в физике и механике. Речь идет о разного рода функциональных и параметрических пространствах, которые описывают как отдельные уравнения, так и целые семейства таких уравнений, зависящие от параметров. Получены результаты,позволяющие методами теории деформаций и связанными с ними когомологическими методами дать новые подходы к решению указанных выше уравнений. Эти результаты помогают дать качественное описание многих уравнения физики и математики, проясняют их структуру. Использование методов исследования банаховых алгебр — еще один подход к решению задач математической физики и механики, который нашел свое отражение в данной НИР.

Исходя из современных подходов к решению задач оптимального управления, предложен и исследован метод исследования и решения одного из важнейших уравнений математической физики — уравнения Шредингера.

Предлагаемые методики решения дифференциальных уравнений рекомендуется к использованию при решении прикладных задач теории упругости, гидродинамики, квантовой механики, механики разрушения, теории оптимального управления и др. Разработка математических моделей решения таких задач является трудоемким процессом. Однако, за счет использования специально разработанных для этого вычислительных средств этот процесс может быть автоматизирован на базе современных ЭВМ. Использование специально разработанного программного обеспечения позволяет сократить время разработки математической модели практически важных технологических процессов. Такого рода примеры приводятся в отчете.

Разрабатываемая методика решения дифференциальных уравнений, описывающих математические модели исследуемых процессов, не позволяет найти точное решение задачи. Решение, полученное численным методом, является приближенным, поэтому уделяется большое внимание погрешности численных методов и их оптимизации.

Рекомендуется использование результатов работы в учебном процессе. Материалы НИР в виде методических разработок положены в основу курса “Численные методы решения дифференциальных уравнений”, а также ряда специальных курсов.

В процессе выполнения данной НИР были выпущены 4 промежуточных отчета по отдельным этапам:

Этап 1, 1996 год: “Исследование поведений решений, вырождающихся на границе области в случае слабых и сильных вырождений”.

Этап 2, 1997 год: “Исследование поведения решений, вырождающихся на границе области в случае вырождения типа Трикоми.

Оптимальное восстановление функций из классов Харди–Соболева по приближенным коэффициентам Фурье".

Этап 3, 1998 год: "Сравнительный анализ погрешности восстановления периодической функции по коэффициентам Фурье и информации об их значениях в точках. Исследование строения параметрических и функциональных пространств".

Этап 4, 1999 год: "Оптимальные методы восстановления аналитических в полосе функций, использующие значения в равномерной сетке. Построение аналогов формул Котельникова и Картрайт".

РАЗДЕЛ 1

Исследования дифференциальных, интегральных и псевдодифференциальных уравнений математической физики и механики

1.1. Математические модели технологических процессов и задачи механики разрушения

В соответствии с техническим заданием были разработаны методы исследования и решения некоторых классов систем дифференциальных уравнений с частными производными, интегральных уравнений, а также псевдодифференциальных уравнений и систем, отвечающих различным задачам механики, физики и технологии. С помощью развитых методов построены и проанализированы решения конкретных задач.

В работе **[28]** была получена асимптотика решений сингулярно возмущенных интегральных уравнений следующего вида

$$\varepsilon h_\varepsilon(x) + \int_\Omega R(x-y)h_\varepsilon(y)\,dy = f(x),$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область, $x \in \Omega$, $y \in \Omega$, $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \to 0$, $R(x) = P(D)G(x)$, $Q(D)G(x) = \delta(x)$,

$$P(D) = \sum_{|\alpha| \le p} a_\alpha D^\alpha, \quad Q(D) = \sum_{|\alpha| \le q} b_\alpha D^\alpha, \quad p < q,$$

$$D^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}}, \quad |\alpha| = \alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n.$$

Уравнения указанного типа возникают в теории оценивания случайных полей, в терминах которой в свою очередь могут быть сформулированы многие прикладные задачи оптики, обработки телевизионных сигналов, геофизики и др. Асимптотика многомерных сингулярно возмущенных интегральных уравнений построена впервые.

В работах **[16, 17]** проведены исследования возможности новой технологии добычи углеводородного сырья. Идея этой технологии заключается в использовании горизонтальных скважин и термическом воздействии на пласты углеводородного сырья. Такое воздействие включает два самостоятельных этапа:

1) термическая подготовка бурового канала, заметно повышающая его дренирующую способность;
2) нагнетание в пласт теплоносителя через систему подготовленных параллельных каналов.

Для обоих этапов разработаны математические модели, позволяющие не только прогнозировать теплофизические особенности рабочего процесса, но и оптимизировать технологические и конструктивные параметры последнего. С математической точки зрения соответствующие модели сводятся к решениям систем дифференциальных уравнений с частными производными. В первом случае эта система включает в себя уравнение конвективного теплообмена вдоль бурового канала и уравнение теплопроводности в пласте. Во втором случае процесс описывается уравнениями неизотермической фильтрации газа в пористой среде.

Значительная часть результатов работы относится к задачам линейной механики разрушения. Эти задачи заключаются в оценке работоспособности элементов конструкций, содержащих трещины. Необходимость решения задач механики разрушения вызвана тем, что в современных сложных конструкциях и сооружениях практически всегда имеются трещиноподобные дефекты, возникающие либо в процессе эксплуатации, либо изначально присущие используемым материалам. Математически, задачи линейной механики разрушения описываются системой уравнений теории упругости в трехмерной области с разрезом (трещиной). Из-за негладкости границы области решения обладают корневой особенностью вблизи контура трещины. Коэффициенты при этой особенности называются коэффициентами интенсивности напряжений (КИН). Величины КИН (или их комбинаций) определяют возможность прорастания трещины.

Определение, с достаточно высокой точностью, главного члена асимптотики из численного решения представляет существенные трудности. Поэтому важную роль играют аналитические и аналитико-численные решения, которые в случаях некоторых видов канонических областей, занимаемых как упругим телом, так и трещиной, удается построить. Такие решения позволяют исследовать влияние параметров задачи на наиболее важные с точки зрения механики разрушения их характеристики, а также могут использоваться в качестве эталонных для проверки численных методов и корректировки параметров численного счета.

За отчетный период удалось получить аналитические решения нескольких пространственных задач механики разрушения. При решении этих задач удобным оказалось предварительно свести исходные краевые задачи для уравнений теории упругости в трехмерном теле с разрезом к задачам Дирихле для соответствующих систем граничных псевдодифференциальных уравнений относительно скачков смещений в ограниченной, плоской области, занимаемой трещиной. Был разработан метод аналитического решения задачи Дирихле для некоторых типов псевдодифференциальных уравнений и систем в эллиптических областях. В результате, в работе **[15]** были получены аналитические решения задачи об эллиптической трещине, расположенной в однородном, упругом пространстве в случае, когда к ее поверхностям приложены равные по величине и противоположно направленные произвольные, статические, полиномиальные нагрузки.

В статьях Е. И. Шифрина, опубликованных в 1996 г., метод аналитического решения был распространен на систему псевдодифференциальных уравнений, отвечающую задаче об эллиптической трещине, к поверхностям которой приложены произвольные усилия, гармонически изменяющиеся по времени. Полученное решение представлено в виде степенного ряда по волновому числу. Аналитическое решение пространственной динамической задачи теории трещин в указанных работах получено впервые. Следует отметить, что степенной ряд, с помощью которого представлено решение, сходится лишь в области низких частот. Для получения решения в более широком диапазоне частот, был использован аппарат аппроксимаций Паде. Проведенные расчеты показали, что аппроксимации Паде позволяют в несколько раз расширить диапазон частот, в котором решение строится с исключительно высокой точностью.

Дальнейшее развитие метод получил в работе **[52]**, в которой построено аналитико-численное решение задачи об эллиптической интерфейсной трещине, т.е. трещине, находящейся на границе раздела двух полупространств с различными упругими свойствами. Задачи об интерфейсных трещинах особенно сложны, т.к. их решения обладают вблизи контура трещины не только корневыми, но и осциллирующими особенностями. Вследствие этого ранее были построены решения только в случае круглых трещин.

Во всех указанных выше задачах механики разрушения предполагается, что размеры, местоположение и форма трещины известны. Однако, сама проблема выявления трещин в конструкциях является весьма трудной и к настоящему времени мало изученной. Одно из перспективных направлений в неразрушающих методах обнаружения и идентификации дефектов в элементах конструкций основано на измерении изменений их вибрационных характеристик, например, таких как собственные частоты и собственные функции. В работах [**53, 54**] решена задача вычисления собственных частот при поперечных колебаниях балки, содержащей произвольное количество трещин, а также рассмотрены подходы к решению обратной задачи — определения положения и размеров трещин по собственным частотам. Ранее в литературе были рассмотрены случаи лишь одной и двух трещин, причем предлагавшиеся методы приводили к вычислительным процедурам, требовавшим существенно больше машинного времени.

1.2. Качественные методы исследования уравнений математической физики

Одним из наиболее конструктивных методов исследования свойств решений уравнений математической физики является метод характеристик. Характеристики в известных из литературы примерах являются фазовыми кривыми в фазовом или расширенном фазовом пространстве. Последний случай встречается в ряде эволюционных уравнений математической физики. Важно подчеркнуть, что классические методы вычислений развивались, ориентируясь на линейные уравнения математической физики. В последние десятилетия обострился интерес к нелинейным уравнениям математической физики в связи с развитием наукоемких технологий в промышленности. Исследования нелинейных уравнений математической физики проявило ряд феноменов, связанных с резким отличием свойств непрерывных моделей и их дискретных аналогов.

Одним из продвинутых примеров исследования свойств динамики дискретных моделей, проявляющих отличие от свойств непрерывных аналогов, на сегодня является "отображение Богданова" ("Bogdanov map" см. [**31**]). Вместе с этим свойства дискретной модели "Bogdanov map" обнаруживают более адекватное описание динамики с учетом развития в послевоенные годы концепций и понятий квантовой механики, квантовой статистики и т.п.

В основе примера лежит непрерывная модель динамики частицы в поле сил ангармонического осциллятора с учетом силы трения

$$\ddot{x} = -\frac{\partial u}{\partial x} + f(x) \cdot \dot{x}, \tag{1.1}$$

где u — ангармонический потенциал сил

$$u = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}.$$

Сила трения рассматривается с нелинейным коэффициентом трения:

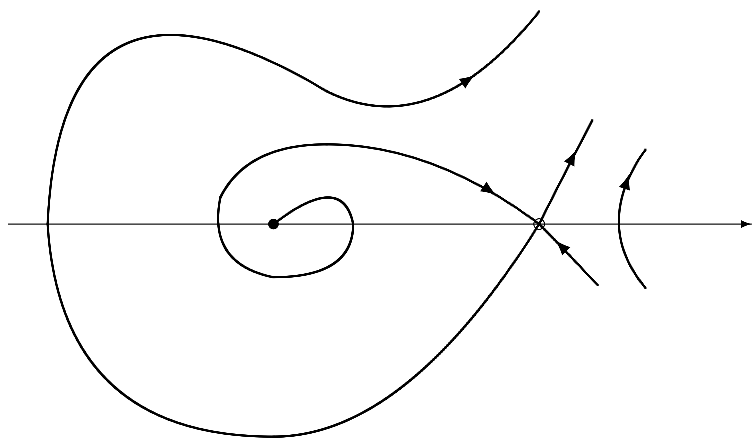
$$f(x) = \varepsilon + \mu x,$$

где ε, μ — малые вещественные параметры.

Семейство (1.1) тесно связано с бифуркацией Богданова–Такенса, поэтому оно исследовано качественно полностью в 70-е годы.

Физическая мотивировка заключается в изучении динамики частиц слабо сжимаемой жидкости (постоянная составляющая коэффициента трения ε — мала). Дополнительно предлагается учесть нелинейные эффекты, например, связанные с изменением температуры среды (включение в модель слагаемого $\mu x \cdot \dot{x}$).

При малых значениях ε и μ фазовый портрет системы (1.1) имеет вид



Известно также ([**3**]), что у системы (1.1) может иметься один грубый предельный цикл (при $|\varepsilon| \leq \mu/7 + \ldots$).

Было предложено (см. [**31**]) рассмотреть схему Эйлера первого порядка для системы (1.1). Предложено воспользоваться полуявной схемой Эйлера, что приводит к итерациям отображения фазовой плоскости на себя следующего вида:

$$\begin{cases} x' = x + y', \\ y' = y + \varepsilon y + kx(x-1) + \mu xy. \end{cases} \qquad (1.2)$$

Отображение (1.2) называется в литературе отображением Богданова.

Полуявная схема Эйлера первого порядка здесь удобна по двум причинам. Первая: обратное отображение к (1.2) является дробно-рациональным (это облегчает численный анализ отображения (1.2), учитывающий итерации (1.2) вперед и назад по дискретному времени). Вторая: отображение (1.2), записанное с учетом уравнения Ньютона второго порядка, допускает естественную физическую мотивировку получения (1.2) с учетом теплообмена на пути свободного пробега частицы.

Отображение (1.2) может иметь на фазовой плоскости периодические орбиты периода n:

$$g^n(x_0) = x_0, \quad g^j(x_0) \neq x_0 \quad \text{при } 1 \leq j \leq n-1.$$

Были выбраны 3 набора параметров k, ε и μ, при которых (1.2) исследовалось численно с помощью ЭВМ (см. [**5**]). Было обнаружено для каждого фиксированного набора параметров порядка $2\cdot10^{-3}$ периодических орбит (период в пределах $\leq 10^7 \div 10^8$).

Периодические орбиты разбиваются в общем положении на три вида:

а) асимптотически – устойчивые;
б) асимптотически – неустойчивые;
в) гиперболические.

Асимптотически – неустойчивые периодические орбиты отвечают за асимптотики движения частицы при $n \to -\infty$. Соответственно, асимптотически – устойчивые орбиты дают асимптотики движения при $n \to +\infty$. Гиперболические периодические орбиты отвечают переходным процессам в движении частицы и связаны с явлением, названным в литературе (стохастической) диффузией Арнольда (соответственно в геометрии — паутина Арнольда).

Асимптотически (не)устойчивые периодические орбиты имеют области захвата в фазовом пространстве: множество начальных точек, которые при дискретных итерациях асимптотически сходятся к соответствующей орбите при $n \to +\infty$ или $n \to -\infty$. Области захвата в фазовом пространстве имеют довольно сложную топологическую природу, которая в наиболее сложных случаях сплетается в паутину Арнольда. Мера области захвата (площадь) позволяет определить статистический вес периодической асимптотически (не)устойчивой орбиты. Оценки, выполненные в [**5**], показывают, что эти статистические веса описываются приближенно распределением Больцмана–Гиббса.

Таким образом, мы получаем, что дискретизация непрерывной модели простейшего вида приводит к динамике качественно отличающейся от динамики непрерывной модели.

Безусловно, дискретная динамика становится доступной анализу с помощью методов статистической физики (скорее механики), а также методов квантовой статистики. В [**5**] отмечено, что усреднение вдоль периодических орбит ряда величин с определенным физическим смыслом дает средние величины, которые обнаруживают систематическое поведение. Вместе с тем, аномально высокие значения соответствующих дисперсий показывают, что мы имеем дело со “статистичесими"выборками далеко не одновершинных распределений теории вероятностей.

В пределах $\varepsilon, \mu \to 0$ отображение (1.2) является симплектическим, т.е. сохраняет элемент площади на фазовой плоскости. Этот факт позволяет при малых ε и μ (в расчетах [**5**] использованы $\varepsilon, \mu \sim 10^{-5}$) ввести декомпозицию области захвата периодической орбиты периода n на n приблизительно равных частей. Оказывается, распределение Больцмана–Гиббса отвечает одной из этих n компонент. Таким образом, мы сталкиваемся при дискретизации динамики с принципом неопределенности, впервые введенном в квантовой механике. При попытке аппроксимировать непрерывные модели дискретными в нелинейных ситуациях мы сталкиваемся со всеми проблемами математической физики, приведшими к появлению квантовой механики и пр.

Такая декомпозиция позволяет говорить о симметриях динамики. Мы сталкиваемся с примером укладок Пенроуза в фазовом пространстве. Традиционно возникнув в виде кристаллографических решеток в физике твердого тела (где они поддаются перечислению в случае $\mathbb{R}^3$-группы Федорова), укладки в случае даже слабо-диссипативной динамики вряд ли могут быть описаны в полном виде. Тут речь идет о “спонтанно” возникающих симметриях в нелинейных динамических системах.

