О НАИЛУЧШИХ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛАХ НА КЛАССАХ ХАРДИ–СОБОЛЕВА

К. Ю. Осипенко

Аннотация. Для функций из класса Харди–Соболева H^r_∞, определяемого как множество функций, аналитических в единичном круге и удовлетворяющих в нем условию $|f^{(r)}(z)| \le 1$, строятся наилучшие квадратурные формулы, использующие значения функций и их производных в фиксированной системе узлов из интервала $(-1, 1)$. Для периодического класса Харди–Соболева $H^r_{\infty,\beta}$, определяемого как множество 2π-периодических функций, аналитических в полосе $|\operatorname{Im} z| < \beta$ и удовлетворяющих в ней условию $|f^{(r)}(z)| \le 1$, доказано, что для равномерной системы узлов формула прямоугольников является наилучшей, и найдена ее погрешность. Построены наилучшие квадратурные формулы на классе $H_{p,\beta}$, определение которого аналогично классу $H_{\infty,\beta}$, но ограничения на функцию задаются в L_p-норме по границе. Построен также оптимальный метод восстановления функций из класса H^r_p по тейлоровской информации $f(0), f'(0), \dots, f^{(n+r-1)}(0)$.

Введение

Пусть X — линейное пространство над полем $K = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, W — некоторое подмножество X и $L, l_1, \dots, l_n$ — линейные функционалы на X. Под задачей оптимального восстановления функционала L на множестве W по значениям информационного оператора $Ix = (l_1x, \dots, l_nx)$, $x \in W$, понимается задача о нахождении величины

$$(1) \qquad e(L, W, I) := \inf_{S\colon K^n \to K} \sup_{x \in W} |Lx - S(Ix)|,$$

а также метода S, на котором достигается нижняя грань в (1) (если таковой существует), называемом оптимальным методом восстановления.

Задачи оптимального восстановления, начиная с работы [1], изучались многими авторами (см. [2]–[5] и цитируемую там литературу). Отметим здесь лишь один результат, доказанный в [1] для

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 99-01-01181 и 00–15–96109).

вещественного пространства и в [6] — для комплексного: для выпуклого уравновешенного множества W среди оптимальных методов восстановления существует линейный и имеет место равенство

$$e(L,W,I)=\sup_{\substack{x\in W\\ Ix=0}}|Lx|. \tag{2}$$

Всякий элемент x_0, на котором достигается верхняя грань в (2), будем называть экстремальным.

Задача (2) часто оказывается проще, чем задача нахождения оптимального метода. В связи с этим в работе [7] был предложен метод, позволяющий при наличии некоторой параметризации экстремального элемента в задаче (2) находить оптимальный метод восстановления. Здесь этот метод используется для нахождения наилучших квадратурных формул и оптимального восстановления по тейлоровской информации на классах Харди–Соболева.

Классом Харди–Соболева H_p^r будем называть множество функций f, аналитических в единичном круге $D:=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ и удовлетворяющих условию

$$\sup_{0<\rho<1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f^{(r)}(\rho e^{i\theta})|^p\,d\theta\le 1,\quad 1\le p<\infty,$$

$$\sup_{z\in D}|f^{(r)}(z)|\le 1,\quad p=\infty.$$

Периодическим классом Харди–Соболева $H_{p,\beta}^r$ будем называть множество 2π-периодических функций f, аналитических в полосе $S_\beta:=\{z\in\mathbb{C}:|\operatorname{Im}z|<\beta\}$ и удовлетворяющих условию

$$\sup_{0\le\eta<\beta}\left(\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\left(|f^{(r)}(t+i\eta)|^p+|f^{(r)}(t-i\eta)|^p\right)\,dt\right)^{1/p}\le 1,$$

$$\sup_{z\in S_\beta}|f^{(r)}(z)|\le 1.$$

При $r=0$ соответствующие классы будем обозначать через H_p и $H_{p,\beta}$.

В §1 для класса H_∞^r и информационного оператора

$$If=(f(x_1),\dots,f^{(\nu_1-1)}(x_1),\dots,f(x_n),\dots,f^{(\nu_n-1)}(x_n)), \tag{3}$$

где $x_1,\dots,x_n$ — различные точки из интервала $(-1,1)$, а $\nu_1,\dots,\nu_n$ — четные числа, строится линейный оптимальный метод интегрирования (наилучшая квадратурная формула) для интеграла

$$\int_{-1}^{1}f(x)p(x)\,dx,$$

в котором $p(x)$ — неотрицательная весовая функция.

В §2 строится наилучшая квадратурная формула на классе $H_{\infty,\beta}^r$ для равноотстоящих узлов. Доказано, что таковой является формула прямоугольников, и найдена ее погрешность. При $r=0$ для классов H_∞ и $H_{\infty,\beta}$ наилучшие квадратурные формулы исследовались в работах [8]–[10].

В §3 построены наилучшие квадратурные формулы для класса $H_{p,\beta}$ по информационному оператору (3), в котором $x_1,\dots,x_n$ — различные точки из $\mathbb{T}:=[0,2\pi)$. Аналогичная задача в непериодическом случае решена в [11, стр. 175]. В §4 построен оптимальный метод восстановления функций из класса H_p^r по информационному оператору $If=(f(0),f'(0),\dots,f^{(n+r-1)}(0))$. Оптимальные методы в этой задаче исследовались ранее в работах [12] ($p=\infty$, $r=2$), [2] ($p=\infty$, $r=1$), [13] ($1\le p\le\infty$, $r=0$), [14] ($p=\infty$, $r\in\mathbb{Z}_+$, многомерный случай), [11, стр. 69] ($1\le p\le\infty$, $r=0$, многомерный случай).

Нам потребуется следующий результат из работы [7].

