УДК 517.5

О НАИЛУЧШИХ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛАХ В ПРОСТРАНСТВАХ ХАРДИ H_p

Д. ф-м. н., проф. К. Ю. Осипенко[1]

Пространством Харди H_p, $1 \le p \le \infty$, называется множество аналитических в единичном диске $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ функций, для которых

$$\|f\|_{H_p} := \sup_{0<r<1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^p dt \right)^{1/p} < \infty, \qquad 1 \le p < \infty,$$
$$\|f\|_{H_\infty} := \sup_{z \in D} |f(z)| < \infty, \quad p = \infty.$$

Через BH_p будем обозначать замкнутый единичный нар H_p

$$BH_p := \{\, f \in H_p : \|f\|_{H_p} \le 1 \,\}.$$

На классе BH_p мы рассматриваем задачу оптимального восстановления интеграла

$$\int_a^b f(x)p(x)\,dx \tag{1}$$

по значениям информационного оператора

$$If := \{\, f(x_1), \dots, f^{(\nu_1-1)}(x_1), \dots, f(x_n), \dots, f^{(\nu_n-1)}(x_n) \,\},$$

где $p(x)$ — неотрицательная весовая функция, $x_1, \dots, x_n$ — различные точки из интервала $(-1, 1)$ и $(a, b) \subset (-1, 1)$.

Для $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ положим

$$\tau_\nu := \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ \nu_1 & \dots & \nu_n \end{pmatrix}.$$

Погрешностью оптимального восстановления интеграла (1) на классе BH_p назовем величину

$$E(\tau_\nu) := \inf_{\varphi\colon\, \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}} \ \sup_{f \in BH_p} \left| \int_a^b f(x)p(x)\,dx - \varphi(If) \right| \tag{2}$$

Метод восстановления, на котором достигается нижняя грань в (2), будем называть *оптимальным*.

[1]Работа поддержана грантами РФФИ (№96-01-10035, №99-01-01181) и государственной программой поддержки ведущих научных школ России (№96-15-96072).

Из общих результатов, касающихся оптимального восстановления линейных функционалов (см., например, [1]), вытекает, что

$$E_p(\tau_\nu) = \sup_{\substack{f\in BH_p\\ If=0}} \left| \int_a^b f(x)p(x)\,dx \right|. \tag{3}$$

и, кроме того, существует линейный оптимальный метод восстановления. Иными словами, существует квадратурная формула

$$\int_a^b f(x)p(x)\,dx \approx \varphi_0(If) = \sum_{j=1}^n \sum_{m=0}^{\nu_j-1} a_{jm} f^{(m)}(x_j),$$

для которой

$$\sup_{f\in BH_p} \left| \int_a^b f(x)p(x)\,dx - \varphi_0(If) \right| = E(\tau_\nu).$$

Такая квадратурная формула называется *наилучшей* для данной системы узлов τ_ν.

Построению наилучших, а также оптимальных квадратурных формул (под оптимальными квадратурными формулами понимаются квадратурные формулы, погрешность которых минимизируется за счет выбора узлов) посвящено довольно много работ, большая часть которых касается классов гладких функций (см. [2]). Для классов аналитических функций известно значительно меньше результатов. В частности, наилучшие квадратурные формулы для классов Харди BH_p известны лишь при $p = \infty$ ([3, 4]).

В данной работе строится наилучшая квадратурная формула на классах Харди при всех $1 \le p \le \infty$ для случая, когда $\nu_1, \dots, \nu_n$ — четные числа. При этом коэффициенты наилучшей квадратурной формулы выражаются через экстремальную функцию, являющуюся решением задачи (3). Существование такой функции, а также ряд важных свойств этой функции вытекают из следующей леммы.