Безусловно, в ряде приложений интерес представляют лишь периодические орбиты с большими величинами статистических весов. Учет этого факта, естественно, сильно упрощает исследования и соответствующие численные расчеты. Вместе с этим с точки зрения выполнения “традиционных ручных” математических расчетов для анализа численных результатов проблема выглядит весьма трудной.

Вышеизложенное показывает, что численное исследование нелинейных уравнений математической физики является трудной задачей даже с учетом резко возросших производительностей современных ЭВМ. В данной работе сделаны некоторые шаги в направлении решения этой задачи. Вместе с этим, естественно, ожидать возрастания объема исследований в соответствующих областях математики и ее приложений. Сейчас на этих направлениях работают группы в Испании, Великобритании, Франции, Нидерландах.

В настоящее время интенсивно исследуется динамика, связанная с понятием странного аттрактора, появившаяся в теории динамических систем в 60-е годы. К сожалению, первые открытые странные аттракторы были тесно связаны с гиперболическими динамическими системами (зачастую в консервативной динамике; например, системы Аносова (см.[**1**]); здесь полезно назвать предшествующие примеры: системы Lorenz'а, Feigenbaum'а, Henon'а, Henon–Heiles'а). Обнаружение структур асимптотически (не)устойчивых периодических структур, лежащих в окрестности гиперболического, странного аттрактора, в рамках слабодиссипативной теории Колмогорова–Арнольда–Мозера позволяет привлечь к исследованиям современные математические методы теории нелинейных динамических систем.

1.3. Использование методов самоорганизации для решения дифференциальных уравнений

При исследовании дифференциальных уравнений математической физики были использованы и методы, обычно применяемые лишь в одном специальном случае — в теории оптимального управления. А именно, оказалось, что различные классы задач, математические модели которых описываются дифференциальными уравнениями, могут быть решены с помощью аппарата теории самоорганизации.

Рассмотрим применение этой теории к решению уравнений математической физики, в частности, к решению уравнения Шредингера. Исходная задача формулируется в виде краевой задачи. Известно [**18**], что в соответствии с рицовским методом волновое решение такой задачи представляется в виде вариационного ряда по показательным функциям, содержащим линейные и нелинейные коэффициенты, т.е. представленное полным базисом.

Самая лучшая стратегия заключается в том, чтобы решение само выбирало для себя подходящий базис разложения. Для оптимизации базиса необходимо преобразовать исходную краевую задачу, используя, например, методы Ритца или Бубнова–Галеркина, в задачу минимизации соответствующего функционала. Таким функционалом будет функционал энергии. Точное решение соответствует минимуму функционала.

Напомним, что искомое решение представляется в виде вариационного ряда. Наилучшее решение достигается при различных значениях линейных коэффициентов, которые определяются по МНК. Нелинейные коэффициенты, входящие в решение, определяются с помощью аппарата теории самоорганизации.

Схема решения таким методом следующая:

- строится статистическая выборка, т.е. варьируется входная величина и считается выходная величина, энергия E,
- статистическая выборка делится на две неравные части, которые называют обучающей и проверочной последовательностями,
- по обучающей последовательности с помощью МНК определяются линейные коэффициенты решения,
- по проверочной последовательности вычисляется внешний критерий регулярности.

Вычисление внешнего критерия регулярности требует определения энергии по выбираемому полиному, который постепенно усложняется.

Имеет место теорема: полином оптимальной сложности соответствует минимуму критерия и он глобальный.

- вычисляется оптимальный нелинейный коэффициент,
- для каждой текущей формы волновой функции рассчитывается энергия системы, которая сравнивается с теоретической оценкой $E = 0.5$,
- при достижении теоретической энергии с заданной точностью волновая функция считается найденной.

По подобной схеме могут быть решены и задачи, связанные с нахождением оптимального управления. Теория самоорганизации позволяет построить оптимальное управление в классе стандартной базисной ортонормированной системы функций. Одновременно решается задача определения размерности такого базиса.

Разрабатывается методология и теоретические обоснования сходимости соответствующих методов самоорганизации.

Предлагаемый аппарат апробируется на частных задачах оптимального управления. В работе **[23]** рассматривается задача выбора оптимальных режимов движения ЛА по критерию дальности полета. Решение подобной задачи традиционными методами теории оптимального управления связано со значительными вычислительными трудностями и при этом для применения таких методов необходимо значительные упрощения и допущения в исходной математической модели. Особое место здесь занимает проблема выбора параметров используемого метода оптимизации, от чего в значительной степени зависит сходимость процесса решения задачи.

Авторами предлагается подход к решению такого класса задач, основанный на восстановлении оптимального управления нелинейной регрессией, которой аппроксимируется исходный режим движения. Итерационный алгоритм построен на последовательно улучшаемых псевдовыборках по показателю дальности.

В работе **[25]** рассматривается актуальная задача построения системы ЛА оптимального типажа. Задачи такого класса возникают в условиях множества целевых задач с заданным набором характеристик. Например, целевая задача может описываться набором полезных нагрузок, которые необходимо вывести на орбиту с заданными параметрами. Очевидно, что создавать под каждую полезную нагрузку специализированный ЛА, также, как выводить весь заданный диапазон полезных нагрузок одним универсальным ЛА, экономически невыгодно. Следовательно, оптимальной является некоторая система ЛА, рациональным образом распределяющая между собой весь диапазон полезных нагрузок.

Данная задача решалась с помощью выбора оптимальной эпюры тяги ДУ в функции от полезной нагрузки. Оптимальная эпюра аппроксимировалась стандартными значениями тяг, в результате чего формировалась система оптимального типажа.

Выбор управляемого движения ЛА обычно осуществляется по какому-либо функционалу, отражающему качество функционирования ЛА. Как правило, такой функционал не единственен и здесь возникает проблема неопределенности, связанная с многокритериальным выбором.

Одним из эффективных способов раскрытия такой неопределенности является введение, так называемого, обобщенного функционала, отражающего вероятность выполнения задачи. Все частные критерии оптимальности задач входят в виде пределов интегрирования кратного интеграла, входящего в обобщенный функционал. При этом соответствующие частные функционалы моделируются неконтролируемыми факторами с заданным диапазоном изменения. В работе [**24**] доказывается, что условием оптимальности по управлению является максимум функционала вероятности выполнения задачи. Подобное раскрытие многокритериальной неопределенности особенно удобно при решении задачи синтеза оптимального управления. В этом случае, начальный вектор фазового состояния ЛА также может быть отнесен к классу неконтролируемых факторов с заданным диапазоном изменения. С использованием данного подхода была решена практическая задача синтеза оптимального управления КЛА, качество которого оценивалось по двум частным критериям оптимальности масса аппарата и его надежность, на которой была показана практическая сходимость метода.

1.4. Перенос многообразия фазовым потоком динамической системы

Еще одним направлением исследования было построение и изучение разложений фазового потока системы дифференциальных уравнений в ряд Тейлора и применения таких разложений к решению некоторых прикладных задач. Необходимость переноса гладкого многообразия, заданного в фазовом пространстве обыкновенного дифференциального уравнения, фазовым потоком этого уравнения возникает в целом ряде задач математической физики. Приведем в качестве примера два класса таких задач.

Встречаются ситуации, когда нас интересует образ не одной фазовой точки, а целого многообразия под действием фазового потока. Например, при расчете параметров пучка заряженных частиц в электромагнитном поле начальное распределение частиц, составляющих пучок, по координатам и скоростям задается некоторой областью в фазовом пространстве уравнений движения частиц. Если нас интересует состояние пучка в последующие моменты времени, мы должны уметь следить за развитием этой области. Классический подход в задачах такого рода состоит в том, чтобы дискретизировать начальную область, заменив ее конечным числом точек, распределенных по ней равномерно или с учетом какого-либо эмпирического веса, и рассчитать конечное число траекторий, выпущенных из этих дискретных точек. Затем в каждый интересующий нас момент мы должны усреднить полученную дискретную информацию и перейти от нее к гладкому многообразию. Чтобы это удалось сделать с приемлемой точностью, приходится брать достаточно большое число точек дискретизации. Недостатком этого подхода являются большие вычислительные затраты. Предлагаемые алгоритмы переноса многообразия как целого (без дискретизации) экономичнее с этой точки зрения.

Второй класс задач, требующих переноса многообразий, — это краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Для краевых задач, в отличие от начальных, нетривиальным является вопрос о существовании и единственности решения. Алгоритмы переноса многообразий могут помочь в решении этого вопроса, а также свести краевую задачу к начальной. Поясним сказанное на примере. Рассмотрим двухточечную краевую задачу

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{1}{y}, \\ \dot{y} = \dfrac{1}{x}, \end{cases} \tag{1.3}$$

$$xy = 2 \quad \text{при } t = 0, \tag{1.4}$$

$$y = 2(2 - x) \quad \text{при } t = 1. \tag{1.5}$$

Краевое условие (1.4) порождает многообразие Γ_1, а (1.5) — Γ_2. Образ Γ_1' кривой Γ_1 при $t = 1$ имеет одну точку пересечения с кривой Γ_2 (это будет показано ниже), что означает существование одного решения краевой задачи (1.3)–(1.5). Т.к. в силу диффеоморфности фазового потока через каждую регулярную фазовую точку проходит одна и только одна траектория, то, желая получить решение задачи (1.3)–(1.5) при всех t, мы должны решить задачу Коши с начальными условиями $x = \tilde{x}$, $y = \tilde{y}$ при $t = 1$, где $(\tilde{x}, \tilde{y})$ — точка пересечения Γ_1' с Γ_2.

Итак, число точек пересечения образа многообразия Γ_1, задающего краевое условие на левом конце, при переносе на правый конец с многообразием Γ_2, задающим условие на правом конце, и есть число решений исходного уравнения. Нахождение этих точек позволяет свести краевую задачу к начальной.

Рассмотрим уравнение

$$\dot{x} = f(x, t), \quad x \in G \subset \mathbb{R}^N, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1.6}$$

Уравнение (1.6) порождает двухпараметрическое семейство отображений $g(t_0, t, x)$ N-мерного фазового пространства G в себя, называемое фазовым потоком этого уравнения (см. [**2**]).

Фазовым потоком обыкновенного дифференциального уравнения (1.6) называется семейство диффеоморфизмов $g(t_0, , x)$, запараметризованное двумя скалярными параметрами ($t_0, t \in \mathbb{R}$), действующих из G в G по правилу: $g(t_0, t, x)$ есть решение задачи Коши для уравнения (1.6) с начальным условием $g(t_0, t, x)\big|_{t=t_0} = x$.

Рассмотрим некоторое гладкое многообразие в G, задаваемое уравнением

$$\varphi(x) = C = \text{const}, \tag{1.7}$$

где φ — гладкая скалярная функция, действующая из G в $\mathbb{R}$. Каждая функция $\varphi(x)$ порождает семейство перенесенных функций $\varphi_t(x)$, действующих из G в $\mathbb{R}$ по правилу:

$$\varphi_t(x) = \varphi(g(t, t_0, x)). \tag{1.8}$$

Такое определение перенесенной функции φ_t было впервые введено в работе [**8**]. Чтобы вычислить значение функции φ_t в точке x, надо найти ее прообраз $x_0 = g(t, t_0, x)$ и вычислить $\varphi(x_0)$.

Из определения перенесенных функций следует, что образом многообразия (1.7) при действии фазового потока $g(t_0, t, x)$ в каждый момент t будет многообразие, задаваемое уравнением

$$\varphi_t(x) = C.$$

Действительно, возьмем произвольную точку x_0 на многообразии (1.7). Ее образ $g(t_0, t, x_0)$, очевидно, удовлетворяет уравнению (1.8), так как

$$\varphi_t(g(t_0, t, x_0)) = \varphi(g(t, t_0, g(t_0, t, x_0))) = \varphi(x_0) = C.$$

И обратно, для произвольной точки x на многообразии (1.8) ее прообраз $g(t, t_0, x)$ будет принадлежать многообразию (1.7), т.к. $\varphi(g(t, t_0, x)) = \varphi_t(x) = C$.

Вернемся к примеру, приведенному в начале настоящего параграфа. Рассмотрим фазовый поток уравнения (1.3) и функцию, задающую многообразие (1.4):

$$\varphi(x) = xy.$$

Для решения краевой задачи (1.3)–(1.5) нам надо получить образ этой функции $\varphi_t(x)$ при $t = 1$. На основании определения перенесенной функции и того, что поток $x = g(t_0, t, x_0)$ и обратный поток

$x_0 = g(t, t_0, x)$ имеют вид

$$x = \sqrt{\frac{2x_0}{y_0}t + x_0^2}, \qquad y = \sqrt{\frac{2y_0}{x_0}t + y_0^2},$$
$$x_0 = \sqrt{x^2 - \frac{2tx}{y}}, \qquad y_0 = \sqrt{y^2 - \frac{2ty}{x}},$$

получим искомую функцию

$$\varphi_t(x) = xy - 2.$$

Вычислив координаты точки пересечения кривой $\varphi_t(x, y)\big|_{t=1} = 2$ и прямой $y = 2(x-2)$, получим: $\tilde{x} = 1 + \sqrt{3}$, $\tilde{y} = 2(\sqrt{3} - 1)$. Следует отметить, что решением данной краевой задачи будет движение по фазовой прямой Γ_3, проходящей через точку $(\tilde{x}, \tilde{y})$ и задаваемой уравнением $y = (4 - 2\sqrt{3})x$, по закону $x = \sqrt{(2+\sqrt{3})(t+1)}$, $y = 2\sqrt{(2-\sqrt{3})(t+1)}$.

Фазовый поток уравнения в большинстве реальных задач неизвестен. При этом воспользоваться непосредственно перенесенными функциями не удается. В этом случае помочь может локальный подход. Рассмотрим некоторую фазовую кривую уравнения (1.6):

$$x = g(t_0, t, x_0), \quad \text{где } t \in \mathbb{R}; \quad t_0, x_0 \text{ — фиксированы.} \tag{1.9}$$

Функцию $\varphi_t(x)$ вблизи траектории (1.9) можно аппроксимировать по формуле Тейлора

$$\varphi_t(x) = \varphi(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} Z^{(k)}_{i_1,\dots,i_k} (x^{i_1} - G^{i_1}) \dots (x^{i_k} - G^{i_k}) + O(\|x - g(t_0, t, x_0)\|^{n+1}), \tag{1.10}$$

где

$$Z^{(k)}_{i_1,\dots,i_k} = \frac{\partial^k \varphi_t(x)}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_k}}\bigg|_{x=g(t_0,t,x)}, \quad C^j = g^j(t_0, t, x_0).$$

Первое слагаемое в формуле (1.10) объясняется тем, что, как следует из определения перенесенной функции, $\varphi_t(g(t_0, t, x_0)) = \varphi(x_0)$. В формуле (1.10), как и всюду далее, по индексам, встречающимся дважды — сверху и снизу, подразумевается суммирование.

Таким образом, из формулы (1.10) следует, что задача локального переноса функции $\varphi(x)$ вблизи траектории (1.9) сводится к получению алгоритмов вычисления производных функции $\varphi_t(x)$ по фазовому вектору на траектории (1.9).

Предлагаются два алгоритма вычисления производных функции $\varphi_t(x)$ по фазовому вектору x на траектории (1.9) уравнения (1.6).