Теорема 1. *Пусть X — вещественное линейное пространство, W — выпуклое центрально-симметричное множество из X и x_0 — экстремальный элемент в задаче оптимального восстановления линейного функционала L на множестве W по значениям линейных функционалов $l_1x,\dots,l_nx$. Пусть каждому $M=(t_1,\dots,t_n)\in\mathbb{R}^n$ из некоторой окрестности точки $M_0\in\mathbb{R}^n$ поставлен в соответствие элемент $x(M)\in W$, причем $x(M_0)=x_0$. Тогда, если функции $\varphi(M):=Lx(M)$, $\varphi_j(M):=l_jx(M)$, $j=1,\dots,n$, имеют в окрестности M_0 непрерывные частные производные по всем аргументам и определитель матрицы*

$$J(M)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial t_1} & \dots & \dfrac{\partial\varphi_n}{\partial t_1}\\ \dots & \dots & \dots\\ \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial t_n} & \dots & \dfrac{\partial\varphi_n}{\partial t_n}\end{pmatrix}$$

отличен от нуля в точке M_0, то единственным линейным оптимальным методом восстановления является метод

$$Lx\approx\sum_{j=1}^n C_jl_jx,$$

где $C_1,\dots,C_n$ — решения системы

$$J(M_0)\mathbf{C}=\operatorname{grad}\varphi\big|_{M_0},$$

в которой $\mathbf{C}=(C_1,\dots,C_n)$.

§1. Наилучшие квадратурные формулы на классе H_∞^r

Рассмотрим задачу оптимального восстановления (1) для $W=H_\infty^r$,

$$Lf=\int_{-1}^{1}f(x)p(x)\,dx, \tag{4}$$

где $p(x)$ — неотрицательная весовая функция, и информационного оператора I, определенного равенством (3). Положим

$$N := \sum_{j=1}^{n} \nu_j. \tag{5}$$

Докажем сначала несколько вспомогательных утверждений. Напомним, что система вещественных функций $\{u_k(t)\}_{k=0}^{m}$, m раз непрерывно дифференцируемых на интервале (c,d), называется ET-системой, если каждый обобщенный полином

$$P(t) = \sum_{k=0}^{m} C_k u_k(t), \quad \sum_{k=0}^{m} C_k^2 \neq 0,$$

имеет на (c,d) не более m корней с учетом алгебраической кратности.

Произведением Бляшке порядка n называется функция вида

$$B(z) = \lambda \prod_{j=1}^{n} \frac{z - z_j}{1 - \overline{z}_j z},$$

где $|\lambda| = 1$, а $z_j \in D$, $j = 1,\dots,n$. Для $\mu_j \in \mathbb{N}$, $j = 1,\dots,n$, и $\alpha_j \in (-1,1)$ положим

$$W_j(x) := \frac{x - \alpha_j}{1 - \alpha_j x}, \quad W(x) := \prod_{j=1}^{m} \left(\frac{x - \alpha_j}{1 - \alpha_j z} \right)^{\mu_j}.$$

Лемма 1. *Система функций*

$$g_{jk}(x) := W(x) \left(W_j^{-k}(x) - W_j^{k}(x) \right), \quad k = 1,\dots \mu_j,\ j = 1,\dots,m, \tag{6}$$

является ET-системой на $(-1,1)$.

Доказательство. Рассмотрим обобщенный полином

$$P(x) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{\mu_j} C_{jk} g_{jk}(x), \quad \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{\mu_j} C_{jk}^2 \neq 0.$$

В силу того, что $W_j(\pm 1) = \pm 1$, этот обобщенный полином можно записать в виде

$$P(x) = a_0 \frac{(1 - x^2) x^l \prod_{j=1}^{s} (x - a_j)}{\prod_{j=1}^{m} (1 - \alpha_j x)^{2\mu_j}},$$

где $a_0, a_1, \dots, a_s \neq 0$. Поскольку $W_j(x^{-1}) = W_j^{-1}(x)$, имеем

$$P(x^{-1}) = \frac{1}{W(x)} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{\mu_j} C_{jk} \left(W_j^{k}(x) - W_j^{-k}(x) \right) = -W^2(x) P(x).$$

Из последнего равенства легко получить, что с каждым нулем $a_j \neq 0$ функции P связан нуль этой функции a_j^{-1} той же кратности, а кроме того, что $l + s/2 = \sum_{j=1}^{m} \mu_j - 1$. Тем самым обобщенный полином P в интервале $(-1, 1)$ имеет не более $\sum_{j=1}^{m} \mu_j - 1$ нулей с учетом алгебраической кратности. □

Для функций f, аналитических в единичном круге, положим $T_0 f := f$ и

$$(T_r f)(z) := \int_0^z \frac{(z-\zeta)^{r-1}}{(r-1)!} f(\zeta)\, d\zeta, \quad r \in \mathbb{N}. \tag{7}$$

Очевидно, что $(T_r f)^{(r)} = f$, и следовательно, $T_r f \in H_\infty^r$ при всех $f \in H_\infty$.

Пусть

$$\sum_{j=1}^{m} \mu_j + r = N.$$

Определим функции $\omega_1, \ldots, \omega_N$ равенством

$$\begin{aligned} (\omega_1(z), \ldots, \omega_N(z)) := (1, z, \ldots, z^{r-1}, \\ (T_r g_{11})(z), \ldots, (T_r g_{1\mu_1})(z), \ldots, (T_r g_{m1})(z), \ldots, (T_r g_{m\mu_m})(z)). \end{aligned} \tag{8}$$

Положим

$$(a_{j1}, \ldots, a_{jN}) := I\omega_j, \quad j = 1, \ldots, N, \quad A := \{a_{jk}\}_{j,k=1}^N. \tag{9}$$

Лемма 2. $\det A \neq 0$.

Доказательство. Если $\det A = 0$, то найдутся $C_1, \ldots, C_N$, не все равные нулю, для которых функция

$$F(z) := \sum_{j=1}^{N} C_j \omega_j(z)$$

в интервале $(-1, 1)$ будет иметь по крайней мере N нулей с учетом кратности. В этом случае по теореме Ролля $F^{(r)}$ должна иметь в том же интервале не менее $N - r$ нулей. Поскольку

$$F^{(r)}(z) = C_{r+1} g_{11}(z) + \ldots + C_N g_{m\mu_m}(z),$$

то из леммы 1 вытекает, что $C_{r+1} = \ldots = C_N = 0$, но тогда и $C_1 = \ldots = C_r = 0$. Полученное противоречие доказывает, что $\det A \neq 0$. □

Обозначим через $H_\infty^{r,\mathbb{R}}$ множество функций из H_∞^r, вещественных в интервале $(-1, 1)$.