Лемма. *Положим*

$$B(x) := \prod_{j=1}^n \left(\frac{x - x_j}{1 - x_j x} \right)^{\nu_j}.$$

Предположим, что $\nu_1, \dots, \nu_n$ *— четные числа,* $1 < p \le \infty$ *или* $p = 1$ *и* $-1 < a < b < 1$*. Тогда*

(1) *существует единственная функция* $g_{\tau_\nu,p} \in BH_p$ *такая, что*

$$E_p(\tau_\nu) = \int_a^b g_{\tau_\nu,p}(x) B(x) p(x)\,dx,$$

(2) $g_{\tau_\nu,p}$ *не имеет нулей в диске* D *и* $g_{\tau_\nu,p}(x)>0$ *при* $x\in(-1,1)$,

(3) *при всех* $1<p<\infty$ *и всех* $\theta\in[0,2\pi]$

$$E_p(\tau_\nu)|g_{\tau_\nu,p}(e^{i\theta})|^p=\int_a^b g_{\tau_\nu,p}(x)B(x)P(e^{i\theta},x)p(x)\,dx,$$

где $P(e^{i\theta},x)$ *— ядро Пуассона.*

При $p=\infty$ легко убедиться, что $g_{\tau_\nu,\infty}\equiv 1$. Функция $g_{\tau_\nu,2}$ также может быть найдена в явном виде. Действительно, используя формулу Коши, имеем

$$\sup_{g\in BH_2}\left|\int_a^b g(x)B(x)p(x)\,dx\right|$$
$$=\sup_{g\in BH_2}\left|\int_a^b \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{g(e^{i\theta})}{1-xe^{-i\theta}}\,d\theta B(x)p(x)\,dx\right|=\sup_{g\in BH_2}\left|(g,\psi)_{H_2}\right|,$$

где

$$\psi(z)=\int_a^b\frac{B(x)}{1-xz}p(x)\,dx,$$

а

$$(g,\psi)_{H_2}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g(e^{i\theta})\overline{\psi(e^{i\theta})}\,d\theta$$

— скалярное произведение в гильбертовом пространстве H_2. Таким об-разом,

$$g_{\tau_\nu,2}(z)=\frac{\psi(z)}{\|\psi\|_{H_2}}.$$

Теорема. *Пусть* $\nu_1,\dots,\nu_n$ *— четные числа,* $1<p\le\infty$ *или* $p=1$ *и* $-1<a<b<1$. *Тогда квадратурная формула*

$$\int_a^b f(x)p(x)\,dx\approx\sum_{j=1}^n\sum_{m=0}^{\nu_j-1}a_{jm}f^{(m)}(x_j),$$

в которой

$$a_{jm}=\int_a^b c_{jm}(x)p(x)\,dx,$$

$$c_{jm}(x)=\frac{B(x)g_{\tau_\nu,p}(x)(1-x^2)}{m!(\nu_j-m-1)!}$$
$$\times\left(\frac{(1-x_jz)^{\nu_j}}{\omega_j(z)g_{\tau_\nu,p}(z)(x-z)(1-xz)}\right)^{(\nu_j-m-1)}\Bigg|_{z=x_j},$$

$$\omega_j(x) = \prod_{\substack{s=1 \\ s\neq j}}^{n} \left(\frac{x - x_s}{1 - x_s x} \right)^{\nu_s},$$

является наилучшей на классе BH_p для системы узлов τ_ν.

Литература

[1] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Об оптимальном восстановлении функционалов по неточным данным. // Мат. заметки, 1991, 50. – с. 85–93.

[2] Никольский С. М. Квадратурные формулы. М.: Наука, 1979. – 256 стр.

[3] Bojanov B. D. Best quadrature formula for a certain class of analytic functions. // Zastos. Math. 1974, 14. – p. 441–447.

[4] Осипенко К. Ю. О наилучших и оптимальных квадратурных формулах на классах ограниченных аналитических функций. // Изв. АН СССР, Сер. мат. 1988, 52. – с. 79–99.

АННОТАЦИЯ

В данной работе мы находим наилучшую квадратурную формулу в пространствах Харди H_p, $1 \le p \le \infty$. Коэффициенты этой формулы даны в терминах экстремальной функции для погрешности наилучшей квадратурной формулы.

ON BEST QUADRATURE FORMULAS ON THE HARDY SPACES H_p

K. Yu. Osipenko

In this paper we find a best quadrature formula for the Hardy spaces H_p, $1 \le p \le \infty$. The coefficients of this formula are given in terms of an extremal function for the error of a best quadrature formula