Здесь и далее используются следующие обозначения:

$$x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^N \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} x_0^1 \\ \vdots \\ x_0^N \end{pmatrix}, \quad G := g(t_0, t, x_0) = \begin{pmatrix} g^1(t_0, t, x_0) \\ \vdots \\ g^N(t_0, t, x_0) \end{pmatrix},$$

$$(G^1)^i_j := \frac{\partial g^i(t_0, t, x_0)}{\partial x_0^j},$$

$(G^{-1})^i_j$ — элемент матрицы, обратной к G^1, стоящий на пересечении i-й строки и j-го столбца,

$$\varphi^{(k)}_{i_1 \ldots i_k} := \frac{\partial^k \varphi(x)}{\partial x^{i_1} \ldots \partial x^{i_k}}, \qquad Z^{(k)}_{i_1 \ldots i_k} := \frac{\partial^k \varphi_t(x)}{\partial x^{i_1} \ldots \partial x^{i_k}},$$

$$(G^k)^i_{j_1 \ldots j_k} := \frac{\partial^k g^i(t_0, t, x_0)}{\partial x_0^{j_1} \ldots \partial x_0^{j_k}}, \qquad F^l_{i_1 \ldots i_k} := \frac{\partial^l f(x)}{\partial x^{i_1} \ldots \partial x^{i_k}}.$$

Алгоритм 1. Приведем явные рекуррентные формулы, выражающие производные функции $\varphi_t(x)$ 1-го, 2-го, 3-го и 4-го порядков через производные функции $\varphi(x)$ и фазового потока $g(t_0, t, x_0)$:

$$Z^{(1)}_i = \varphi^{(1)}_m (G^{-1})^m_i, \tag{1.11}$$

$$Z^{(2)}_{ij} = \left[\varphi^{(2)}_{mp} - Z^{(1)}_n (G^2)^n_{mp}\right] (G^{-1})^m_i (G^{-1})^p_j, \tag{1.12}$$

$$\begin{aligned} Z^{(3)}_{ijk} = \Big\{ &\varphi^{(3)}_{mp\xi} - Z^{(2)}_{ns} \left[(G^2)^s_{\xi m}(G^1)^n_p + (G^2)^s_{\xi p}(G^1)^n_m + (G^2)^s_{mp}(G^1)^n_\xi\right] \\ &- Z^{(1)}_n (G^3)^n_{\xi mp} \Big\} (G^{-1})^\xi_i (G^{-1})^m_j (G^{-1})^p_k, \end{aligned} \tag{1.13}$$

$$\begin{aligned} Z^{(4)}_{ijkl} = \Big\{ &\varphi^{(4)}_{mpqr} - Z^{(3)}_{ns\xi} \left[(G^2)^n_{mp}(G^1)^s_q(G^1)^\xi_r + (G^2)^n_{mq}(G^1)^s_p(G^1)^\xi_r \right. \\ &+ (G^2)^n_{mr}(G^1)^s_p(G^1)^\xi_q + (G^2)^n_{pq}(G^1)^s_m(G^1)^\xi_r + (G^2)^n_{pr}(G^1)^s_m(G^1)^\xi_q \\ &\left. + (G^2)^n_{qr}(G^1)^s_m(G^1)^\xi_p\right] - Z^{(2)}_{ns} \left[(G^3)^n_{mpq}(G^1)^s_r + (G^3)^n_{mpr}(G^1)^s_q \right. \\ &+ (G^3)^n_{mqr}(G^1)^s_p + (G^3)^n_{pqr}(G^1)^s_m + (G^2)^n_{mp}(G^2)^s_{qr} + (G^2)^n_{mq}(G^2)^s_{pr} \\ &\left. + (G^2)^n_{mr}(G^2)^s_{pq}\right] - Z^{(1)}_n (G^4)^n_{mpqr} \Big\} (G^{-1})^m_i (G^{-1})^p_j (G^{-1})^q_k (G^{-1})^r_l. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Теорема 1. *Производные функции $\varphi_t(x)$ по фазовому вектору x на траектории (1.9) удовлетворяют следующим рекуррентным* *соотношениям:*

$$Z^{(n)}_{i_1\dots i_n} = \Bigg[\varphi^{(n)}_{j_1\dots j_n} - \sum_{r=1}^{n-1} Z^{(r)}_{k_1\dots k_r} \sum_{\substack{1\le\alpha_1\le\dots\le\alpha_r\le n\\ \alpha_1+\dots+\alpha_r=n}} \sum_{\substack{\{j^1_1,\dots,j^1_{\alpha_1}\}\\ \dots\\ \{j^r_1,\dots,j^r_{\alpha_r}\}}} (G^{\alpha_1})^{k_1}_{j^1_1\dots j^1_{\alpha_1}} \dots (G^{\alpha_r})^{k_r}_{j^r_1\dots j^r_{\alpha_r}}\Bigg] \times (G^{-1})^{j_1}_{i_1}\dots(G^{-1})^{j_n}_{i_n}, \quad (1.15)$$

где третья сумма берется по всевозможным вариантам r наборов индексов $\{j^1_1,\dots,j^1_{\alpha_1}\},\dots,\{j^r_1,\dots,j^r_{\alpha_r}\}$, которые выбираются из набора $\{j_1,\dots,j_n\}$, в каждом варианте перебирающегося полностью без повторений, а числа в каждом наборе $\{j^m_1,\dots,j^m_{\alpha_m}\}$, $m=1,\dots,n-1$, располагаются в порядке неубывания.

Расположение чисел в каждом наборе $\{j^m_1,\dots,j^m_{\alpha_m}\}$, $m = 1,\dots,n-1$, в порядке неубывания позволяет исключить возможность получения новых комбинаций индексов путем перестановок в старых комбинациях. Необходимость такого ограничения вызвана тем, что операции дифференцирования по разным компонентам фазового вектора, очевидно, коммутируют.

Для использования формулы (1.15) (или ее частных случаев (1.11)–(1.14)) необходимо знать производные фазового потока по начальным данным на траектории (1.9). Уравнения, которым они удовлетворяют, имеют вид:

$$\begin{aligned}
(\dot G^1)^i_j &= F^i_k (G^1)^k_j,\\
(\dot G^2)^i_{jk} &= F^i_l (G^2)^l_{jk} + F^i_{lm}(G^1)^k_j (G^1)^m_k,\\
(\dot G^3)^i_{jkl} &= F^i_m (G^3)^m_{jkl} + F^i_{mp}\big[(G^2)^m_{jk}(G^1)^p_l\\
&\quad +(G^2)^m_{jl}(G^1)^p_k + (G^2)^m_{kl}(G^1)^p_j\big] + F^i_{mpq}(G^1)^m_j(G^1)^p_k(G^1)^q_l,\\
(\dot G^4)^i_{jklm} &= F^i_n (G^4)^n_{jklm} + F^i_{np}\big[(G^3)^n_{ikl}(G^1)^p_m + (G^3)^n_{jkm}(G^1)^p_l\\
&\quad + (G^3)^n_{jlm}(G^1)^p_k + (G^3)^n_{klm}(G^1)^p_j + (G^2)^n_{jk}(G^2)^p_{lm}\\
&\quad +(G^2)^n_{jl}(G^2)^p_{km} + (G^2)^n_{jm}(G^2)^p_{kl}\big] + F^i_{npq}\big[(G^2)^n_{jk}(G^1)^p_l(G^1)^q_m\\
&\quad +(G^2)^n_{jl}(G^1)^p_k(G^1)^q_m + (G^2)^n_{jm}(G^1)^p_k(G^1)^q_l + (G^2)^n_{kl}(G^1)^p_j(G^1)^q_m\\
&\quad +(G^2)^n_{km}(G^1)^p_j(G^1)^q_l + (G^2)^n_{ml}(G^1)^p_k(G^1)^q_j\big]\\
&\quad + F^i_{npq\gamma}(G^1)^n_j(G^1)^p_k(G^1)^q_l(G^1)^\gamma_m.
\end{aligned}$$

В общем случае имеет место формула

$$(\dot{G}^n)^i_{j_1\ldots j_n} = \sum_{r=1}^{n} F^i_{k_1\ldots k_r} \sum_{\substack{1\le\alpha_1\le\ldots\le\alpha_r\le n\\ \alpha_1+\ldots+\alpha_r=n}} \sum_{\substack{\{j^1_1,\ldots,j^1_{\alpha_1}\}\\ \ldots\\ \{j^r_1,\ldots,j^r_{\alpha_r}\}}} (G^{\alpha_1})^{k_1}_{j^1_1\ldots j^1_{\alpha_1}} \ldots (G^{\alpha_r})^{k_r}_{j^r_1\ldots j^r_{\alpha_r}}. \tag{1.16}$$

Производная фазового потока n-го порядка по начальному значению фазового вектора удовлетворяет уравнению (1.16), а также начальному условию

$$(G^n)^i_{j_1\ldots j_n}\Big|_{t=0} = 0 \quad \text{при } n > 1 \text{ и } \quad (G^1)^j_i = \delta^i_j.$$

Алгоритм 2. Приведем линейные обыкновенные дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют производные функции $\varphi_t(x)$ порядков $1, 2, 3$ и 4 (см. [**8, 7**]):

$$\dot{Z}^{(1)}_i = -Z^{(1)}_m F^m_i, \tag{1.17}$$

$$\dot{Z}^{(2)}_{ij} = -Z^{(2)}_{mi} F^m_j - Z^{(2)}_{mj} F^m_i - Z^{(1)}_m F^m_{ij}, \tag{1.18}$$

$$\begin{aligned}\dot{Z}^{(3)}_{ijk} &= -Z^{(3)}_{mji} F^m_k - Z^{(3)}_{mik} F^m_j - Z^{(3)}_{mjk} F^m_i - Z^{(2)}_{mi} F^m_{jk} - Z^{(2)}_{mj} F^m_{ik} \\ &\quad - Z^{(2)}_{mk} F^m_{ij} - Z^{(1)}_m F^m_{ijk},\end{aligned} \tag{1.19}$$

$$\begin{aligned}\dot{Z}^{(4)}_{ijkl} &= -Z^{(4)}_{mijk} F^m_l - Z^{(4)}_{mikl} F^m_j - Z^{(4)}_{mijl} F^m_k - Z^{(4)}_{mjkl} F^m_i - Z^{(3)}_{mij} F^m_{kl} \\ &\quad - Z^{(3)}_{mik} F^m_{jl} - Z^{(3)}_{mil} F^m_{jk} - Z^{(3)}_{mjk} F^m_{il} - Z^{(3)}_{mjl} F^m_{ik} - Z^{(3)}_{mkl} F^m_{ij} - Z^{(2)}_{mi} F^m_{jkl} \\ &\quad - Z^{(2)}_{mj} F^m_{ikl} - Z^{(2)}_{mk} F^m_{ijl} - Z^{(2)}_{ml} F^m_{ijk} - Z^{(1)}_m F^m_{ijkl}.\end{aligned} \tag{1.20}$$

К приведенным уравнениям естественно добавить следующие начальные условия:

$$\begin{aligned} Z^{(1)}_i\Big|_{t=t_0} &= \varphi^{(1)}_i, \\ Z^{(2)}_{ij}\Big|_{t=t_0} &= \varphi^{(2)}_{ij}, \\ Z^{(3)}_{ijk}\Big|_{t=t_0} &= \varphi^{(3)}_{ijk}, \\ Z^{(4)}_{ijkl}\Big|_{t=t_0} &= \varphi^{(4)}_{ijkl}. \end{aligned}$$

Приведем формулировку результата, обобщающего равенств (1.17)–(1.20).

Теорема 2. *Производные функции $\varphi_t(x)$ на траектории* (1.9) *являются решениями следующих задач Коши:*

$$\dot{Z}^{(n)}_{i_1\ldots i_n} = -\sum_{r=1}^{n} \sum_{\{i_1^r,\ldots,i_{r-1}^r\}} Z^{(r)}_{l i_1^r \ldots i_{r-1}^r} F^l_{i_r^r \ldots i_n^r}, \tag{1.21}$$

$$Z^{(n)}_{i_1\ldots i_n}\Big|_{t=t_0} = \varphi^{(n)}_{i_1\ldots i_n}, \tag{1.22}$$

где вторая сумма в (1.21) *берется по всевозможным выборкам по* $r-1$ *индексу из набора* $\{i_1,\ldots,i_n\}$, $\{i_r^r,\ldots,i_n^r\}$ *— индексы, оставшиеся от набора* $\{i_1,\ldots,i_n\}$ *и все индексы в наборах располагаются в порядке неубывания.*

Отметим, что для решения начальной задачи (1.21)–(1.22) не требуется знать производные фазового потока по начальным данным. Это свойство алгоритма 2 является его преимуществом перед алгоритмом 1. Еще одно преимущество второго алгоритма перед первым состоит в том, что число уравнений в системе (1.21) в n раз меньше, чем в системе (1.16) при том же n за счет симметрии по нижним индексам. Однако, уравнения в системах (1.16) при различных n отличаются друг от друга лишь неоднородностью, чего нельзя сказать об уравнениях (1.21). Это свойство дает преимущество при использовании алгоритма 1, т.к. позволяет выразить решение любого из неоднородных уравнений в системе (1.16) в квадратурах через фундаментальную матрицу соответствующего однородного уравнения в вариациях (см., например, [**2**]).

РАЗДЕЛ 2

Методы оптимального восстановления значений функций и функционалов

При решении многих задач математической физики и особенно при их численной реализации естественным образом возникают задачи, связанные с дискретизацией функций, восстановлением функций или функционалов от них по некоторой ограниченной информации о функции, заданной, вообще говоря, приближенно. Такого рода задачи, интенсивно изучающиеся в последнее время (особенно в связи с развитием компьютерной техники) составляют новое направление, получившее название — оптимальное восстановление. Круг исследуемых в этой области проблем содержит такие важные задачи, как построение оптимальных методов восстановления функций, заданных точно или приближенно в конечном числе точек, построение оптимальных квадратурных формул, восстановление производных (численное дифференцирование), выбор оптимальным образом информации, которую необходимо знать о функции, чтобы с наименьшей погрешностью восстановить ее, аппроксимация функции по ее приближенным коэффициентам Фурье и др.

Если при классическом подходе, как правило, задаются средства приближения (алгебраические или тригонометрические полиномы, рациональные функции, сплайны, вейвлеты и др.), то в задачах оптимального восстановления вид метода восстановления заранее не фиксируется — он ищется среди всевозможных методов (алгоритмов), использующих значения аппроксимируемой функции. Важность такой постановки обусловлена тем, что при фиксированной информации выбирается наилучший способ приближения функции или функционала (в последнем случае речь может идти, например, об оптимальных методах интегрирования).

Хорошо известна роль в приложениях результатов Котельникова и Картрайт о формулах, точно восстанавливающих целые функции по их значениям в равномерной сетке. Однако для аналитических в полосе функций точного восстановления по той же информации не существует. Тем не менее можно говорить о наилучшем способе восстановления. Еще одно важное направление — построение аналогов формул Котельникова и Картрайт для аналитических функций.

Другой круг задач связан с вопросом об оптимальном выборе информации. Например, как лучше расположить точки, в которых следует измерять значения функции, чтобы восстановить ее с минимальной погрешностью? Существуют ли функционалы, информация о значениях которых более полезна, чем информация о значениях в точках (естественно, при одинаковом их объеме)? Что лучше знать о периодической функции — значения в любом фиксированном наборе точек или коэффициенты Фурье? Задачи, возникающие здесь, тесно связаны с классическими аппроксимационными характеристиками такими, как колмогоровские, линейные, гельфандовские и бернштейновские n-поперечники.

2.1. Общая постановка задач восстановления

Как правило, существует много способов решения одной и той же задачи. Как сравнивать различные методы решения и что означает решить задачу оптимальным образом? Предположим, что у нас имеется множество методов (алгоритмов) $\mathcal{M}$ для решения задачи p. Каждый метод использует некоторую информацию Ip о задаче p. Для того, чтобы иметь возможность сравнивать различные методы, сопоставим каждому методу число, характеризующее погрешность решения рассматриваемой задачи данным методом. Обозначим это число через $e(p, I, m)$.

Обычно нам требуется решить не одну задачу, а несколько задач одного и того же типа. Обозначим множество задач, которые мы хотим решить, через $\mathcal{P}$. Если требуется найти метод, для которого погрешность решения была бы как можно меньше сразу для всех задач из множества P, то мы приходим к следующей экстремальной задаче: найти значение

$$e(\mathcal{P}, I, \mathcal{M}) := \inf_{m\in\mathcal{M}} \sup_{p\in\mathcal{P}} e(p, I, m)$$

и метод, на котором нижняя грань достигается. Всякий такой метод называется *оптимальным* методом.

Если величина $e(\mathcal{P}, I, \mathcal{M})$ не достаточно мала, то можно попытаться найти другой тип информации, знание которого даст лучшую погрешность. Иными словами, можно рассмотреть задачу о нахождении величины

$$\inf_{I\in\mathcal{I}} e(\mathcal{P}, I, \mathcal{M}),$$

где $\mathcal{I}$ — некоторое множество информационных операторов. Всякий оператор, на котором достигается нижняя грань, будем называть *оптимальным* информационным оператором.

Рассмотрим несколько примеров.

1. Оптимальная интерполяция. Пусть W — некоторый класс функций, определенных в области D. Обозначим через p_f задачу нахождения значения $f(t)$, $t \in D$, для функции $f \in W$. Положим

$$Ip_f = (f(t_1), \dots, f(t_n)), \quad t_j \in D.$$

Пусть $\mathcal{M}$ — множество всех функций $m\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ (или $m\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ в вещественном случае). Тогда мы получаем следующую задачу

$$e(t, W, I) := \inf_{m\colon \mathbb{C}^n\to\mathbb{C}} \sup_{f\in W} |f(t) - m(Ip_f)|.$$

Эта задача носит название задачи об *оптимальном восстановлении* $f \in W$ в точке t по информации о значениях $f(t_1), \dots, f(t_n)$.