Предложение 1. *Пусть $-1 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < 1$. Тогда при всех четных $\nu_1, \ldots, \nu_n$ существует функция $F \in H_\infty^{r,\mathbb{R}}$, имеющая вид*

$$F = P_{r-1} + T_r W,$$

где P_{r-1} — полином степени $r-1$, а W — произведение Бляшке порядка $N-r$

$$W(z)=\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{z-\alpha_j}{1-\alpha_j z}\right)^{\mu_j},\quad \sum_{j=1}^{m}\mu_j=N-r,$$

$x_1\le\alpha_1<\ldots<\alpha_m\le x_n$, *для которой* $IF=0$ *и*

$$\sup_{\substack{f\in H_\infty^{r,\mathbb{R}}\\ If=0}}\int_{-1}^{1}f(x)p(x)\,dx=\int_{-1}^{1}F(x)p(x)\,dx.$$

Доказательство. Из работы [15] вытекает существование функции $F\in H_\infty^{r,\mathbb{R}}$, нормированной условием $F(1)>0$, для которой $IF=0$ и такой, что $F^{(r)}$ является произведением Бляшке порядка $N-r$. Кроме того, в той же работе доказано, что при всех $x\in(-1,1)$ имеет место равенство

$$\sup_{\substack{f\in H_\infty^{r,\mathbb{R}}\\ If=0}}|f(x)|=|F(x)|. \tag{10}$$

Из теоремы Ролля вытекает, что функция F не имеет других нулей в интервале $(-1,1)$ кроме нулей в точках $x_1,\ldots,x_n$ с четными кратностями $\nu_1,\ldots,\nu_n$. Поэтому в силу нормировки $F(1)>0$ для всех $x\in(-1,1)$ $F(x)\ge 0$. Учитывая равенство (10), получаем утверждение предложения. □

Теорема 2. *Пусть $-1<x_1<x_2<\ldots<x_n<1$, $\nu_1,\ldots,\nu_n$ — четные числа, W — произведение Бляшке из предложения 1, а g_{jk}, ω_j и матрица A определены равенствами (6), (8) и (9), соответственно. Тогда метод*

$$\int_{-1}^{1}f(x)p(x)\,dx\approx\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{\nu_j-1}c_{jk}f^{(k)}(x_j), \tag{11}$$

в котором c_{jk} определяются из системы

$$A\mathbf{c}=\mathbf{d}, \tag{12}$$

где $\mathbf{c}=(c_{10},\ldots,c_{1,\nu_1-1},\ldots,c_{n0},\ldots,c_{n,\nu_n-1})$, $\mathbf{d}=(d_1,\ldots,d_N)$,

$$d_j=\int_{-1}^{1}\omega_j(x)p(x)\,dx,\quad j=1,\ldots,N,$$

является оптимальным на классе H_∞^r.

Доказательство. Докажем сначала, что метод (11) является оптимальным на классе $H_\infty^{r,\mathbb{R}}$. Положим $W_{j0}(z):=1$, $j=1,\ldots,m$, и

$$W_{j,k+1}(z):=\frac{W_j(z)W_{jk}(z)+\varepsilon_{j,k+1}}{1+\varepsilon_{j,k+1}W_j(z)W_{jk}(z)},\quad j=1,\ldots,m,\ k=0,\ldots,\mu_j-1.$$

При всех $\varepsilon_{j1},\dots,\varepsilon_{j,\mu_j}\in(-1,1)$ функции $W_{j,\mu_j}\in H_\infty$. Положим для $P=(a_0,\dots,a_{r-1},\varepsilon_{11},\dots,\varepsilon_{1,\mu_1},\dots,\varepsilon_{m1},\dots,\varepsilon_{m,\mu_m})\in\mathbb{R}^N$

$$f_P(z):=\sum_{j=0}^{r-1}a_jz^j+(T_rW_P)(z),$$

где

$$W_P(z)=\prod_{j=1}^{m}W_{j,\mu_j}(z).$$

Пусть полином P_{r-1} из предложения 1 имеет вид

$$P_{r-1}(z)=\sum_{j=0}^{r-1}a_j^0z^j.$$

Тогда в силу предложения 1 при $P=P_0:=(a_0^0,\dots,a_{r-1}^0,0,\dots,0)$ функция f_{P_0} является экстремальной в задаче оптимального восстановления интеграла (4) на классе $H_\infty^{r,\mathbb{R}}$ по информации (3). Определим функции $\varphi_1,\dots,\varphi_N$ равенством

$$(\varphi_1(A),\dots,\varphi_N(P)):=If_P.$$

Нетрудно убедиться, что в точке P_0

$$\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial a_j},\dots,\frac{\partial\varphi_N}{\partial a_j}\right)=I\omega_{j+1},\quad 0\le j\le r-1,$$
$$\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial\varepsilon_{jk}},\dots,\frac{\partial\varphi_N}{\partial\varepsilon_{jk}}\right)=I(T_rg_{jk}),\quad 1\le j\le m,\ 1\le k\le\mu_j.$$

Положив

$$\varphi(P)=\int_{-1}^{1}f_P(x)p(x)\,dx,$$

легко проверить, что в точке P_0

$$\frac{\partial\varphi}{\partial a_j}=\int_{-1}^{1}x^jp(x)\,dx,\quad 0\le j\le r-1,$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon_{jk}}=\int_{-1}^{1}(T_rg_{jk})(x)p(x)\,dx,\quad 1\le j\le m,\ 1\le k\le\mu_j.$$

Из теоремы 1, учитывая лемму 2, вытекает теперь, что коэффициенты оптимального метода на классе $H_\infty^{r,\mathbb{R}}$ определяются из системы (12).

Докажем теперь, что построенный метод (обозначим его через S) является оптимальным и для класса H_∞^r. Предположим, что найдется функция $f_0\in H_\infty^r$, для которой

$$|Lf_0-S(If_0)|>e(L,H_\infty^r,I).$$

Тогда для функции $\overline{f_0(\overline{z})} \in H^r_\infty$ также выполнено это неравенство. В силу уравновешенности класса H^r_∞ без ограничения общности можно считать, что $Lf_0 - S(If_0) > 0$. Следовательно, для функции

$$g(z) := \frac{f_0(z) + \overline{f_0(\overline{z})}}{2} \in H^{r,\mathbb{R}}_\infty$$

имеем

$$Lg - S(Ig) > e(L, H^r_\infty, I) \geq e(L, H^{r,\mathbb{R}}_\infty, I),$$

что невозможно в силу оптимальности метода S на классе $H^{r,\mathbb{R}}_\infty$. $\square$

§2. Периодический случай

Построим теперь оптимальный метод интегрирования для интеграла

$$Lf = \int_{\mathbb{T}} f(x)\,dx$$

на классе $H^r_{\infty,\beta}$ по информационному оператору

$$If = \left(f(0), f\left(\frac{2\pi}{n}\right), \ldots, f\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)\right). \tag{13}$$

При достаточно общих условиях на класс функций можно доказать, что формула прямоугольников является оптимальным методом интегрирования, использующим информационный оператор (13). Пусть $\mathcal{H}$ — выпуклый и уравновешенный класс непрерывных на всей вещественной оси 2π-периодических функций f таких, что для любых вещественных констант C и a $f(x) + C \in \mathcal{H}$ и $f(x+a) \in \mathcal{H}$.

Лемма 3. *Формула прямоугольников*

$$\int_{\mathbb{T}} f(x)\,dx \approx \frac{2\pi}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f\left(\frac{2j\pi}{n}\right) \tag{14}$$

является оптимальным методом интегрирования на классе $\mathcal{H}$, а для ее погрешности справедливо равенство

$$e(L, \mathcal{H}, I) = 2\pi \sup_{f \in \mathcal{H}_n} |f(0)|,$$

где $\mathcal{H}_n$ — множество функций из $\mathcal{H}$ периода $2\pi/n$, для которых

$$\int_0^{2\pi/n} f(x)\,dx = 0. \tag{15}$$

Если функции из класса $\mathcal{H}$ дифференцируемы, то формула прямоугольников является оптимальным методом интегрирования и *для информационного оператора*

$$I_1 f = \left(f(0), f'(0), f\left(\frac{2\pi}{n}\right), f'\left(\frac{2\pi}{n}\right), \right.$$
$$\left. \dots, f\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}\right) f'\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}\right) \right).$$

Доказательство. В работе [16] (см. также [17, стр. 208]) было доказано, что

$$\sup_{f\in\mathcal{H}} \left| \int_{\mathbb{T}} f(x)\,dx - \frac{2\pi}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f\left(\frac{2j\pi}{n}\right) \right| = 2\pi \sup_{f\in\mathcal{H}_n} |f(0)|.$$

Тем самым

$$e(L, \mathcal{H}, I) \le 2\pi \sup_{f\in\mathcal{H}_n} |f(0)|.$$

С другой стороны, для любого $\varepsilon > 0$ найдется функция $g \in \mathcal{H}_n$, для которой

$$|g(0)| > \sup_{f\in\mathcal{H}_n} |f(0)| - \varepsilon.$$

В силу свойств класса $\mathcal{H}_n$ можно считать, что

$$g(0) = -\max_{x\in[0,2\pi/n)} |g(x)|.$$

Рассмотрим функцию

$$f_0(x) := g(x) - g(0).$$

Поскольку $f_0 \in \mathcal{H}$ и $If_0 = 0$, то из (2) имеем

$$e(L, \mathcal{H}, I) \ge \left| \int_{\mathbb{T}} f_0(x)\,dx \right| = 2\pi |g(0)| > 2\pi \sup_{f\in\mathcal{H}_n} |f(0)| - 2\pi\varepsilon.$$

Таким образом,

$$e(L, \mathcal{H}, I) = 2\pi \sup_{f\in\mathcal{H}_n} |f(0)|,$$

а формула прямоугольников — оптимальный метод для информационного оператора I.

В случае дифференцируемости функций из класса $\mathcal{H}$ для доказательства оптимальности формулы прямоугольников для информационного оператора I_1 достаточно заметить, что $I_1 f_0 = 0$ и в силу (2)

$$e(L, \mathcal{H}, I) \ge e(L, \mathcal{H}, I_1).$$

□

Теорема 3. *При всех* $r \ge 1$ *формула прямоугольников* (14) *является оптимальным методом интегрирования на классе* $H^r_{\infty,\beta}$ *для* *информационных операторов I и I_1, а для ее погрешности справедливы равенства*

$$\begin{aligned} &e(L, H^r_{\infty,\beta}, I) = e(L, H^r_{\infty,\beta}, I_1) \\ &= \frac{2\pi^2}{\sqrt{\lambda}\Lambda n^r} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m(r+1)}}{(2m+1)^r \operatorname{sh}((2m+1)2n\beta)} = \frac{4\pi}{n^r} e^{-\beta n} + O\left(\frac{e^{-5\beta n}}{n^r}\right), \end{aligned}$$

где

$$\lambda = 4e^{-2\beta n} \left(\frac{\sum_{m=0}^{\infty} e^{-4\beta n m(m+1)}}{1 + 2\sum_{m=1}^{\infty} e^{-4\beta n m^2}}\right)^2,$$

а

$$\Lambda = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-\lambda^2 t^2)}}$$

— полный эллиптический интеграл первого рода для модуля λ.

Доказательство. Оптимальность формулы прямоугольников на классе $H^r_{\infty,\beta}$ для информационных операторов I и I_1 вытекает непосредственно из леммы 3. Остается найти величину

$$\sup_{f \in H^r_{\infty,\beta,n}} |f(0)|,$$

где $H^r_{\infty,\beta,n}$ — множество функций f из $H^r_{\infty,\beta}$, имеющих период $2\pi/n$ и удовлетворяющих условию (15). Положим

$$\begin{aligned} a_j(f) &:= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x) \cos jx\, dx, \quad j = 0, 1, \dots\ , \\ b_j(f) &:= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x) \sin jx\, dx, \quad j = 1, 2, \dots\ . \end{aligned}$$

Очевидно, что

$$\sup_{f \in H^r_{\infty,\beta,n}} |f(0)| \le \sup_{\substack{f \in H^r_{\infty,\beta} \\ a_0(f)=a_1(f)=b_1(f)=\ldots=a_{n-1}(f)=b_{n-1}(f)=0}} |f(0)|. \tag{16}$$

Величина, стоящая в правой части неравенства (16) была вычислена в работе [18]. Она достигается на функции

$$\varphi^\beta_{n,r}(z) := \begin{cases} \Phi^\beta_{n,r}\left(z + \dfrac{\pi}{2n}\right), & r = 2l, \\ \Phi^\beta_{n,r}(z), & r = 2l+1, \end{cases}$$