2. Оптимальное интегрирование. Пусть p_f — задача о нахождении интеграла

$$\int_a^b f(t)\,dt$$

для функции $f \in W$, а Ip_f и $\mathcal{M}$ те же, что и в предыдущей задаче. Тогда мы получаем задачу об *оптимальном интегрировании* функции f на классе W по значениям в фиксированной системе узлов

$$e(W, I) := \inf_{m\colon \mathbb{C}^n\to\mathbb{C}} \sup_{f\in W} \left| \int_a^b f(t)\,dt - m(Ip_f) \right|.$$

Если рассмотреть множество $\mathcal{M}_0$, содержащее только линейные функционалы m, то придем к задаче об оптимальной квадратурной формуле. Можно также минимизировать введенную величину по всем узлам из отрезка $[a, b]$. Тогда получится задача об оптимальных узлах для оптимального метода интегрирования.

Подобная задача может быть рассмотрена для произвольного линейного функционала Lf. В частности, для $Lf = f'(t)$ мы получаем задачу об оптимальном численном дифференцировании.

3. n-поперечники. Пусть X — нормированное линейное пространство, p_x — задача о нахождении $x \in W \subset X$ с помощью

конечномерных подпространств X. Здесь $Ip_x = x$, $\mathcal{M}$ — множество отображений $m\colon X \to Y_n$, $\dim Y_n \le n$. Положив $e(p_x, I, m) = \|x - m(x)\|_X$, мы получим задачу о нахождении величины

$$d_n(W, X) := \inf_{Y_n} \inf_{y \in Y_n} \sup_{x \in W} \|x - y\|_X,$$

которая известна, как колмогоровский n-поперечник. Когда $\mathcal{M}$ является множеством линейных отображений, соответствующая величина называется линейным n-поперечником.

Перейдем к постановке общей задачи о восстановлении. Под многозначным отображением $F\colon W \to V$ будем понимать отображение, которое сопоставляет каждому $x \in W$ непустое множество $F(x) \subset V$. Множество

$$\operatorname{gr} F := \{\, (x, y) : x \in W,\ y \in F(x) \,\}$$

называется *графиком* отображения F.

Общая задача об оптимальном восстановлении операторов по неточной информации может быть поставлена следующим образом. Пусть X — линейное пространство, Z — линейное нормированное пространство и $L\colon X \to Z$ — линейный оператор. Мы хотим восстановить значения оператора L на множестве $W \subset X$ по информации о значениях многозначного оператора $F\colon W \to V$.

Многозначность оператора F моделирует погрешность в задании информации об элементах из W. Если F — однозначное отображение, то говорят об оптимальном восстановлении по точным значениям. Обычно мы рассматриваем случай, когда $F(x) = Ix + U$, где $I\colon X \to Y$ — линейный оператор, Y — линейное пространство, а U — фиксированное множество из Y. Оператор I называется *информационным оператором.* Например, если Y — линейное нормированное пространство, то можно положить $U := \{y \in Y : \|y\| \le \delta\}$. В этом случае мы говорим, что информационный оператор задан с погрешностью δ.

Под методом (или алгоритмом) восстановления оператора L понимается произвольное отображение $\varphi\colon F(W) \to Z$. Тем самым мы получаем следующую диаграмму

$$\begin{tikzcd} X \supset W \arrow[rr, "L"] \arrow[dr, "F"'] & & Z \\ & F(W) \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

Погрешностью метода φ называется величина

$$e(L,F,\varphi) := \sup_{(x,y)\in \operatorname{gr} F} \|Lx-\varphi(y)\|.$$

Пусть задано множество методов $\mathcal{S}$. Положим

$$e(L,F,\mathcal{S}) := \inf_{\varphi\in\mathcal{S}} e(L,F,\varphi). \tag{2.1}$$

Предположим, что надо восстановить семейство операторов $\mathcal{L}$, а отображения F можно выбирать из множества $\mathcal{F}$. Положим

$$e(\mathcal{L},\mathcal{F},\mathcal{S}) := \inf_{F\in\mathcal{F}} \sup_{L\in\mathcal{L}} e(L,F,\mathcal{S}). \tag{2.2}$$

Рассмотрим несколько примеров задач (2.1) и (2.2). Обозначим через $\mathcal{E}$ множество всевозможных методов $\varphi\colon F(W)\to Z$. Предположим, что $\mathcal{S}=\mathcal{E}$ и W — некоторый класс вещественнозначных или комплекснозначных функций, определенных на множестве G. Положим $\tau := (t_1,\dots,t_n)$, $t_j\in G$,

$$I_\tau x := \{\, x(t_1),\dots,x(t_n)\,\},$$

и $F=F_\tau := I_\tau + \delta B_n$, где B_n — единичный шар пространств $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{C}^n$, в которых введена некоторая норма.

Тогда для $Lx = L_t x := x(t)$, $t\in G$, задача (2.1) является задачей оптимального восстановления функции $x\in W$ в точке t по значениям этих функций, заданных с погрешностью δ в системе точек τ.

Если $E\subset G$ и

$$\mathcal{L} = \{\, L_t : t\in E\,\}, \qquad \mathcal{F} = \{\, F_\tau : \tau\in E^n\,\},$$

то (2.2) является задачей оптимального восстановления функций из W на множестве E по значениям, заданным с погрешностью δ.

Если

$$Lx = \int_E x(t)\,dt,$$

тогда (2.1) является задачей о наилучшем методе интегрирования, использующем приближенные значения x в фиксированной системе узлов, а задача (2.2) с $\mathcal{L}=\{L\}$ это задача об оптимальном методе интегрирования (или задача оптимального выбора узлов).

Предложенная схема включает в себя также и ряд других хорошо известных задач теории приближения таких, как оптимальное восстановление производных, оптимальное восстановление по коэффициентам Фурье, приближение неограниченных операторов ограниченными, n-поперечники и т.д.

Рассмотрим более подробно постановки задач об n-поперечниках. Обозначим через $\mathcal{E}_n$ множество всех операторов из $F(W)$ в Z

ранга не выше n. Через $\mathcal{E}_n^\lambda$ обозначим множество всех линейных операторов не выше n, которые отображают любые пространства, содержащие $F(W)$ в Z. Положим

$$d_n(L,F) := e(L,F,\mathcal{E}_n), \qquad \lambda_n(L,F) := e(L,F,\mathcal{E}_n^\lambda).$$

Если $F^{-1}(0) \neq \emptyset$ (отображение F^{-1} — многозначное отображение, определенное равенством $F^{-1}(y) := \{x \in W : (x,y) \in \operatorname{gr} F\}$), тогда

$$\lambda_n(L,F) \geq \inf_{\varphi \in \mathcal{E}_n^\lambda} \sup_{\substack{(x,y)\in \operatorname{gr} F \\ \varphi(y)=0}} \|Lx\| =: d^n(L,F).$$

Положим $I_\delta := Ix + \delta BY$, где $I\colon W \to Y$ — линейный оператор, $\delta \geq 0$ и

$$BY := \{\, y \in Y : \|y\| \leq 1 \,\}.$$

Тогда при $F = I_\delta$ и $L = Id$ (Id — тождественное отображение) определим величины

$$d_n(W,X,I,\delta) := d_n(Id,I_\delta), \quad \lambda_n(W,X,I,\delta) := \lambda_n(Id,I_\delta),$$
$$d^n(W,X,I,\delta) := d^n(Id,I_\delta).$$

При $\delta = 0$ и $L = Id$ величины

$$d_n(W,X) := d_n(W,X,Id,0), \quad \lambda_n(W,X) := \lambda_n(W,X,Id,0),$$
$$d^n(W,X) := d^n(W,X,Id,0)$$

хорошо известны в теории аппроксимации. Они называются колмогоровским, линейным и гельфандовским n-поперечниками, соответственно.

2.2. Оптимальное восстановление многозначных отображений

Задача (2.1) может быть сведена к более общей задаче, связанной с оптимальным восстановлением многозначных отображений. Положив $\Phi(y) := L(F^{-1}(y))$, можно легко показать, что

$$e(L,F,\varphi) = \sup_{(y,z)\in \operatorname{gr}\Phi} \|z - \varphi(y)\|.$$

Сформулируем теперь общую задачу оптимального восстановления многозначного отображения однозначным отображением. Пусть $\Phi\colon A \to Z$ — многозначное отображение, Z — линейное нормированное пространство и $\varphi\colon A \to Z$ — однозначное отображение (метод восстановления Φ). Положим

$$E(\Phi,\varphi) := \sup_{(y,z)\in \operatorname{gr}\Phi} \|z - \varphi(y)\|.$$

Предположим, что $\mathcal{S}$ — некоторое множество однозначных отображений $\varphi\colon A \to Z$. Величина

$$E(\Phi, \mathcal{S}) := \inf_{\varphi \in \mathcal{S}} E(\Phi, \varphi). \tag{2.3}$$

называется погрешностью восстановления Φ. Метод, на котором нижняя грань достигается, называется оптимальным методом восстановления.

Положим

$$E(\Phi) := E(\Phi, \mathcal{E}),$$

где $\mathcal{E}$ — множество всевозможных однозначных отображений A в Z.

Величина

$$R(\Phi) := \sup_{y \in A} \inf_{c \in Z} \sup_{z \in \Phi(y)} \|z - c\|,$$

которая называется радиусом многозначности Φ тесно связана задачей (2.3) при $S = \mathcal{E}$. Радиус многозначности — это максимальный чебышевский радиус множеств $\Phi(y)$, когда $y \in A$.

Нетрудно показать, что имеет место равенство

$$E(\Phi) = R(\Phi).$$

В дальнейшем мы рассматриваем непустые множества $A \subset X$, где X — линейные пространства над полем $K = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Если в утверждении не указано явно поле, то утверждение относится к обоим случаям.

Обозначим через X' пространство, алгебраически сопряженное к X, т.е. пространство всех линейных функционалов на X. Через $\operatorname{co} A$ и $\operatorname{bco} A$ будем обозначать выпуклую и выпуклую уравновешенную оболочки A:

$$\operatorname{co} A := \left\{ x : x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j, \quad x_j \in A, \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 \right\};$$

$$\operatorname{bco} A := \left\{ x : x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j, \quad x_j \in A, \quad \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j| \le 1 \right\}.$$

Функционал $a(x)$ называется аффинным, если $a(x) = \langle x', x \rangle + c$, где $x' \in X$ и $c \in K$. Обозначим через X^a множество всех аффинных функционалов. Мы изучаем условия, при которых среди оптимальных методов восстановления существуют линейные или аффинные.

Определим многозначные отображения $\operatorname{co} \Phi$ и $\operatorname{bco} \Phi$ равенствами

$$\operatorname{gr} \operatorname{co} \Phi := \operatorname{co} \operatorname{gr} \Phi, \qquad \operatorname{gr} \operatorname{bco} \Phi := \operatorname{bco} \operatorname{gr} \Phi.$$

Теорема 3. 1. *Для существования $x' \in X'$ такого, что*

$$E(\Phi, x') = E(\Phi),$$

необходимо и достаточно чтобы

$$R(\Phi) = R(\operatorname{bco}\Phi).$$

При этом

$$E(\Phi) = \sup_{c \in \operatorname{bco}\Phi(0)} |c|.$$

2. *Если $K = \mathbb{R}$, тогда для существования $a \in X^a$ такого, что*

$$E(\Phi, a) = E(\Phi),$$

необходимо и достаточно чтобы

$$R(\Phi) = R(\operatorname{co}\Phi).$$

Рассмотрим задачу (2.1) для случая, когда $L = x' \in X'$ (т.е., $Z = K$) и $\mathcal{S}$ совпадает с множеством $\mathcal{E}$ всех функционалов на Y. Положим

$$e(x', F) := e(x', F, \mathcal{E}). \tag{2.4}$$

Как было отмечено выше, эта задача сводится к задаче оптимального восстановления многозначного отображения $\Phi = x' \circ F^{-1}$. Кроме того,

$$e(x', F) = E(x' \circ F^{-1}).$$

Введем величину

$$r(x', F) := \sup_{y \in F(W)} \inf_{c \in K} \sup_{x \in F^{-1}(y)} |\langle x', x\rangle - c|,$$

называемую информационным радиусом. Нетрудно убедиться, что

$$r(x', F) = R(x' \circ F^{-1}).$$

Поскольку

$$\operatorname{co}(x' \circ F^{-1}) = x' \circ (\operatorname{co} F)^{-1}, \qquad \operatorname{bco}(x' \circ F^{-1}) = x' \circ (\operatorname{bco} F)^{-1},$$

то из теоремы 3 вытекает следующее утверждение.

Теорема 4. 1. *Для существования $y' \in Y'$ такого, что*

$$e(x', F, y') = e(x', F),$$

необходимо и достаточно чтобы

$$r(x', F) = r(x', \operatorname{bco} F).$$

При этом

$$e(x', F) = \sup_{x \in \operatorname{bco} F^{-1}(0)} |\langle x', x\rangle|.$$

2. *Если $K = \mathbb{R}$, то для существования $a \in Y^a$ такого, что*
$$e(x', F, a) = e(x', F),$$
необходимо и достаточно чтобы
$$r(x', F) = r(x', \operatorname{co} F).$$

2.3. Оптимальное восстановление линейных функционалов

Рассмотрим задачу (2.4) для многозначного отображения
$$F(x) = Ix + U,$$
где $I\colon W \to Y$ — линейный оператор, а $U \subset Y$ — некоторое множество. Положим в этом случае
$$e(x', I, W, U) := e(x', F).$$

Теорема 5. *Пусть $x' \in X'$ и W, U — выпуклые уравновешенные множества. Тогда среди оптимальных методов восстановления существует линейный и*
$$\begin{aligned} e(x', I, W, U) &= \sup_{\substack{x\in W\\ Ix\in U}} |\langle x', x\rangle| \\ &= \inf_{y'\in Y'} \left(\sup_{x\in W} |\langle x', x\rangle - \langle y', Ix\rangle| + \sup_{y\in U} |\langle y', y\rangle| \right). \quad (2.5)\end{aligned}$$
Кроме того, $y' \in Y'$ является оптимальным методом восстановления в том и только в том случае, если на нем достигается нижняя грань в (2.5).

Пусть S — непустое множество, Σ — σ-алгебра подмножеств S и μ — неотрицательная σ-аддитивная мера на множестве Σ. Обозначим через $L_p(S, \Sigma, \mu)$ (или короче $L_p(S)$) множество всех σ-измеримых функций со значениями в $K = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, для которых
$$\|x\|_p := \left(\int_S |x(s)|^p \, d\mu \right)^{1/p} < \infty, \quad 1 \le p < \infty,$$
$$\|x\|_\infty := \operatorname*{ess\,sup}_{s\in S} |x(s)| < \infty, \quad p = \infty.$$

Положим
$$(x, y)_S := \int_S x(s)\overline{y(s)} \, d\mu$$
и для $a \in K$, $1 \le p < \infty$
$$a_{(p)} := \begin{cases} a|a|^{p-2}, & a \ne 0, \\ 0, & a = 0. \end{cases}$$

Если X — линейное нормированное пространство, то через BX будем обозначать единичный шар

$$BX := \{\, x \in X : \|x\| \le 1 \,\}.$$

Пусть $f \in L_{p'}(S)$, $1/p + 1/p' = 1$ (при $p = 1, \infty$, $p' = \infty, 1$, соответственно). Рассмотрим задачу оптимального восстановления линейного функционала $(x, f)_S$ на множестве BX_p по значениям многозначного отображения $F(x) := Ix + \delta BY$, $\delta \ge 0$, где X_p — линейное подпространство $L_p(S)$, $I\colon X_p \to Y$ — линейный оператор и Y — линейное нормированное пространство. Тем самым мы рассматриваем задачу о нахождении величины

$$e(f, I, BX_p(S), \delta) = \inf_{\varphi\colon Y \to K} \sup_{x \in BX_p(S)} \sup_{\substack{y \in Y \\ \|Ix - y\| \le \delta}} |(x, f)_S - \varphi(y)| \qquad (2.6)$$

и оптимального метода восстановления (т.е. метода, на котором достигается нижняя грань в (2.6)). Ситуация, когда задача оптимального восстановления рассматривается не на единичном шаре BL_p, а на единичном шаре некоторого подпространства $L_p(S)$, является типичной для восстановления на классах аналитических или гармонических функций.