где

$$\Phi^\beta_{n,r} := D_r * \Phi_{n,0}, \quad r \ge 1, \quad \Phi^\beta_{n,0}(z) := \sqrt{\lambda} \operatorname{sn}\left(\frac{2n\Lambda}{\pi} z, \lambda\right),$$

$$D_r(t) = 2\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(mt - \pi r/2)}{m^r}, \quad r = 1, 2, \dots\ ,$$

— ядро Бернулли, а

$$(f * g)(z) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(z-t) g(t)\, dt.$$

В работе [19] было показано, что

$$\Phi_{n,r}^{\beta}(z) = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}\Lambda n^r} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin((2m+1)nz - \pi r/2)}{(2m+1)^r \operatorname{sh}((2m+1)2n\beta)}.$$

Тем самым $\varphi_{n,r}^{\beta} \in H_{\infty,\beta,n}^{r}$, а следовательно,

$$\sup_{f \in H_{\infty,\beta,n}^{r}} |f(0)| \geq |\varphi_{n,r}^{\beta}(0)| = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}\Lambda n^r} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m(r+1)}}{(2m+1)^r \operatorname{sh}((2m+1)2n\beta)}.$$

Для получения асимптотики погрешности остается воспользоваться хорошо известным равенством (см., например, [20])

$$\Lambda = \frac{\pi}{2} \left(1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} e^{-4\beta n m^2} \right)^2.$$

□

§3. Наилучшие квадратурные формулы на классах $H_{p,\beta}$

Рассмотрим теперь задачу построения оптимального метода интегрирования для интеграла

$$Lf = \int_{\mathbb{T}} f(t) p(t)\, dt,$$

где $p(t)$ — неотрицательная весовая функция, на классе $H_{p,\beta}$ по информационному оператору (3), в котором $x_1, \dots, x_n$ — различные точки из $\mathbb{T}$.

Положим

$$k = 4e^{-\beta} \left(\frac{\sum_{m=0}^{\infty} e^{-2\beta m(m+1)}}{1 + 2\sum_{m=1}^{\infty} e^{-2\beta m^2}} \right)^2. \tag{17}$$

Обозначим через K и K' — полные эллиптические интегралы первого рода для модулей k и $k' = \sqrt{1-k^2}$, соответственно (равенство (17) эквивалентно тому, что $\pi K'/K = 2\beta$). Для полосы S_β 2π-периодическим произведением Бляшке с нулями в точках x_j с четными кратности ν_j является функция (см. [10])

$$B(t) = k^{N/2} \prod_{j=1}^{n} \operatorname{sn}^{\nu_j} \left(\frac{K}{\pi}(t - x_j), k \right),$$

где N определено равенством (5).

Через $H_{p,\beta}^{\mathbb{R}}$ будем обозначать множество функций из класса $H_{p,\beta}$, вещественных на вещественной оси.

Лемма 4. *Пусть $\nu_1, \dots, \nu_n$ — четные числа и $1 \leq p \leq \infty$. Тогда*

1) *существует единственная функция* $g_{B,p} \in H^{\mathbb{R}}_{p,\beta}$, *для которой*
$$e(L, H_{p,\beta}, I) = \int_{\mathbb{T}} g_{B,p}(t)B(t)p(t)\,dt,$$
2) $g_{B,p}$ *не имеет нулей в полосе* S_β *и* $g_{B,p}(t) > 0$ *при* $t \in \mathbb{T}$,
3) *при* $1 \le p < \infty$ *для почти всех* $t \in \mathbb{T}$ *имеет место равенство*

$$e(L, H_{p,\beta}, I)|g_{B,p}(t + i\beta)|^p = \int_{\mathbb{T}} g_{B,p}(\tau)B(\tau)K_\beta(t - \tau)p(\tau)\,d\tau, \tag{18}$$

где
$$K_\beta(t) = \frac{2\Lambda}{\pi}\operatorname{dn}\left(\frac{\Lambda}{\pi}t, \lambda\right),$$
а Λ *— полный эллиптический интеграл первого рода для модуля* λ, *определяемого из условия* $\pi\Lambda'/\Lambda = \beta$.

Доказательство. Из работы [21] вытекает, что в задаче
$$P_1 := \sup_{f \in H^{\mathbb{R}}_{p,\beta}} \int_{\mathbb{T}} |f(t)|B(t)p(t)\,dt$$
существует единственная функция $g_{B,p} \in H^{\mathbb{R}}_{p,\beta}$, нормированная условием $g_{B,p}(0) > 0$, на которой эта верхняя грань достигается. Кроме того, из той же работы вытекает, что эта функция не имеет нулей в полосе S_β (а следовательно, $g_{B,p}(t) > 0$ при $t \in \mathbb{T}$) и при всех $1 \le p < \infty$
$$P_1|g_{B,p}(t \pm i\beta|^p = \int_{\mathbb{T}} |g_{B,p}(\tau)|B(\tau)K_\beta(t - \tau)p(\tau)\,d\tau.$$
Поскольку всякая функция $f \in H_{p,\beta}$, для которой $If = 0$, может быть представлена в виде
$$f(z) = B(z)g(z), \quad g \in H_{p,\beta},$$
то в силу (2)
$$e(L, H_{p,\beta}, I) = \sup_{f \in H_{p,\beta}} \left| \int_{\mathbb{T}} f(t)B(t)p(t)\,dt \right| =: P_2.$$
Приемом, аналогичным тому, который использовался при доказательстве теоремы 2, легко показать, что
$$e(L, H_{p,\beta}, I) = e(L, H^{\mathbb{R}}_{p,\beta}, I).$$
Поскольку
$$P_1 \ge e(L, H^{\mathbb{R}}_{p,\beta}, I) \ge \int_{\mathbb{T}} g_{B,p}(t)B(t)p(t)\,dt = P_1,$$
то
$$P_1 = e(L, H^{\mathbb{R}}_{p,\beta}, I) = P_2.$$
□

При $p = \infty$ и четных $\nu_1, \dots, \nu_n$ очевидно, что $g_{B,p}(z) \equiv 1$.