В силу двойственности, полученной в теореме 5, эта задача тесно связана с экстремальной задачей

$$\sup_{\substack{x \in BX_p \\ \|Ix\| \le \delta}} |(x, f)_S|. \qquad (2.7)$$

Функция x_0, для которой верхняя грань в (2.7) достигается, называется экстремальной. Во многих случаях экстремальные функции (или их вид) для задачи (2.7) хорошо известны. Однако нас интересует не только погрешность оптимального восстановления, но и сам оптимальный метод. Большинство методов, которые мы строим, получаются с помощью следующей теоремы.

Теорема 6. *Пусть* $g \in X_p$, $g \ne 0$, $g_0 := g/\|g\|_p$, $\|Ig_0\| \le \delta$, $y_0^* \in Y^*$, $\langle y_0, Ig_0 \rangle = \delta \|y_0^*\|$ *и для всех* $x \in X_p$

$$(x, f)_S - \langle y_0^*, Ix \rangle = \begin{cases} \alpha(x, g_{(p)})_S, & 1 \le p < \infty, \\ (x, \varphi g)_S, & p = \infty, \end{cases}$$

где $\alpha > 0$, $\varphi \in L_1(S)$, $\varphi(s) \geq 0$ *почти всюду и если* $p = \infty$, *то* $|g(s)| = 1$ *почти всюду. Тогда* y_0^* — *оптимальный метод восстановления,* g_0 — *экстремальная функция и*

$$e(f, I, BX_p, \delta) = (g_0, f)_S = \begin{cases} \alpha\|g\|_p^{p-1} + \delta\|y_0^*\|, & 1 \leq p < \infty, \\ \|\varphi\|_1 + \delta\|y_0^*\|, & p = \infty. \end{cases}$$

В случае, когда $\delta = 0$ более удобно пользоваться следующим результатом, который непосредственно вытекает из предыдущей теоремы.

Теорема 7. *Пусть* $g \in X_p$, $g \neq 0$, $Ig = 0$, $y_0^* \in Y^*$ *и для всех* $x \in X_p$

$$(x, f)_S - \langle y_0^*, Ix\rangle = \begin{cases} \alpha(x, g_{(p)})_S, & 1 \leq p < \infty, \\ \alpha(x, \varphi g)_S, & p = \infty, \end{cases} \tag{2.8}$$

где $\alpha \in \mathbb{C}$, $\varphi \in L_1(S)$, $\varphi(s) \geq 0$ *почти всюду и если* $p = \infty$, *то* $|g(s)| = 1$ *почти всюду. Тогда* y_0^* — *оптимальный метод восстановления,* g_0 — *экстремальная функция и*

$$e(f, I, BX_p, 0) = |(g_0, f)_S| = \begin{cases} |\alpha|\|g\|_p^{p-1}, & 1 \leq p < \infty, \\ |\alpha|\|\varphi\|_1, & p = \infty. \end{cases}$$

2.4. Оптимальные методы, использующие коэффициенты Фурье

Пусть X — гильбертово пространство и $e_1, e_2, \dots$ — полная ортонормированная система в X. Обозначим через $x_j := (x, e_j)$ — коэффициенты Фурье $x \in X$. Рассмотрим задачу оптимального восстановления линейного функционала $< x', x >= (x, f)$, $f \in X$, на единичном шаре BX по информации о значениях оператора $Ix = (x_1, \dots, x_n)$.

Предположим, что нам известны приближенные значения коэффициентов Фурье $(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$ такие, что

$$|x_j - \tilde{x}_j| \leq \delta_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Тем самым мы рассматриваем задачу о нахождении величины

$$e(f, I, BX, \delta) := \inf_{\varphi\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}} \sup_{x \in BX} \sup_{\substack{y \in \mathbb{C}^n \\ Ix - y \in U}} |(x, f) - \varphi(y)|, \tag{2.9}$$

где

$$U = \{\, (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^n : |y_j| \leq \delta_j,\ j = 1, \dots, n \,\}.$$

Кроме того, нас интересует оптимальный метод восстановления, т.е. такой метод φ, на котором достигается нижняя грань в (2.9).

Пусть L — линейное пространство векторов $x = (x_1, x_2, \ldots)$, $x_j \in \mathbb{C}$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j |x_j|^2 < \infty,$$

где $\gamma_1 \geq 0$ and $\gamma_j > 0$, $j \geq 2$. Пусть x' — линейный функционал, определенный равенством

$$\langle x', x \rangle := \sum_{j=1}^{\infty} x_j \overline{f}_j,$$

где $|f_j| > 0$, $j \geq 2$, и

$$\sum_{j=2}^{\infty} \gamma_j^{-1} |f_j|^2 < \infty.$$

Рассмотрим задачу оптимального восстановления функционала x' на множестве

$$BL := \left\{ x \in L : \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j |x_j|^2 \leq 1 \right\}$$

по приближенным значениям $(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n)$ таким, что

$$|x_j - \tilde{x}_j| \leq \delta \lambda_j, \quad \lambda_j > 0, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Положим

$$m := \begin{cases} 1, & \gamma_1 f_1 \neq 0, \\ 2, & \gamma_1 f_1 = 0. \end{cases}$$

Теорема 8. *Предположим, что*

$$\frac{|f_m|}{\lambda_m \gamma_m} \geq \ldots \geq \frac{|f_n|}{\lambda_n \gamma_n}. \tag{2.10}$$

Положим

$$\mu_{km} := \left(\sum_{j=m}^{k} \gamma_j \lambda_j^2 + \gamma_k^2 |f_k|^{-2} \lambda_k^2 \sum_{j=k+1}^{\infty} \gamma_j^{-1} |f_j|^2 \right)^{-1/2}, \quad k = m, \ldots, n,$$

$\mu_{m-1,m} := +\infty$, $\mu_{n+1,m} := 0$ *и* $\Delta_{km} := [\mu_{k+1,m}, \mu_{km})$, $k = m-1, \ldots, n$. *Тогда для всех* $\delta \in \Delta_{km}$, $m - 1 \leq k \leq n$, *метод*

$$\langle x', x \rangle \approx (m-1) \overline{f}_1 \tilde{x}_1 + \sum_{j=m}^{k} \nu_{jm} \overline{f}_j \tilde{x}_j,$$

в котором

$$\nu_{jm} := 1 - \delta\frac{\gamma_j\lambda_j}{|f_j|}\sqrt{\frac{\sum_{j=k+1}^{\infty}\gamma_j^{-1}|f_j|^2}{1-\delta^2\sum_{j=m}^{k}\gamma_j\lambda_j^2}},$$

является оптимальным, а для его погрешности справедливо равенство

$$e(x', I, BL, \delta) = \sqrt{\sum_{j=k+1}^{\infty}\gamma_j^{-1}|f_j|^2}\sqrt{1-\delta^2\sum_{j=m}^{k}\gamma_j\lambda_j^2} + \delta\sum_{j=m}^{k}\lambda_j|f_j|.$$

Применим теорему 8 для нахождения оптимальных методов восстановления на некоторых конкретных классах функций. Пусть W — инвариантный относительно сдвига класс достаточно гладких 2π-периодических функций. Рассмотрим задачу оптимального восстановления значения функции или ее производной $f^{(s)}(t)$, $t \in [0, 2\pi)$, $s \geq 0$, $f \in W$ на основании информации о ее коэффициентах Фурье

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}\,dt, \quad |k| \leq n,$$

заданных с погрешностью δ в равномерной норме, т.е. по значениям $\tilde{c}_k$ таким, что

$$|c_k - \tilde{c}_k| \leq \delta, \quad |k| \leq n.$$

Обозначим через $e_{ns}(W, \delta)$ погрешность восстановления для этой задачи (поскольку W — инвариантный относительно сдвига класс, то из равенства (2.5) следует, что погрешность не зависит от t).

Будем рассматривать следующие классы периодических аналитических функций. Пространством Харди $\mathcal{H}_2^\beta(\mathbb{T})$ называется множество всех 2π-периодических функций, аналитических в полосе $S_\beta := \{\, z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| < \beta \,\}$ и удовлетворяющих условию

$$\|f\|_{\mathcal{H}_2^\beta(\mathbb{T})} := \sup_{0\leq\eta<\beta}\left(\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\left(|f(t+i\eta)|^2 + |f(t-i\eta)|^2\right)\,dt\right)^{1/2} < \infty.$$

Пространство Харди–Соболева $\mathcal{H}_2^{r,\beta}(\mathbb{T})$ — это множество всех 2π-периодических функций, аналитических в полосе S_β, для которых $f^{(r)} \in \mathcal{H}_2^\beta(\mathbb{T})$.

Пространством Бергмана $\mathcal{A}_2^\beta(\mathbb{T})$ называется множество 2π-периодических функций, аналитических в полосе S_β и удовлетворяющих условию

$$\|f\|_{\mathcal{A}_2^\beta(\mathbb{T})} := \left(\frac{1}{4\pi\beta}\int_0^{2\pi}\int_{-\beta}^{\beta}|f(t+i\eta)|^2\,dtd\eta\right)^{1/2} < \infty.$$

Пространство Бергмана–Соболева $\mathcal{A}_2^{r,\beta}(\mathbb{T})$ определяется как множество 2π-периодических функций, аналитических в полосе S_β, для которых $f^{(r)} \in \mathcal{A}_2^\beta(\mathbb{T})$.

Функции из $\mathcal{H}_2^\beta(\mathbb{T})$ имеют почти всюду граничные значения, и пространство $\mathcal{H}_2^\beta(\mathbb{T})$ является гильбертовым со скалярным произведением

$$(f,g)_{\mathcal{H}_2^\beta(\mathbb{T})} := \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\Big(f(t+i\beta)\overline{g(t+i\beta)} + f(t-i\beta)\overline{g(t-i\beta)}\Big)\,dt.$$

Пространство Бергмана $\mathcal{A}_2^\beta(\mathbb{T})$ — также гильбертово пространство, в котором скалярное произведение задается следующим образом

$$(f,g)_{\mathcal{A}_2^\beta(\mathbb{T})} := \frac{1}{4\pi\beta}\int_0^{2\pi}\int_{-\beta}^{\beta} f(t+i\eta)\overline{g(t+i\eta)}\,dtd\eta.$$

Положим

$$H_2^{r,\beta}(\mathbb{T}) := \{\, f \in \mathcal{H}_2^{r,\beta}(\mathbb{T}) : \|f^{(r)}\|_{\mathcal{H}_2^\beta(\mathbb{T})} \le 1\,\},$$
$$A_2^{r,\beta}(\mathbb{T}) := \{\, f \in \mathcal{A}_2^{r,\beta}(\mathbb{T}) : \|f^{(r)}\|_{\mathcal{A}_2^\beta(\mathbb{T})} \le 1\,\}.$$

Нетрудно убедиться, что функции $e_j(z) := e^{ijz}$, $j = 0, \pm1, \dots$, образуют ортогональный базис в пространствах $\mathcal{H}_2^\beta(\mathbb{T})$ и $\mathcal{A}_2^\beta(\mathbb{T})$. Кроме того,

$$\|e_j\|^2_{\mathcal{H}_2^\beta(\mathbb{T})} = \cosh 2j\beta, \quad j = \pm1, \pm2, \dots \ ,$$
$$\|e_0\|^2_{\mathcal{A}_2^\beta(\mathbb{T})} = 1, \quad \|e_j\|^2_{\mathcal{A}_2^\beta(\mathbb{T})} = \frac{\sinh 2j\beta}{2j\beta}, \quad j = \pm1, \pm2, \dots \ .$$

Таким образом, $f \in W = H_2^{r,\beta}(\mathbb{T})$ или $A_2^{r,\beta}(\mathbb{T})$ в том и только в том случае, если

$$f(z) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} c_j e^{ijz}$$

и

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} |c_j|^2 j^{2r} p_j(W) \le 1$$

где $p_j(W) = \|e_j\|^2_W$.

Введем следующие обозначения

$$\mu_{kr}(W,s) := \left(\sum_{|j|\le k} j^{2r}p_j(W) + k^{4r-2s}p_k^2(W)\sum_{|j|>k} j^{2(s-r)}p_j^{-1}(W)\right)^{-1/2},$$
$$1 \le k \le n,$$
$$\mu_{n+1,r}(W,s) := 0, \quad \mu_{00}(W,s) := \left(\sum_{|j|\ge 0} p_j^{-1}(W)\right)^{-1/2},$$
$$\mu_{0r}(W,s) := +\infty,\ r \ge 1, \quad \Delta_{-1,0}(W,s) := \big[\mu_{00}(W,s), +\infty\big),$$
$$\Delta_{kr}(W,s) := \big[\mu_{k+1,r}(W,s), \mu_{kr}(W,s)\big), \quad 0 \le k \le n,\ r \ge 0.$$

Положив в теореме 8 $\overline{f}_j = (ij)^s e^{ijt}$, $\lambda_j = 1$ и $\gamma_j = j^{2r}p_j(W)$, получаем следующий результат

Теорема 9. *Пусть r и s — неотрицательные целые числа такие, что $0 \le s \le 2r$. Тогда для всех $\delta \in \Delta_{kr}(W,s)$ метод*

$$f^{(s)}(t) \approx \sum_{|j|\le k}\left(1 - \delta|j|^{2r-s}p_j(W)\sqrt{\frac{\sum_{|j|>k} j^{2(s-r)}p_j^{-1}(W)}{1-\delta^2\sum_{|j|\le k} j^{2r}p_j(W)}}\right)\tilde{c}_j(ij)^s e^{ijt}$$

является оптимальным для $W = H_2^{r,\beta}(\mathbb{T})$ и $A_2^{r,\beta}(\mathbb{T})$. Для его погрешности справедливо равенство

$$e_{ns}(W,\delta) = \sqrt{\sum_{|j|>k} j^{2(s-r)}p_j^{-1}(W)}\sqrt{1-\delta^2\sum_{|j|\le k} j^{2r}p_j(W)} + \delta\sum_{|j|\le k}|j|^s.$$

В этой теореме мы требуем выполнения неравенства $0 \le s \le 2r$ для того, чтобы удовлетворялось условие (2.10). Тем не менее, оптимальный метод можно получить и в случае $s > 2r$. Для этого достаточно упорядочить значения $j^{s-2r}p_j(W)$ в неубывающем порядке и применить теорему 8.

Оптимальный метод восстановления значения $f^{(s)}(t)$, $0 \le s \le r-1$, по коэффициентам Фурье, заданным с погрешностью, может быть также построен и для соболевского класса $W_2^r(\mathbb{T})$. Класс $W_2^r(\mathbb{T})$ может быть определен как множество функций

$$f(t) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} c_j e^{ijt},$$

для которых

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} j^{2r}|c_j|^2 \le 1$$

и (в силу того, что функции из $W_2^r(\mathbb{T})$ вещественные на $\mathbb{T}$)

$$c_{-j} = \overline{c}_j, \quad j = 0, 1, \ldots\ . \tag{2.11}$$

Условие (2.11) несколько отличает этот класс от классов $H_2^{r,\beta}(\mathbb{T})$ и $A_2^{r,\beta}(\mathbb{T})$. Тем не менее, можно показать, что теорема 9 остается справедливой для $W = W_2^r(\mathbb{T})$ и $p_j(W_2^r(\mathbb{T})) \equiv 1$.

2.5. Оптимальное восстановление в пространствах Харди и аналог формулы Котельникова

Пространством Харди $\mathcal{H}_p$ называется множество функций, аналитических в единичном круге $D := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ и удовлетворяющих условию

$$\|f\|_{\mathcal{H}_p} := \sup_{0<r<1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \right)^{1/p} < \infty, \qquad 1 \le p < \infty,$$
$$\|f\|_{\mathcal{H}_\infty} := \sup_{z \in D} |f(z)| < \infty.$$

Положим

$$H_p := \{\, f \in \mathcal{H}_p : \|f\|_{\mathcal{H}_p} \le 1 \,\}.$$

Рассмотрим задачу оптимального восстановления функции $f \in H_p$ в точке $\xi \in D$ по точным значениям информационного оператора

$$If := \{\, f(z_1), \ldots, f^{(\nu_1 - 1)}(z_1), \ldots, f(z_n), \ldots, f^{(\nu_n - 1)}(z_n) \,\},$$

где $z_1, \ldots, z_n$ — различные точки из круга D. Иными словами, нас интересует величина

$$e(\xi, I, H_p) := \inf_{\varphi\colon \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}} \ \sup_{f \in H_p} |f(\xi) - \varphi(If)|, \tag{2.12}$$

где $N = \sum_{j=1}^n \nu_j$, а также оптимальный метод восстановления, т.е. метод, на котором достигается нижняя грань в (2.12).