Пусть $p = 2$. Пространство 2π-периодических функций $\mathcal{H}_{2,\beta}$, аналитических в полосе S_β и удовлетворяющих условию

$$\sup_{0 \le \eta < \beta} \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{T}} \left(|f(t+i\eta)|^2 + |f(t-i\eta)|^2 \right) dt < \infty,$$

является гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$(f, g)_{\mathcal{H}_{2,\beta}} = \frac{1}{4\pi} \int_\Gamma f(\xi) \overline{g(\xi)} \, d\xi,$$

где $\Gamma = [i\beta, 2\pi + i\beta] \cup [-i\beta, 2\pi - i\beta]$. Из работы [18] вытекает, что при всех $f \in \mathcal{H}_{2,\beta}$ и любом $t \in \mathbb{T}$ имеет место равенство

$$f(t) = (f, g_t)_{\mathcal{H}_{2,\beta}},$$

где

$$g_t(z) = \frac{2K}{\pi} \operatorname{dn}\left(\frac{K}{\pi}(t-z), k \right),$$

а K — полный эллиптический интеграл первого рода для модуля k, определяемого из условия $K'/K = 2\beta/\pi$.

Имеем

$$\begin{aligned} e(L, H_{2,\beta}, I) &= \sup_{f \in H_{2,\beta}} \left| \int_{\mathbb{T}} f(t) B(t) p(t) \, dt \right| \\ &= \sup_{f \in H_{2,\beta}} \left| \int_{\mathbb{T}} \frac{1}{4\pi} \int_\Gamma f(\xi) \overline{g_t(\xi)} \, d\xi B(t) p(t) \, dt \right| \\ = \sup_{f \in H_{2,\beta}} &\left| \frac{1}{4\pi} \int_\Gamma f(\xi) \int_{\mathbb{T}} \overline{g_t(\xi)} B(t) p(t) \, dt \, d\xi \right| = \sup_{\|f\|_{\mathcal{H}_{2,\beta}} \le 1} (f, G)_{\mathcal{H}_{2,\beta}}, \end{aligned}$$

где

$$G(\xi) = \frac{2K}{\pi} \int_{\mathbb{T}} \operatorname{dn}\left(\frac{K}{\pi}(t-\xi) \right) B(t) p(t) \, dt.$$

Отсюда следует, что

$$g_{B,2}(z) = \frac{G(z)}{\|G\|_{\mathcal{H}_{2,\beta}}}.$$

Теорема 4. *Пусть $\nu_1, \dots, \nu_n$ — четные числа и $1 \le p \le \infty$. Тогда квадратурная формула*

$$\int_{\mathbb{T}} f(t) p(t) \, dt \approx \sum_{j=1}^{n} \sum_{\nu=0}^{\nu_j - 1} a_{j\nu} f^{(\nu)}(x_j), \tag{19}$$

где

$$a_{j\nu} = \int_{\mathbb{T}} c_{j\nu}(t) p(t) \, dt,$$

$$c_{j\nu}(t)=\frac{K}{\pi}\frac{B(t)g_{B,p}(t)}{\nu!(\nu_j-\nu-1)!}\times\lim_{z\to x_j}\left(\frac{(z-x_j)^{\nu_j}}{B(z)g_{B,p}(z)}\operatorname{ctn}\left(\frac{K}{\pi}(t-z),k\right)\right)^{(\nu_j-\nu-1)},$$

$$\operatorname{ctn}(z,k)=\frac{\operatorname{cn}(z,k)\operatorname{dn}(z,k)}{\operatorname{sn}(z,k)},$$

является оптимальным методом интегрирования на классе $H_{p,\beta}$.

Доказательство. Рассмотрим интеграл

$$Jf:=\frac{K}{\pi}B(t)g_{B,p}(t)\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\varepsilon}\frac{f(z)}{B(z)g_{B,p}(z)}\operatorname{ctn}\left(\frac{K}{\pi}(z-t),k\right)dz, \tag{20}$$

где Γ_ε — граница прямоугольника $-\varepsilon\le\operatorname{Re}z\le2\pi-\varepsilon$, $|\operatorname{Im}z|\le\beta$, а ε выбрано из условия, чтобы точки $x_1,\dots,x_n$ лежали внутри этого прямоугольника. В силу того, что функция $g_{B,p}(z)$ не имеет нулей в полосе S_β, по теореме о вычетах получаем

$$Jf=f(t)-\sum_{j=1}^{n}\sum_{\nu=0}^{\nu_j-1}c_{j\nu}(t)f^{(\nu)}(x_j).$$

Из свойств эллиптических функций (см., например, [20]) вытекают равенства

$$\operatorname{ctn}\left(\frac{K}{\pi}(t\pm i\beta),k\right)=\operatorname{ctn}\left(\frac{K}{\pi}t\pm i\frac{K'}{2},k\right)=\pm i(1+k)\frac{1-k\operatorname{sn}^2\left(\frac{K}{\pi}t,k\right)}{1+k\operatorname{sn}^2\left(\frac{K}{\pi}t,k\right)}=\pm i\frac{\Lambda}{K}\operatorname{dn}\left(\frac{\Lambda}{\pi}t,\lambda\right),$$

где $\lambda=2\sqrt{k}/(1+k)$, а Λ — полный эллиптический интеграл первого рода для модуля λ (иначе говоря, λ определяется из условия $\Lambda'/\Lambda=K'/(2K)$). Тем самым интеграл (20) может быть записан в виде

$$Jf:=B(t)g_{B,p}(t)\frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma}\frac{f(z)}{B(z)g_{B,p}(z)}K_\beta(\operatorname{Re}z-t)\,dz,$$

где $\Gamma = [i\beta, 2\pi + i\beta] \cup [-i\beta, 2\pi - i\beta]$. Пусть $1 \le p < \infty$. Тогда для погрешности квадратурной формулы (19) имеем оценку

$$
\begin{aligned}
R_f &:= \left| \int_{\mathbb{T}} f(t)p(t)\,dt - \sum_{j=1}^{n} \sum_{\nu=0}^{\nu_j-1} a_{j\nu} f^{(\nu)}(x_j) \right| \\
&\le \int_{\mathbb{T}} B(t) g_{B,p}(t) p(t) \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{|f(z)|}{|g_{B,p}(z)|} K_\beta(\operatorname{Re} z - t)\,dz\,dt \\
&= \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{|f(z)|}{|g_{B,p}(z)|} \int_{\mathbb{T}} B(t) g_{B,p}(t) K_\beta(\operatorname{Re} z - t) p(t)\,dt\,dz.
\end{aligned}
$$