Положим

$$W(z) := \prod_{j=1}^n \left(\frac{z - z_j}{1 - \overline{z}_j z} \right)^{\nu_j}, \qquad \omega_j(z) := \prod_{\substack{s=1 \\ s \ne j}}^n \left(\frac{z - z_s}{1 - \overline{z}_s z} \right)^{\nu_s}.$$

В дальнейшем все выражения, содержащие p, при $p = \infty$ понимаются как предельные значения при $p \to \infty$.

Теорема 10. *Для всех $1 \le p \le \infty$ метод*

$$f(\xi) \approx \sum_{j=1}^{n} \sum_{\nu=0}^{\nu_j-1} c_{j\nu}(\xi,p) f^{(\nu)}(z_j),$$

где

$$c_{j\nu}(\xi,p) = \frac{W(\xi)(1-|\xi|^2)^{\frac{p-2}{p}}}{\nu!(\nu_j-\nu-1)!} \left(\frac{(1-\overline{z}_j z)^{\nu_j}}{\omega_j(z)(\xi-z)(1-\overline{\xi}z)^{\frac{p-2}{p}}} \right)^{(\nu_j-\nu-1)}_{\Big|z=z_j},$$

является оптимальным на классе H_p. Для его погрешности справедливо равенство

$$e(\xi, I, H_p) = \frac{|W(\xi)|}{(1-|\xi|^2)^{1/p}}.$$

Следствие 1. *Пусть $\nu_1 = \ldots = \nu_n = 1$. Тогда для всех $1 \le p \le \infty$ метод*

$$f(\xi) \approx \sum_{j=1}^{n} \frac{\omega_j(\xi)}{\omega_j(z_j)} \frac{1-|z_j|^2}{1-\overline{z}_j \xi} \left(\frac{1-|\xi|^2}{1-z_j\overline{\xi}} \right)^{\frac{p-2}{p}} f(z_j)$$

является оптимальным на классе H_p.

Рассмотрим теперь задачу оптимального восстановления функций из H_p по информации об их значениях в бесконечном множестве точек. Предположим, что информационный оператор имеет вид

$$If = \left\{ f(z_j), \ldots, f^{(\nu_j-1)}(z_j) \right\}_{j=-\infty}^{+\infty}, \tag{2.13}$$

где z_j — различные точки из интервала $(-1,1)$. В этом случае для получения интегрального представления (2.8), с помощью которого строится оптимальный метод, нам потребуется один вспомогательный результат.

Напомним, что бесконечным произведением Бляшке для единичного круга называется функция вида

$$B(z) = \prod_{n=1}^{\infty} -\frac{\overline{z}_n}{|z_n|} \cdot \frac{z-z_n}{1-\overline{z}_n z}, \tag{2.14}$$

где $z_n \in D$ (при $z_n = 0$ множитель $-\overline{z}_n/|z_n|$ заменяется на единицу и в соответствии с этим будем считать, что $\operatorname{sign} 0 = 1$). Хорошо известно, что если $z_n \in D$ удовлетворяют условию Бляшке

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-|z_n|) < \infty,$$

то произведение (2.14) сходится в D, $B(z) \in \mathcal{H}_\infty$ и $|B(e^{i\theta})| = 1$ почти всюду.

Лемма 1. *Предположим, что последовательность* $\{z_j\}_{-\infty}^{\infty}$, $\{\nu_j\}_{-\infty}^{\infty}$ *такова, что* $-1 < z_j < z_{j+1} < 1$, $\nu_j \in \mathbb{N}$, $j = 0, \pm 1, \dots$,

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \nu_j (1 - |z_j|) < \infty$$

и для

$$W(z) := \prod_{j=-\infty}^{\infty} \left(-\operatorname{sign} z_j \frac{z - z_j}{1 - z_j z} \right)^{\nu_j}$$

существуют такие $\alpha_j \in (z_j, z_{j+1})$, $j = 0, \pm 1, \dots$, *что* $|W(\alpha_j)| \geq c > 0$. *Тогда для всех* $f \in \mathcal{H}_p$, $1 \leq p \leq \infty$, *справедливо равенство*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{f(z)}{W(z)}\, dz = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{(-\operatorname{sign} z_j)^{\nu_j}}{(\nu_j - 1)!} \left(\frac{f(z)(1 - z_j z)^{\nu_j}}{\omega_j(z)} \right)^{(\nu_j - 1)}_{\Big|z = z_j},$$

где

$$\omega_j(z) := \prod_{m \neq j} \left(-\operatorname{sign} z_m \frac{z - z_m}{1 - z_m z} \right)^{\nu_m}.$$

Аналогом теоремы 10 для информационного оператора (2.13) является следующий результат.

Теорема 11. *Предположим, что система точек* $\{z_j\}_{-\infty}^{\infty}$ *удовлетворяет условиям леммы* 1. *Тогда для всех* $1 \leq p \leq \infty$ *метод*

$$f(\xi) \approx \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\nu_j - 1} c_{j\nu}(\xi, p) f^{(\nu)}(z_j),$$

в котором

$$c_{j\nu}(\xi, p) = \frac{W(\xi)(1 - |\xi|^2)^{\frac{p-2}{p}}}{\nu!(\nu_j - \nu - 1)!} \left(\frac{(1 - z_j z)^{\nu_j}}{\omega_j(z)(\xi - z)(1 - \overline{\xi} z)^{\frac{p-2}{p}}} \right)^{(\nu_j - \nu - 1)}_{\Big|z = z_j},$$

является оптимальным методом восстановления на классе H_p, *а для его погрешности справедливо равенство*

$$e(\xi, I, H_p) = \frac{|W(\xi)|}{(1 - |\xi|^2)^{1/p}}.$$

Следствие 2. *Предположим, что система точек* $\{z_j\}_{-\infty}^{\infty}$ *удовлетворяет условиям леммы* 1 *при* $\nu_j \equiv 1$. *Тогда для всех* $1 \le p \le \infty$ *метод*

$$f(\xi) \approx W(\xi) \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{W'(z_j)(\xi - z_j)} \left(\frac{1 - |\xi|^2}{1 - \bar{\xi} z_j} \right)^{\frac{p-2}{p}} f(z_j)$$

является оптимальным методом восстановления на классе H_p.

Рассмотрим некоторые конкретные системы узлов. Пусть $\lambda \in (0, 1)$,

$$a_j := \operatorname{tg}\left(j \frac{\pi \Lambda}{\Lambda'} \right), \quad j = 0, \pm 1, \dots ,$$

и

$$B_0(z) := z \prod_{j=1}^{\infty} \frac{a_j^2 - z^2}{1 - a_j^2 z^2},$$

где Λ и Λ' — полные эллиптические интегралы первого рода для модулей λ и $\lambda' = \sqrt{1 - \lambda^2}$, соответственно. Положим $h = e^{-\pi\Lambda/\Lambda'}$. Тогда

$$a_j = \frac{1 - h^{2j}}{1 + h^{2j}}.$$

С помощью подстановки $z = -i \tan \pi v$ получаем

$$z^2 = \frac{\cos 2\pi v - 1}{\cos 2\pi v + 1}$$

и

$$B_0(z) = -i \tan \pi z \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1 - 2h^{2j} \cos 2\pi v + h^{4j}}{1 + 2h^{2j} \cos 2\pi v + h^{4j}}.$$

Используя представления эллиптического синуса и косинуса через тета-функции и разложения в произведения последних, получаем

$$B_0(z) = -i\sqrt{\lambda}\, \frac{\operatorname{sn}(2\Lambda' v, \lambda')}{\operatorname{cn}(2\Lambda' v, \lambda')}.$$

Из второго главного преобразования первой степени следует, что

$$\frac{\operatorname{sn}(iu, \lambda')}{\operatorname{cn}(iu, \lambda')} = i \operatorname{sn}(u, \lambda).$$

Так как $v = \dfrac{i}{\pi} \operatorname{arctg} z$, то

$$B_0(z) = \sqrt{\lambda}\, \operatorname{sn}\left(\frac{2\Lambda'}{\pi} \operatorname{arctg} z, \lambda \right).$$

Положим

$$b_j := \operatorname{tg}\left((2j-1)\frac{\pi\Lambda}{2\Lambda'}\right), \quad j = 0, \pm 1, \dots .$$

Тогда

$$B_0(b_j) = (-1)^{j+1}\sqrt{\lambda}.$$

Следовательно, система точек $\{a_j\}_{-\infty}^{\infty}$ удовлетворяет условиям леммы 1, и к ней применимо следствие 2.

Обозначим через $H_\infty^\beta(\mathbb{R})$ множество функций, аналитических в полосе S_β, для которых $|f(z)| \le 1$, $z \in S_\beta$. Отображение

$$z = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4\beta}w\right)$$

является конформным отображением полосы S_β на внутренность единичного круга D и переводит систему точек $\{j\tau\}_{-\infty}^{\infty}$, $\tau > 0$, в систему $\{a_j\}_{-\infty}^{\infty}$, если λ выбрано из условия $\Lambda'/\Lambda = 4\beta/\tau$. Из теории эллиптических функций вытекает, что в этом случае $\lambda = \kappa(2\beta/\tau)$, где

$$\kappa(s) := 4e^{-s}\left(\frac{\sum_{m=0}^{\infty} e^{-2sm(m+1)}}{1 + 2\sum_{m=1}^{\infty} e^{-2sm^2}}\right)^2.$$

Пользуясь конформной эквивалентностью рассматриваемых задач восстановления для классов $H_\infty^\beta(\mathbb{R})$ и H_∞, из следствия 2 вытекает

Следствие 3. *Для всех $\tau > 0$ и $t \in \mathbb{R}$ метод*

$$f(t) \approx \frac{\pi}{\Lambda'} \operatorname{sn}\left(\frac{\Lambda'}{2\beta}t, \lambda\right) \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j \frac{f(j\tau)}{\operatorname{sh}\left(\frac{\pi}{2\beta}(t - j\tau)\right)},$$

в котором $\lambda = \kappa(2\beta/\tau)$, является оптимальным на классе $H_\infty^\beta(\mathbb{R})$. Для его погрешности справедливо равенство

$$e(t, I, H_\infty^\beta(\mathbb{R})) = \sqrt{\lambda}\left|\operatorname{sn}\left(\frac{\Lambda'}{2\beta}t, \lambda\right)\right|.$$

Отметим, что для максимального значения погрешности справедливо равенство

$$\max_{t\in\mathbb{R}} e(t, I, H_\infty^\beta(\mathbb{R})) = \sqrt{\lambda} = 2e^{-\pi\beta/\tau} + O\left(e^{-5\pi\beta/\tau}\right).$$

Известно, что целые функции могут быть точно восстановлены по их значениям в равномерной сетке с достаточно малым шагом. Это восстановление дается часто используемыми формулами Котельникова и Картрайт. В отличие от целых функций ограниченные аналитические функции в полосе не определяются однозначно по своим значениям в равномерной сетке каков бы ни был шаг этой сетки. Тем не менее, следствие 3 дает возможность восстанавливать приближенно ограниченные аналитические функции (причем оптимальным образом), заданные в равномерной сетке с произвольным шагом.

2.6. Оптимальные узлы, оптимальные информационные операторы и n-поперечники

В теореме 10 мы получили оптимальный метод восстановления функций из класса H_p в фиксированной точке по их значениям в некоторой системе точек. Аналогичный результат можно получить и для класса $H_p^\beta(\mathbb{T})$, являющегося единичным шаром пространства $\mathcal{H}_p^\beta(\mathbb{T})$, определяемого как множество 2π-периодических функций, аналитических в полосе $S_\beta := \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| < \beta\}$ и удовлетворяющих условию

$$\|f\|_{\mathcal{H}_p^\beta(\mathbb{T})} := \sup_{0\le\eta<\beta}\left(\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\left(|f(t+i\eta)|^p+|f(t-i\eta)|^p\right)dt\right)^{1/p} < \infty,$$
$$\|f\|_{\mathcal{H}_\infty^\beta(\mathbb{T})} := \sup_{z\in S_\beta}|f(z)| < \infty.$$

Если нам нужно восстановить функцию не в одной точке, а на некотором множестве, то естественно поставить вопрос: как выбрать систему точек, в которой задается исходная информация, чтобы погрешность восстановления сделать минимальной на множестве, в котором требуется аппроксимировать функцию?

Сформулируем эту задачу более точно. Пусть W — класс функций, определенных на множестве G, X — линейное нормированное пространство и $W \subset X$. Положим

$$I_\tau f := (f(t_1), \dots, f(t_n)), \quad \tau = (t_1, \dots, t_n) \in G^n.$$

Под задачей оптимального восстановления на пространстве X будем понимать задачу о нахождении величины

$$s_n(W, X) := \inf_{\tau\in G^n}\ \inf_{S:\, M^n\to X}\ \sup_{f\in W}\|f - S(I_\tau f)\|_X, \tag{2.15}$$

где $M = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ (в зависимости от того, на каком поле рассматривается пространство X). Если некоторые из s точек совпадают, то будем считать, что вместе со значениями функции заданы последовательно значения производных функции до порядка $(s-1)$ (предполагается, что функции из W достаточно гладкие). Узлы, на которых достигается нижняя грань в (2.15) будем называть оптимальными, а метод, на котором нижняя грань достигается для оптимальных узлов, назовем оптимальным методом восстановления на пространстве X.

Сформулируем один результат об оптимальных узлах в периодическом случае. Положим

$$J_q(\lambda) := \int_0^1 \frac{t^q\,dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-\lambda^2t^2)}},$$

Теорема 12. *При всех $\beta > 0$*

$$s_n(H_p^\beta(\mathbb{T}), L_\infty(\mathbb{T})) = \begin{cases} \left(\dfrac{2K}{\pi}\right)^{1/p}\sqrt{\lambda_n}, & n \text{ — четное},\\ \left(\dfrac{2K}{\pi}\right)^{1/p}\sqrt{k}\sqrt{\lambda_n}, & n \text{ — нечетное}, \end{cases} \tag{2.16}$$

$$s_{2n}(H_\infty^\beta(\mathbb{T}), L_q(\mathbb{T})) = \sqrt{\lambda_{2n}}\left(\frac{2\pi}{\Lambda_{2n}}J_q(\lambda_{2n})\right)^{1/q}, \quad 1 \le q < \infty,$$

где $\lambda_n = \kappa(\beta n)$, а K, K' и Λ_n — полные эллиптические интегралы первого рода для модулей $k = \kappa(\beta)$, $k' = \sqrt{1-k^2}$ и λ_n, соответственно. Равномерная система узлов на $\mathbb{T}$ является единственной с точностью до сдвига оптимальной системой узлов для значения (2.16). *Соответствующие оптимальные методы имеет вид*

$$f(t) \approx \frac{K}{n\Lambda_n}\operatorname{sn}\left(\frac{n\Lambda_n}{\pi}t, \lambda_n\right)\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j c_{np}\left(\frac{K}{\pi}t - j\frac{2K}{n}\right) f\left(j\frac{2\pi}{n}\right),$$

$$f(t) \approx \frac{K}{2n\Lambda_{2n}}\operatorname{sn}\left(\frac{2n\Lambda_{2n}}{\pi}t, \lambda_{2n}\right)\sum_{j=0}^{2n-1}(-1)^j c_{2n,\infty}\left(\frac{K}{\pi}t - j\frac{K}{n}\right) f\left(j\frac{\pi}{n}\right),$$

где

$$c_{np}(z) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{cn} z \operatorname{dn}^{\frac{p-2}{p}} z}{\operatorname{sn} z}, & n \text{ — четное},\\ \dfrac{\operatorname{dn}^{\frac{2(p-1)}{p}} z}{\operatorname{sn} z}, & n \text{ — нечетное}. \end{cases}$$

Мы нашли систему оптимальных узлов для поставленной задачи, но, может быть, существуют линейные функционалы, использование которых вместо значений функций в точках даст меньшую погрешность при восстановлении. Иными словами, следующая задача, которую мы исследуем, связана с поиском линейных функционалов, знание которых позволит восстанавливать функцию из фиксированного класса наиболее точно. Формализуем эту задачу.

Пусть X — линейное нормированное пространство. Информационным n-поперечником множества $W \in X$ назовем величину

$$i_n(W,X) := \inf_{\substack{Y \supset W \\ l_1,\dots,l_n \in Y^*}} \inf_{S\colon M^n \to X} \sup_{f \in W} \|f - S(l_1 f, \dots, l_n f)\|_X, \qquad (2.17)$$

где нижняя грань берется по всем линейным нормированным пространствам Y, содержащим W; здесь $M = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Если нижняя грань в (2.17) достигается на некоторых линейных функционалах, то эти функционалы будем называть оптимальными для соответствующего информационного n-поперечника.

Если X — линейное нормированное пространство функций, определенных на некотором множестве G и существует $Y \supset W$ такое, что для всех $t \in G$, $lf := f(t) \in Y^*$, тогда очевидно, что

$$i_n(W,X) \le s_n(W,X). \qquad (2.18)$$

На классах аналитических функций в некоторых случаях неравенство (2.18) обращается в равенство, но существуют примеры, когда неравенство (2.18) строгое. Поставленная задача тесно связана с задачами о колмогоровских, линейных и гельфандовских n-поперечниках. В частности, если W — центрально-симметричное множество и $0 \in W$, то нетрудно доказать, что

$$d^n(W,X) \le i_n(W,X) \le \lambda_n(W,X).$$

Обозначим через $H^{r,\beta}_{\infty,\mathbb{R}}(\mathbb{T})$ множество 2π-периодических вещественнозначных функций, аналитически продолжаемых в полосу S_β и удовлетворяющих в ней условию $|f^{(r)}(z)| \le 1$ (при $r = 0$ соответствующий класс будем обозначать через $H^{\beta}_{\infty,\mathbb{R}}(\mathbb{T})$).

Положим

$$\Phi^\beta_{n,0}(z) = \sqrt{\lambda}\,\mathrm{sn}\left(\frac{2n\Lambda}{\pi} z, \lambda\right),$$

где $\lambda = \kappa(2\beta n)$, и

$$\Phi^\beta_{n,r} := D_r * \Phi_{n,0},$$

где

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{T}} f(x-t) g(t)\, dt,$$

а D_r — моносплайн Бернулли

$$D_r(t) := \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kt - \pi r/2)}{k^r}, \quad r = 1, 2, \dots .$$

Функции $\Phi^{\beta}_{n,r}$ являются аналогами хорошо известных идеальных сплайнов Эйлера. Имеют место равенства

$$\left.\begin{aligned}\Phi^{\beta}_{n,r}(t) &= \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}\Lambda n^r}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\sin((2s+1)nt-\pi r/2)}{(2s+1)^r\sinh((2s+1)2n\beta)},\\ \|\Phi^{\beta}_{n,r}\|_{\infty} &= \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}\Lambda n^r}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^{s(r+1)}}{(2s+1)^r\sinh((2s+1)2n\beta)},\end{aligned}\right\}\quad r=0,1,\ldots\ .$$

Теорема 13. *Для всех $r \ge 0$ и пары $(H^{r,\beta}_{\infty,\mathbb{R}}(\mathbb{T}), L_{\infty}(\mathbb{T}))$*

$$d_{2n} = \lambda_{2n} = d^{2n} = i_{2n} = d_{2n-1} = \lambda_{2n-1} = d^{2n-1} = i_{2n-1} = \|\Phi^{\beta}_{n,r}\|_{\infty}.$$

Кроме того, при $r = 0$ и $1 \le q \le \infty$ для пары $(H^{\beta}_{\infty,\mathbb{R}}(\mathbb{T}), L_q(\mathbb{T}))$

$$\begin{aligned}d_{2n} = \lambda_{2n} = d^{2n} = i_{2n} = s_{2n} = \|\Phi^{\beta}_{n,0}\|_q\\ = \begin{cases}\sqrt{\lambda}\left(\dfrac{2\pi}{\Lambda}J_q(\lambda)\right)^{1/q}, & 1 \le q < \infty,\\ \sqrt{\lambda}, & q = \infty,\end{cases}\end{aligned}$$

где $\lambda = \kappa(2\beta n)$, а

$$J_q(\lambda) := \int_0^1 \frac{t^q\,dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-\lambda^2t^2)}}.$$

Для $i_{2n-1}(H^{r,\beta}_{\infty,\mathbb{R}}(\mathbb{T}), L_{\infty}(\mathbb{T}))$ и $i_{2n}(H^{r,\beta}_{\infty,\mathbb{R}}(\mathbb{T}), L_{\infty}(\mathbb{T}))$ коэффициенты Фурье

$$a_j(f) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos jt\,dt, \quad j = 0,\ldots,n-1,$$
$$b_j(f) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin jt\,dt, \quad j = 1,\ldots,n-1.$$

являются оптимальными функционалами. Восстановление по значениям в $2n$ равноотстоящих точках на $\mathbb{T}$ является также оптимальным для $i_{2n}(H^{\beta}_{\infty,\mathbb{R}}(\mathbb{T}), L_q(\mathbb{T}))$.

Из этой теоремы и теоремы 12 вытекает, что

$$i_{2n-1}(H^{\beta}_{\infty,\mathbb{R}}(\mathbb{T}), L_{\infty}(\mathbb{T})) < s_{2n-1}(H^{\beta}_{\infty,\mathbb{R}}(\mathbb{T}), L_{\infty}(\mathbb{T})).$$

Другими словами, в нечетном случае коэффициенты Фурье более информативны, чем значения в точках. Для четного случая оба типа информации оптимальны.

РАЗДЕЛ 3

Алгебраические методы исследования дифференциальных уравнений

3.1. Алгебры симметрий дифференциальных уравнений и их деформации

В связи с разработкой качественной теории уравнений математической физики и механики были изучены некоторые алгебраические методы исследования этих уравнений. Были рассмотрены параметрические пространства, элементами которых являются конечномерные алгебры (лиевские, принадлежащие к более широкому классу антикоммутативных алгебр, а также ассоциативные алгебры). Конечномерные алгебры естественно возникают при исследовании уравнений математической физики и механики как инфинитезимальные алгебры групп Ли симметрии этих уравнений, а антикоммутативные — как касательные алгебры к семействам более общих симметрий этих уравнений. Так как обычно в приложениях исследуется не отдельное уравнение, а целое семейство таких уравнений, зависящее от одного или даже нескольких числовых параметров (отражающих конструкционные особенности изделий или используемых для их описания математических моделей), то естественным образом возникает задача исследования зависимости характеристик рассматриваемых уравнений математической физики и механики от этих параметров. В результате одним из направлений исследования в данной работе было описание локальных деформаций конечномерных алгебр (лиевских и более общих). Этот подход к дифференциальным уравнениям позволяет качественно описать уравнения, возникающие в математической физике с новой, неклассической точки зрения и прояснить структуру решений этих уравнений. При таком подходе решения дифференциальных уравнений разбиваются на классы, являющиеся орбитами группы симметрий, а соответствующие алгебры позволяют прояснить инфинитезимальную структуру пространства решений. Это позволяет более эффективно применять в дальнейшем численные методы решения дифференциальных уравнений, так как информация о структуре решений дает возможность среди известных численных методов выбрать наиболее адекватный рассматриваемому уравнению.

В направлении исследования пространств конечномерных алгебр и их деформаций были получены следующие результаты.

Было введено понятие пространства конечномерных алгебр (над полями вещественных или комплексных чисел), снабжено топологией и алгебраической структурой (топологией Зарисского). Рассмотрен и предельный вариант этих пространств (при условии стремления размерности рассматриваемых алгебр к бесконечности топология здесь строится с помощью понятия прямого предела). Непрерывные (гладкие, аналитические) кривые в этом пространстве можно рассматривать как деформации рассматриваемых алгебр. Обратно, если имеется некоторое семейство конечномерных алгебр (например, семейство алгебр симметрий — классических или обобщенных — дифференциальных уравнений математической физики или механики), то мы можем сопоставить этому семейству кривую во введенном пространстве алгебр. В результате от задачи исследования зависимости семейства уравнений от параметров приходим к задаче исследования кривых в некотором вполне определенном универсальном пространстве алгебр (не зависящем от выбора исходного семейства уравнений).

На пространстве конечномерных алгебр было рассмотрено естественное действие линейной группы преобразований (которое отражает процедуру перехода к новому базису в конечномерной алгебре). Орбиты относительно этого действия стандартным образом отождествляются с множествами алгебр, попарно изомоморфных между собой. Стационарные группы для каждой такой орбиты отождествляются с группами автоморфизмов соответствующих алгебр (эти группы представляют собой очень интересный, но пока еще мало изученный инвариант семейств дифференциальных уравнений). Фактор-пространство (понимаемое в смысле алгебраической геометрии, а не в обычном топологическом смысле) представляет собой пространство конечномерных алгебр, рассматриваемых с точностью до изоморфизма, в котором общие точки являются неособыми, но есть и такие точки, в которых структура фактор-пространства устроена достаточно сложно (именно такие точки подчас заслуживают особого внимания, так как именно им соответствуют те значения параметров, которые можно рассматривать как критические для рассматриваемого семейства дифференциальных уравнений). Изучение этого фактор-пространства и представляет собой одну из основных задач в применении алгебраических методов к качественному исследованию дифференциальных уравнений математической физики и механики. Результаты такого описания открывают возможности классификации отдельных типов дифференциальных уравнений по степени их симметричности,по типам и характеристикам возникающих при этом алгебр, что дает возможность рассматривать эти уравнения с новой, весьма продуктивной точки зрения. В частности, такой подход поясняет структуру пространств решений нелинейных дифференциальный уравнений, изучение которой, в отличие от линейный уравнений (где пространство решений — это просто некоторое векторное пространство) представляет собой очень сложную даже для современной теории уравнений математической физики задачу.

Было введено понятие вырождения конечномерной алгебры, его можно рассматривать как обобщение понятия сжатия (контракции) алгебр (ассоциативных, кососкоммутативных, лиевских и др.), которое уже несколько десятилетий находит широкое применение в современной физике и механике. Введено и понятие предельного сжатия. Сжатие алгебр позволяет описывать поведение систем математической физики или механики при приближении некоторого выделенного параметра к заданному (критическому) значению. Критические же значения — это один из ключей к пониманию структуры системы. ибо их можно рассматривать как меру, за которой количественные изменения параметра приводят к качественной перестройке поведения системы в целом. Понятие вырождения позволяет упростить изучение сжатий, так как тут производится рассмотрение с точностью до стабильного изоморфизма алгебр, что позволяет исключить из рассмотрения менее существенные детали и получить более ясные формулировки утверждений. Стабильный изоморфизм - это изоморфизм алгебр, рассматриваемых с точностью до прибавления некоторого прямого слагаемого, являющегося конечномерной алгеброй с тривиальным умножением. Понятие стабильной эквивалентности связано, возможно, с понятием скрытых переменных и заслуживает специального изучения в теории дифференциальных уравнений.

Было введено понятие уровня конечномерной алгебры, это один из инвариантов конечномерной алгебры, рассматриваемой как элемент пространства конечномерных алгебр заданного типа. Эта величина показывает степень сложности операции в рассматриваемой алгебре. Наиболее простыми с этой точки зрения являются коммутативные или просто нулевые алгебры (алгебры с тривиальным умножением), для них алгебра симметрий дифференциальных уравнений фактически распадается на отдельные симметрии, практически ничем не связанные между собой. Уровень таких алгебр равен 0. Были в явном виде описаны алгебры следующего — первого — уровня. Все они стабильно эквивалентны (в лиевском случае) одной единственной алгебре — трехмерной нильпотентной алгебре, составленной из всех вещественных нильпотентных матриц третьего порядка (это - единственная неабелева нильпотентная алгебра Ли размерности 3). Эти алгебры можно рассматривать как результат предельного перехода в произвольной алгебре (кроме имеющих уровень 0). Соответствующие уравнения математической физики можно поэтому рассматривать как предельные для более общих уравнений. Это позволяет выделять среди всевозможных уравнений (причем достаточно нетривиальных) те, к которым предельным переходом сводятся все остальные

Для алгебр Ли была доказана теорема о стабилизации, которая показывает, что рассмотрения конечномерных алгебр с точностью до стабильного изоморфизма на самом деле сводится просто к добавлению некоторого конечномерного прямого слагаемого ограниченной сверху размерности с тривиальным умножением. Этот результат позволяет использовать конечномерные методы, тогда как в силу самого своего определения стабильный изоморфизм как бы подразумевал переход к пределу и использование бесконечномерных объектов. Была получена и количественная формулировка теоремы о стабилизации (указана точная верхняя граница размерности тривиальных прямых слагаемых, которые необходимы для выполнения условия стабилизации), которая позволила проводить все конкретные вычисления с алгебрами (вычисления уровня и др.) вполне конструктивно.

Для различных классов алгебр было проведено исследование понятия уровня. Были получены оценки (в том числе и точные) сверху и снизу для уровня разрешимых алгебр некоторых классов (2-нильпотентных алгебр, а также имеющих абелев идеал коразмерности 1 и некоторых других). Были даны оценки и для уровня полупростых алгебр Ли, причем оказалось, что полупростые алгебры устроены достаточно сложно (т.е. их уровень достаточно велик). Были классифицированы алгебры первых трех уровней сложности. Оказалось, что такой уровень имеют только разрешимые алгебры Ли и только одна нелиевская конечномерная косокоммутативная алгебра — четырехмерная алгебра Мальцева. Для всех фигурирующих в этой классификации алгебр указаны все возможные вырождения их друг в друга (образующие своеобразное дерево вырождений, напоминающее по своему строению диаграмму из теории структур). При этом классификация строилась с точностью до стабильной эквивалентности алгебр, что позволило получить результаты в достаточно обозримой форме.

Полученные результаты позволяют при качественном исследовании уравнений математической физики и механики использовать современные алгебраические методы, основанные на понятии пространства конечномерных алгебр и их деформаций. Для этого были разработаны методы вычисления некоторых характеристик алгебр (уровни разного рода, от конечномерных до стабильных), которые позволяют эффективно проанализировать структуры сложных систем уравнений. Кроме того, была получены классификация алгебр малого уровня, что может рассматривать как первый шаг в систематическом новом подходе к описанию систем математической физики и механики.

3.2. Алгебры анализа и применение гомологических методов

Проводились также исследования в области “алгебр анализа” (в основном — бесконечномерных, банаховых и топологических). Такие алгебры естественным образом возникают при изучении самых различных уравнений математической физики и механики. Например, значительную роль играют алгебраические методы при исследовании уравнений квантовой механики. В частности, были изучены свойства алгебр с точки зрения гомологической алгебры. Получены новые результаты о важных гомологических характеристиках топологических алгебр. Изучались как традиционные гомологические характеристики операторных и других банаховых и полинормированных алгебр — их глобальная размерность и гомологическая биразмерность, так и новые характеристики этих алгебр. Среди новых характеристик отметим пространственную гомологическую размерность операторных алгебр и слабые гомологические размерности банаховых алгебр и модулей над ними. Установлены некоторые общие закономерности, которым подчиняются традиционные и новые гомологические характеристики. В частности, глубоко разработан вопрос о так называемой “формуле аддитивности” для гомологических размерностей — специфическом свойстве банаховых алгебр, не имеющем аналогов в чистой алгебре. Гомологические характеристики вычислялись и оценивались для ряда операторных, сверточных и функциональных алгебр. Изучалась связь гомологических свойств банаховых и топологических алгебр с их классическими свойствами. Получены важные приложения к группам когомологий и к теории расширений банаховых алгебр. Эти результаты могут быть использованы при изучении строения пространств решений весьма общих уравнений математической физики и механики.

Заметим, что гомологические характеристики алгебр анализа изучались в рамках подхода, который, на наш взгляд, шире, чем это принято в большинстве исследований, проводимых на Западе. Если в этих исследованиях основным предметом изучения являются традиционные инварианты — группы гомологий и когомологий, изучаемые специфическими для них методами, то в рамках нашего подхода эти инварианты — а с ними и целый ряд других, часто не менее важных — изучаются с единых позиций производного функтора. При этом на передний план выходят такие фундаментальные понятия, как проективность, инъективность и плоскость. Это позволило получить новые приложения к теории топологических алгебр и к геометрии банаховых пространств.