Пользуясь равенством (18), получаем

$$
R_f \le e(L, H_{p,\beta}, I) \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} |f(z)| |g_{B,p}(z)|^{p-1}\,dz.
$$

По неравенству Гельдера

$$
R_f \le e(L, H_{p,\beta}, I) \left(\frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} |f(z)|^p\,dz \right)^{1/p} \left(\frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} |g_{B,p}(z)|^p\,dz \right)^{(p-1)/p} \le e(L, H_{p,\beta}, I).
$$

Если $p = \infty$, то $g_{B,p}(z) \equiv 1$ и

$$
|Jf| \le B(t) \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} |f(z)| K_\beta(\operatorname{Re} z - t)\,dz \le B(t),
$$

поскольку

$$
\frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} K_\beta(\operatorname{Re} z - t)\,dz \equiv 1.
$$

Следовательно,

$$
R_f \le \int_{\mathbb{T}} B(t) p(t)\,dt = e(L, H_{\infty,\beta}, I).
$$

□

§4. Восстановление функций из H_p^r по тейлоровской информации

Рассмотрим задачу оптимального восстановления значения $f(\xi)$, $\xi \in D$, на классе H_p^r по значениям информационного оператора

$$
If = (f(0), f'(0), \dots, f^{(n+r-1)}(0)).
$$

Погрешность оптимального метода восстановления обозначим в этом случае через $e(\xi, H_p^r, I)$.

Нетрудно убедиться, что если $f \in H_p^r$ и $If = 0$, то $f^{(r)}(z) = z^n \varphi(z)$, где $\varphi \in H_p$. Следовательно, $f(z) = T_r(t^n \varphi(t))(z)$, где оператор T_r определен равенством (7). Очевидно, что и при всех $\varphi \in H_p$

функция $f(z) = T_r(t^n\varphi(t))(z) \in H_p^r$, причем $If = 0$. Тем самым, учитывая соотношение двойственности (2),

$$e(\xi, H_p^r, I) = \sup_{\substack{f\in H_p^r\\ If=0}} |f(\xi)| = \sup_{\varphi\in H_p} \left| \int_0^\xi \frac{(\xi-t)^{r-1}}{(r-1)!} t^n\varphi(t)\,dt \right|. \tag{21}$$

Пусть $\xi \in (0,1)$. Тогда из [11, стр. 176] следует, что существует единственная функция $\varphi_\xi \in H_p$ такая, что $\varphi_\xi(t) > 0$ при $t \in (-1,1)$ и

$$e(\xi, H_p^r, I) = \int_0^\xi \frac{(\xi-t)^{r-1}}{(r-1)!} t^n\varphi_\xi(t)\,dt. \tag{22}$$

Теорема 5. *При всех $\xi \in D$ и $1 \le p \le \infty$ метод*

$$f(\xi) \approx \sum_{j=0}^{n+r-1} a_j \frac{\xi^j}{j!} f^{(j)}(0), \tag{23}$$

где $a_0 = \ldots = a_{r-1} = 1$,

$$a_{n+r-1} = \frac{(n+r-1)!}{(n-1)!\varphi_{|\xi|}(0)} h_{n+r-1},$$

$$a_k = \frac{k!}{(k-r)!\varphi_{|\xi|}(0)} \left(h_k - \sum_{j=k+1}^{n+r-1} a_j \frac{(j-r)!}{j!(j-k)!} |\xi|^{j-k} \varphi_{|\xi|}^{(j-k)}(0) \right), \quad k = n+r-2, \ldots, r, \tag{24}$$

$$h_k = \int_0^1 \frac{(1-\tau)^{r-1}}{(r-1)!} \tau^{k-r} \left(1 - (|\xi|\tau)^{2(n+r-k)}\right) \varphi_{|\xi|}(|\xi|\tau)\,d\tau, \quad k = r, \ldots, n+r-1,$$

является оптимальным методом восстановления на классе H_p^r.

Доказательство. Обозначим через $H_p^{r,\mathbb{R}}$ класс всех функций из H_p^r, вещественных на интервале $(-1,1)$. Покажем сначала, что метод (23) является оптимальным на классе $H_p^{r,\mathbb{R}}$ при $\xi \in (0,1)$. Так как $\varphi_\xi \in H_p^{\mathbb{R}}$, то равенство (22) справедливо и для класса $H_p^{r,\mathbb{R}}$, то есть функция

$$f_0(z) := \int_0^z \frac{(z-t)^{r-1}}{(r-1)!} t^n\varphi_\xi(t)\,dt \tag{25}$$

является экстремальной в задаче восстановления значения $f(\xi)$ на классе $H_p^{r,\mathbb{R}}$ по тейлоровской информации If.

Положим $\omega_0(z) := 1$,

$$\omega_j(z) := \frac{z\omega_{j-1}(z) + \varepsilon_{n+r-j}}{1 + \varepsilon_{n+r-j} z\omega_{j-1}(z)}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

При всех $\varepsilon_r, \ldots, \varepsilon_{n+r-1} \in (-1,1)$ функция $\omega_n\varphi_\xi \in H_p^{\mathbb{R}}$. Рассмотрим для точек $P = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n+r-1}) \in \mathbb{R}^{n+r}$ функцию

$$f_P(z) := \sum_{j=0}^{r-1} \varepsilon_j z^j + T_r(\omega_n\varphi_\xi)(z).$$

При всех $P \in (-1,1)^{n+r}$ $f_P \in H_p^r$, а при $P = 0$ эта функция совпадает с экстремальной функцией (25). Из теоремы 1 следует, что коэффициенты a_j оптимального метода восстановления на классе $H_p^{r,\mathbb{R}}$, находятся из системы

$$\sum_{j=0}^{n+r-1} a_j \frac{\xi^j}{j!} \frac{\partial f_P^{(j)}(0)}{\partial \varepsilon_k}\Big|_{P=0} = \frac{\partial f_P(\xi)}{\partial \varepsilon_k}\Big|_{P=0}, \quad k = 0, 1, \ldots, n+r-1.$$

Имеем при $0 \le k \le r-1$

$$\frac{\partial f_P^{(j)}(0)}{\partial \varepsilon_k}\Big|_{P=0} = \begin{cases} 0, & k \ne j, \\ j!, & k = j, \end{cases} \quad \frac{\partial f_P(\xi)}{\partial \varepsilon_k}\Big|_{P=0} = \xi^k,$$