В изучении гомологических свойств банаховых и топологических алгебр много внимания было уделено исследованию проективных банаховых модулей и модулей Фреше. Изучалось также строение полупервичных алгебр Фреше, обладающих свойством аппроксимации и имеющих нулевую глобальную размерность. Доказано, что такая алгебра может быть представлена как пополнение прямой суммы топологического радикала этой алгебры и некоторого семейства полных матричных алгебр. Кроме того, доказано, что оболочка Аренса–Майкла такой алгебры топологически изоморфна декартову произведению тех же самых полных матричных алгебр. В качестве приложения получено полное описание метризуемых алгебр Аренса–Майкла, которые полупервичны, обладают свойством аппроксимации и имеют нулевую глобальную размерность. Кроме того, начато изучение строения произвольных алгебр Аренса–Майкла с тривиальными когомологиями, а также получила развитие теория бипроективных топологических алгебр. В частности, построен ряд примеров и изучены группы когомологий этих алгебр. Также разработан вопрос о строении топологически полупростых бипроективных алгебр Фреше. В частности, получено описание всех топологически простых бипроективных алгебр Фреше, обладающих свойством аппроксимации.

Для широкого класса бипроективных банаховых алгебр вычислены их основные гомологические характеристики — глобальная размерность и гомологическая биразмерность. Для этого предварительно развита структурная теория неполупростых бипроективных банаховых алгебр. Получены оценки глобальной размерности в некоторых классах радикальных и C^*-алгебр. Доказана бесконечность глобальной размерности важных в гармоническом анализе алгебр берлинговского типа с условиями на веса. Вычислялись гомологические размерности тензорных произведений банаховых алгебр. Для этих размерностей доказаны "формулы аддитивности"при условии, что первая алгебра тензорного произведения произвольна, а вторая принадлежит к некоторому широкому классу банаховых алгебр.

Также решался вопрос из гомологической теории банаховых алгебр о том, как связаны гомологическая размерность произвольного банахова модуля и гомологическая размерность его существенного подмодуля. Показано, что при определенных условиях этот вопрос связан с вопросом о наличии или отсутствии (в некотором усиленном смысле) у существенного подмодуля банахова дополнения. В качестве следствия удалось получить оценку снизу числом 3 для глобальной размерности всех коммутативных C^*-алгебр, спектр которых не является паракомпактным или псевдокомпактным, и получить важные приложения к группам их когомологий.

Получена также важная оценка глобальной размерности тех коммутативных банаховых алгебр, радикалы которых обладают специальными свойствами. Выделен частный случай — радикал есть весовая сверточная алгебра на полупрямой. В качестве приложения доказана нетривиальность в этом случае двумерных когомологий и существование нерасщепимых сингулярных расширений банаховой алгебры.

Кроме того, вычислялись группы когомологий некоторых важных классов топологических алгебр, в том числе бипроективных и биплоских банаховых алгебр. В частности, в классе бипроективных алгебр эти группы вычислены для произвольных коэффициентов. Описание дано в терминах двойных мультипликаторов и квазимультипликаторов данного бимодуля коэффициентов. Особое внимание уделено "модельному"примеру бипроективной банаховой алгебры — тензорной алгебре, порожденной дуальной парой банаховых пространств. Кроме того, получены характеризации в когомологических терминах класса бипроективных банаховых алгебр. Например, доказано, что банахова алгебра является бипроективной тогда и только тогда, когда ее одномерные когомологии с коэффициентами в бимодулях двойных мультипликаторов тривиальны. В классе биплоских банаховых алгебр группы когомологий Хохшильда точно описаны для коэффициентов в дуальных бимодулях. Рассмотрен специальный случай — бимодули левых (правых, двойных и квази-) мультипликаторов. Это потребовало интенсивного развития теории мультипликаторов банаховых бимодулей. Также получены характеризации свойств биплоскости и аменабельности банаховых алгебр в терминах их групп когомологий с коэффициентами в пространствах мультипликаторов.

Изучались некоторые свойства биплоских банаховых алгебр, а также получена классификация биплоских банаховых алгебр в терминах одной из наиболее важных числовых гомологических характеристик банаховых алгебр — слабой гомологической биразмерности. Доказано, что эта характеристика может принимать в классе биплоских банаховых алгебр только три значения: 0, 1 или 2. Показано, что ответ на вопрос, какое конкретно значение принимается слабой биразмерностью данной биплоской алгебры, зависит от наличия в ней односторонних и двусторонних ограниченных аппроксимативных единиц.

Начата работа по изучению других "слабых" гомологических характеристик банаховых алгебр (слабой гомологической размерности банахова модуля, слабой глобальной размерности банаховой алгебры). При определенных условиях для них доказаны "формулы аддитивности". Кроме того, получены оценки слабой глобальной размерности банаховых алгебр в некоторых классах алгебр. В частности, эта характеристика точно вычислена для всех биплоских банаховых алгебр и для алгебр ядерных операторов, действующих в произвольных банаховых пространствах. Получен новый (более удобный) критерий для свойства банахова модуля быть плоским.

Впервые построен пример полупростой банаховой алгебры слабой гомологической биразмерности один. Этот пример есть алгебра компактных операторов на проективном тензорном произведении гильбертовых пространств. Эта алгебра обладает также еще рядом интересных свойств: она является топологически простой биплоской неаменабельной банаховой алгеброй, обладающей левой ограниченной аппроксимативной единицей. В качестве следствия установлено, что у слабых гомологических характеристик нет запрещенных значений в классе полупростых банаховых алгебр.

Также доказана непроективность полугрупповой алгебры на полупрямой и получены приложения этого результата к изучению групп когомологий этой алгебры.

Заключение

Темы исследования в данной НИР относятся к областям теоретической математики, физики и механики, для которых непосредственное внедрение в практику и оценка экономической эффективности такого внедрения не представляются возможными. Результаты НИР имеют значительную научную ценность, так как являются новыми шагами в исследовании актуальных проблем современной теоретической науки и по своему уровню не уступают аналогичным исследованиям, проводимым другими научными коллективами, в том числе и за рубежом. Они могут уже сейчас быть использованы при разработке и чтении специальных курсов для студентов старших курсов МАТИ, а также для студентов, специализирующихся по математике, физике и механике в других вузах.

Список литературы

[1] Аносов Д. В. Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны, Тр. МИАН им. В. А. Стеклова, XC, 1967.

[2] Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Москва: Наука, 1975.

[3] Богданов Р. И. Бифуркации предельного цикла одного семейства векторных полей на плоскости, Тр. сем. им. И. Г. Петровского, вып.2, М., МГУ, 1976, 23–35.

[4] Богданов Р. И. Следы линейных операторов, бифуркационная арифметика и формула Планка, Сб. научн. тр. "Избранные вопросы математики, механики и их приложений". М.: Изд-во МГУ, 1999, 176–206.

[5] Богданов Р. И., Гайдученко И. В., Расторгуев В. А., Тарасов Ю. И. Спектрометрия в слабо-диссипативной теории Колмогорова–Арнольда–Мозера, Тр. семинара "Время, хаос и математические проблемы вып. 1. М.: Книжный дом "Университет", 1999, 203–223.

[6] Богданов Р. И., Гайдученко И. В., Тарасов Ю. И., Галеев А. С. Статистические свойства адиабатических инвариантов в слабо-диссипативной теории КАМ, Межвуз. сб. Уфа: Изд-во УГНТУ, 1999, 264–286.

[7] Винокуров В. А., Введенская Е. В. Перенос многообразия фазовым потоком обыкновенного дифференциального уравнения, ДАН СССР, 1987, 295, №3, 524–528.

[8] Винокуров В. А., Репников Н. Ф. Итерационный метод решения нелинейных краевых задач, ЖВМ и МФ, 1981, 21, №4, 897–906.

[9] Горбацевич В. В. Об оболочках абелевых подгрупп в связных группах Ли, Матем. заметки, 1996, 59, №2, 200–210.

[10] Горбацевич В. В. Расслоение Зейферта для плезиокомпактного однородного пространства, Сиб. матем. журнал. 1996, 37, №3, 301–313.

[11] Горбацевич В. В. Количественый аспект теоремы о стабилизации, Матем. заметки, 1998, 64, №5, 470–477.

[12] Горбацевич В. В. Оценки уровня некоторых разрешимых алгебр Ли, Сиб. матем. журн., 1998, 39, №5, 1013–1027.

[13] Горбацевич В. В. О когомологиях компактных однородных пространств с дискретной стационарной подгруппой II, Сб. "Вопросы теории групп и гомол. алгебры", Ярославль, Изд-во ЯрГУ, 1998, 37–44.

[14] Горбацевич В. В. Геометрии Терстона на базах расслоений однородных пространств, Изв. РАН, Сер. матем. 1999, 63, №4, 38–57.

[15] Капцов А. В., Шифрин Е. И. Аналитическое решение задачи об эллиптической трещине в безграничном упругом пространстве. II, Статическая, сдвиговая, полиномиальная нагрузка. Препринт №559, Институт проблем механики РАН, М., 1996. 30 с.

[16] Крейнин Е. В., Шифрин Е. И. Новая технология термической добычи тяжелых нефтей с использованием горизонтальных скважин, Горный вестник, 1997, №6, 53–56.

[17] Крейнин Е. В., Шифрин Е. И. Физико-технические особенности термического воздействия на пласты углеводородного сырья через горизонтальные скважины, Наука и технология углеводородов, 1999, №4, 3–12.

[18] Кукулин В. И. Стохастический метод оптимизации базиса для вариационных расчетов многочастичных систем. Известия АН СССР. Сер. физическая, 1975, 39, №3, 536–541.

[19] Никулин А. М., Балык В. М. Структурный синтез технических систем с векторным критерием, Сб. научных трудов "В мире науки". Системный анализ, информатика и оптимизация. М., 1996, 62–66.

[20] Никулин А. М., Балык В. М. и др. Поиск устойчивых решений некоторых задач оптимального управления, Сб. тезисов докладов XXXIII Чтений К. Э. Циолковского. М. ИИЕТ РАН, 1998, 78–79.

[21] Никулин А. М, Гурьев Е. К. и др. Автоматизированное рабочее место работника планово-экономической службы предприятия космического машиностроения, Сб. тезисов докладов XXXIII Чтений К. Э. Циолковского. М. ИИЕТ РАН, 1998, 175–176.

[22] Никулин А. М., Кулакова Р. Д. и др., Модели структурно-параметрического синтеза сложных технических систем, Сб. научных трудов "В мире науки". Системный анализ, информатика и оптимизация. М., 1997, 101–110.

[23] Никулин А. М., Кулакова Р. Д. и др. Статический синтез оптимальных режимов управляемого движения, Научные чтения по авиации, посвященные памяти Н. Е. Жуковского, Москва, март 1999, 11.

[24] Никулин А. М., Кулакова Р. Д. и др. Статистический синтез управляемого движения летательного аппарата, Сб. тезисов докладов XXXIV Чтений К. Э. Циолковского. М. ИИЕТ РАН, 1999, 71–73.

[25] Никулин А. М., Кулакова Р. Д. и др. Статистическое обоснование модульного состава аэрокосмической системы. Тезисы докладов. Труды Академии Космонавтики им. К. Э. Циолковского, М., 1999, 42–43.

[26] Осипенко К. Ю. О точных значениях n-поперечников на классах, задаваемых операторами, не увеличивающими осцилляции, Мат. сб., 188, 1997, 113–126.

[27] Осипенко К. Ю. Лемма Шварца в пространствах Харди и Бергмана на единичном шаре из $\mathbb{C}^n$, Научные труды МАТИ, вып. 1(73), 1998, 340–343.

[28] Рамм А. Г., Шифрин Е. И. Асимптотика решений одного класса сингулярно возмущенных интегральных уравнений, Дополнение к русскому изданию книги А. Рамм "Теория оценивания случайных полей". М., Мир, 1996, 317–350.

[29] Шифрин Е. И. Аналитико-численное решение задачи об установившихся колебаниях пространства, ослабленного эллиптической трещиной, IX Конференция по прочности и пластичности. 22–26 января, 1996. Труды конференции. 2, М., 1996.

[30] Bogdanov R. I. Singular relative integral invariants and adiabatic processes of thermodynamics, J. of Math. Sci., 1999, 95, №5, 2463–2483.

[31] Cartwright J. H. E., Arrowsmith D. K., Lansbury A. N., Place C. M. The Bogdanov map: bifurcations, mode locking, and chaos in a dissipative system, Int. Journal of Bifurcations and chaos, 1993, 3, №4, 803–842.
[32] Osipenko K. Yu. Approximation of analytic functions, Approx. theory and numer. methods. Intern. Conf. Rivne, 1996, 99.
[33] Osipenko K. Yu. On exact values of n-widths for classes defined by nonlinear cyclic variation diminishing operators, 3rd Intern. Conf. on Func. Analysis and Approx. Theory, Acquafredda di Maratea, 1996, 73.
[34] Osipenko K. Yu. Optimal recovery of functions in $H_{2,\beta}$. Межд. конф. по теории приближений. Калуга, 1996, 247–248.
[35] Osipenko K. Yu. Optimal recovery of periodic functions from Fourier coefficients given with an error, J. Complexity, 12, 1996, 35–46.
[36] Osipenko K. Yu. Exact n-widths of Hardy-Sobolev classes, Constr. Approx., 13, 1997, 17–27.
[37] Osipenko K. Yu. On optimal recovery of periodic analytic functions, Comput. Methods and Funct. Theory '97, Intern. Conf., Nicosia, 1997, 32.
[38] Osipenko K.Yu. On optimal recovery of derivatives of analytic functions, Теория приближ. и гармонический анализ. Межд. конф., Тула. 1998, 292–292.
[39] Osipenko K.Yu. Optimal recovery of the derivative of periodic analytic functions from Hardy classes, J. Approx. Theory, 1999, 97, 384–395.
[40] Osipenko K. Yu., K. Wilderotter. Optimal information for approximating periodic analytic functions, Math. Comput., 66, 1997, 1579–1592.
[41] Selivanov Yu. V. Frechet algebras of global dimension zero, in "Algebra. Proc. of the 3rd Int. Conf. on Algebra held in Krasnoyarsk, Russia, 1993", Walter de Gruyter, Berlin, 1996, 225–236.
[42] Selivanov Yu. V. Weak homological bidimension and its values in the class of biflat Banach algebras, Extracta Math., 1996, 11, №2, 348–365.
[43] Selivanov Yu. V. Coretraction problems and homological dimensions of Banach algebras, in "13th International Conference on Banach Algebras 1997", Blaubeuren, 1997, 24.
[44] Selivanov Yu. V. Ghahramani F. On global (homological) dimension of commutative Banach algebras, Abstracts of Papers Presenteded to AMS, 1997, 18, №1, 101.
[45] Selivanov Yu. V. Homological dimensions of tensor products of Banach algebras, in "Banach Algebras' 97", Walter de Gruyter, Berlin, 1998, 441–460.
[46] Selivanov Yu. V., Ghahramani F. The global dimension theorem for weighted convolution algebras, Proc. Edinburgh Math. Soc., 1998, 41, 393–406.
[47] Selivanov Yu. V. Cohomological characterizations of biprojective and biflat Banach algebras, Monats. Math., 1999, 128, 35–60.
[48] Selivanov Yu. V. Coretraction problems and homological properties of Banach algebras, in "Topological Homology. Helemskii's Moscow Seminar", N.Y.: Nova Science Publ., 1999, 1-58.
[49] Shifrin E. I. Analytical solution of three-dimensional problem for elliptical crack subjected to arbitrary time-harmonic loads, ECF 11 Mechanisms and mechanics of damage and failure, Vol. I. Editor J. Petit co-editors J. de Fouqet, G. Henaff, P. Villechuise and A. Dragon. Chameleon Press LTD, London, United Kingdom, 1996, 497-502.

[50] Shifrin E. I. Semi-analytical solution of the problem of elastic wave scattering by elliptical racks, Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik (ZAMM), 1996, 76, S5, 471–472.

[51] Shifrin E. I. Some analytical and numerical methods for solving pseudodifferential equations of 3d crack problems, International Conference on Operator Theory and its Applications to Scientific and Industrial Problems. Institute of Industrial Mathematical Sciences University of Manitoba, October 7–11, 1998, Delta Winnipeg Hotel, Winnipeg, Canada, 1998, 23–24.

[52] Shifrin E. I., Brank B., Surace G. Analytical-numerical solution of elliptical interface crack problem, International Journal of Fracture, 1998, 94, №3, 201–215.

[53] Shifrin E. I., Ruotolo R. Detection of cracks in a beam using natural frequencies for transverse vibration, International Conference on Operator Theory and its Applications to Scientific and Industrial Problems. Institute of Industrial Mathematical Sciences University of Manitoba October 7–11, 1998 Delta Winnipeg Hotel, Winnipeg, Canada, 1998, 41.

[54] Shifrin E. I., Ruotolo R. Natural frequencies of a beam with an arbitrary number of cracks, J. of Sound and Vibration, 1999, 222, №3, 409–423.