а при $r \le k \le n+r-1$

$$\frac{\partial f_P^{(j)}(0)}{\partial \varepsilon_k}\Big|_{P=0} = \begin{cases} 0, & 0 \le j \le k-1, \\ C_{j-r}^{k-r}(k-r)!\varphi_\xi^{(j-k)}(0), & k \le j \le n+r-1, \end{cases}$$

$$\frac{\partial f_P(\xi)}{\partial \varepsilon_k}\Big|_{P=0} = (T_r g_k)(\xi),$$

где

$$g_k(z) = z^{k-r}(1 - z^{2(n+r-k)})\varphi_\xi(z).$$

Отсюда $a_0 = \ldots = a_{r-1} = 1$, а для определения остальных коэффициентов получаем систему

$$\sum_{j=k}^{n+r-1} a_j \frac{\xi^j}{j!} C_{j-r}^{k-r}(k-r)!\varphi_\xi^{(j-k)}(0) = (T_r g_k)(\xi), \quad k = r, \ldots, n+r-1.$$

Таким образом,

$$a_{n+r-1} = \frac{(n+r-1)!}{(n-1)!\varphi_\xi(0)} \frac{(T_r g_{n+r-1})(\xi)}{\xi^{n+r-1}},$$

$$a_k = \frac{k!}{(k-r)!\varphi_\xi(0)} \left(\frac{(T_r g_k)(\xi)}{\xi^k} - \sum_{j=k+1}^{n+r-1} a_j \frac{(j-r)!}{j!(j-k)!} \xi^{j-k} \varphi_\xi^{(j-k)}(0) \right),$$
$$k = n+r-2, \ldots, r.$$

Сделав замену $t = \xi\tau$, получим, что $(T_r g_k)(\xi) = \xi^k h_k$, и следовательно, имеют место равенства (24).

Оптимальность построенного метода на классе H_p^r доказывается приемом, аналогичным тому, который использовался при доказательстве теоремы 2.

Пусть теперь ξ — произвольная точка диска D. Если $\xi = |\xi|e^{i\theta}$ и $f \in H_p^r$, то функция $F(z) = f(ze^{i\theta})$ принадлежит классу H_p^r, $F(|\xi|) = f(\xi)$ и

$$IF = (f(0), e^{i\theta}f'(0), \dots, e^{i(n+r-1)\theta}f^{(n+r-1)}(0)).$$

Применяя построенный метод к функции F в точке $|\xi|$, получим, что

$$\left| f(\xi) - \sum_{j=0}^{n+r-1} a_j \frac{\xi^j}{j!} f^{(j)}(0) \right| \le e(|\xi|, H_p^r, I).$$

Используя первое из равенств (21), легко убедиться, что

$$e(|\xi|, H_p^r, I) = e(\xi, H_p^r, I).$$

Тем самым построенный метод является оптимальным при всех $\xi \in D$. □

Список литературы

[1] *Смоляк С. А.* Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них. Канд. дисс. М.: МГУ, 1965.

[2] *Micchelli C. A., Rivlin T. J.* A survey of optimal recovery. In: Optimal Estimation in Approximation Theory (C. A. Micchelli and T. J. Rivlin, Eds.). P. 1–54. New York: Plenum Press, 1977.

[3] *Micchelli C. A., Rivlin T. J.* Lectures on Optimal Recovery. Lecture Notes in Mathematics. V. 1129. P. 21–93. Berlin: Springer–Verlag, 1985.

[4] *Арестов В. В.* Наилучшее восстановление операторов и родственные задачи // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1989. Т. 189. С. 3–20.

[5] *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Об оптимальном восстановлении функционалов по неточным данным // Мат. заметки. 1991. Т. 50 №6. С. 85–93.

[6] *Осипенко К. Ю.* Наилучшее приближение аналитических функций по информации об их значениях в конечном числе точек // Мат. заметки. 1976. Т. 19. №1. С. 29–40.

[7] *Осипенко К. Ю.* Об оптимальных методах восстановления в пространствах Харди–Соболева // Мат. сб. 2001. Т. 192. С. 67–86.

[8] *Bojanov B. D.* Best quadrature formula for a certain class of analytic functions. Zastos. Mat. 1974. V. 14, P. 441–447.

[9] *Осипенко К. Ю.* О наилучших и оптимальных квадратурных формулах на классах ограниченных аналитических функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1988. Т. 52, №1. С. 79–99.

[10] *Осипенко К. Ю.* Об n-поперечниках, оптимальных квадратурных формулах и оптимальном восстановлении функций, аналитических в полосе // Изв. РАН. Сер. мат. 1994. Т. 58, №4. С. 55–79.

[11] *Osipenko K. Yu.* Optimal Recovery of Analytic Functions. Huntington, New York: Nova Science Publ., Inc., 2000.

[12] *Осипенко К. Ю.* Оптимальная интерполяция аналитических функций // Мат. заметки. 1972. Т. 12. №4. С. 465–476.

[13] *Fisher S. D., Micchelli C. A.* The n-width of sets of analytic functions // Duke Math. 1980. V. 47. №4. P. 789–801.

[14] *Farkov Yu. A.* The N-widths of Hardy–Sobolev spaces of several complex variables // J. Approx. Theory. 1993. V. 75. №2. P. 183–197.

[15] *Fisher S. D.* Envelopes, widths, and Landau problems for analytic functions // Constr. Approx. 1989. V. 5. №2. P. 171–187.

[16] *Моторный В. П.* О наилучшей квадратурной формуле вида $\sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i)$ для некоторых классов периодических дифференцируемых функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1974. Т. 38, №3. С. 583–614.

[17] *Никольский С. М.* Квадратурные формулы. М: Наука, 1979.

[18] *Osipenko K. Yu., Wilderotter K.* Optimal information for approximating periodic functions // Math. Comput. 1997 V. 66. №220. P. 1579–1592.

[19] *Osipenko K. Yu.* Exact values of n-widths of Hardy-Sobolev classes // Constr. Approx. 1997. V. 13. P. 17–27.

[20] *Ахиезер Н. И.* Элементы теории эллиптических функций. М.: Наука, 1970.

[21] *Wilderotter K.* Optimal approximation of periodic analytic functions with integrable boundary values // J. Approx. Theory. 1996 V. 84. №2. P. 236–246.

МАТИ — Российский государственный технологический университет им. К. Э. Циолковского