РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ им. В.А.СТЕКЛОВА

На правах рукописи

УДК 517.53

Осипенко Константин Юрьевич

ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ НА КЛАССАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

01.01.01. - математический анализ

А в т о р е ф е р а т
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва — 1993

Работа выполнена в Московском государственном авиационном технологическом университете им. К.Э. Циолковского

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук А.Г. Сергеев;
доктор физико-математических наук, профессор П.К. Суетин;
доктор физико-математических наук, профессор В.М. Тихомиров.

Ведущая организация — Математический институт АН Украины.

Защита диссертации состоится "____"______________ 1993 г. в ____ часов на заседании специализированного совета Д002.38.03 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора наук при Математическом институте им. В.А.Стеклова РАН по адресу: 117333, Москва, В-333, ул. Вавилова, 42.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Математического института.

Автореферат разослан "____"______________ 1993 г.

Ученый секретарь специализированного совета,
доктор физико-математических наук,
профессор А.С. Холево

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В работе рассматриваются задачи оптимального восстановления аналитических функций, их производных и интегралов от них по информации об этих функциях, заданной в общем случае с некоторой погрешностью, а также вопросы, связанные с оптимальным выбором информации.

На начальном этапе развития теории приближения в ней исследовались задачи аппроксимации индивидуальных функций. Затем стали изучаться аппроксимации классов функций некоторыми фиксированными средствами (алгебраическими или тригонометрическими полиномами, отрезками ряда Фурье, рациональными функциями и т.д.). Под воздействием идей А.Н. Колмогорова и С.М. Никольского с 60-х годов сформировался подход, при котором, используя два типа исходной информации о функции — априорной (принадлежность тому или иному классу) и локальной (значение функции в заданном наборе точек, коэффициенты Фурье, след функции на некотором подмножестве из области определения функции и т.д.), — строился оптимальный метод восстановления функции или функционала, на который, вообще говоря, не накладывалось требование принадлежности какому-либо заранее фиксированному множеству методов. После этого ставился вопрос об оптимальном выборе локальной информации (например, где лучше всего расположить точки для измерения функции).

В 1965 г. С.А. Смоляком была поставлена задача об оптимальном восстановлении линейного функционала x' на некотором множестве W из линейного пространства X по значениям линейных функционалов $x'_1, \ldots, x'_n$. Под погрешностью оптимального восстановления понималась величина

$$e(x', I, W) := \inf_{S\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}} \sup_{x \in W} |\langle x', x\rangle - S(Ix)|,$$

где $Ix := (\langle x', x'_1\rangle, \ldots, \langle x', x'_n\rangle)$. Метод, на котором достигалась нижняя грань, назывался оптимальным. С.А. Смоляком было доказано, что в случае, когда W — выпуклое множество, среди оптимальных методов есть аффинный, а когда W — выпуклое уравновешенное множество, среди оптимальных методов существует линейный метод.

Приблизительно в это же время С.Б. Стечкиным была поставлена близкая к рассматриваемой задача о приближении неограниченного оператора ограниченным. Дальнейшие исследования задачи С.Б. Стечкина, проведенные В.В. Арестовым и В.Н. Габушиным показали тесную ее связь с оптимальным восстановлением по приближенной информации.

В 1971 г. результат С.А. Смоляка был использован Н.С. Бахваловым для доказательства отсутствия преимущества у адаптивных методов интегрирования по сравнению с неадаптивными методами на выпуклых уравновешенных классах функций. Затем автор в 1976 г. обобщил теорему Смоляка на комплексный случай и решил ряд конкретных задач оптимального восстановления на классах ограниченных аналитических функций. С конца 70-х годов оптимальным восстановлением активно занялись американские математики Ч. Мичелли и Т. Ривлин, которые значительно расширили исходную постановку.

Дальнейшее развитие теории оптимального восстановления можно условно разделить на несколько направлений: общие результаты о восстановлении и оптимальное восстановление на конкретных классах функций, среди которых можно выделить классы гладких и аналитических функций. Исследованию задач восстановления на классах гладких функций посвящено, по-видимому, большая часть работ из этой тематики, познакомиться с которыми можно по обзорным статьям Ч. Мичелли и Т. Ривлина (A survey of optimal recovery. N.Y.: Plenum Press. 1977. P.1–54, Lectures on optimal recovery // Lect. Notes Math. 1985. 1129. P.21–93), В.М. Тихомирова (Теория приближений. “Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т.14. Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР”. М., 1987. С.103–260), а также монографиям Н.П. Корнейчука (Точные константы в теории приближения. М.: Наука, 1987), Дж. Трауба и Г. Вожьняковского (Общая теория оптимальных алгоритмов. М.: Мир, 1983) и цитируемой там литературе.

В процессе осмысления более общих постановок, связанных с восстановлением, оказалось, что в терминах оптимального восстановления могут быть сформулированы не только задачи аппроксимации функций, их производных, построения оптимальных квадратурных формул, но и многие другие задачи теории приближения, в частности, задачи об n-поперечниках и точных неравенствах для производных.

Одним из распространенных приемов при изучении задач восстановления, оптимальных квадратурных формул и n-поперечников на классах гладких функций является исследование осцилляционных свойств ядер, с помощью которых задаются классы. А. Пинкусом и Нгуен Тхи Тхьеу Хоа были получены общие результаты в этом направлении для классов функций, представимых в виде свертки с вполне положительными или не повышающими осцилляции ядрами. Однако, в комплексном случае приходится использовать другие методы, так как изучаемые классы не удается представить в виде сверток с такими ядрами, да и само понятие “осцилляция” (или “число перемен знака”) не находит пока своего вполне осознанного эквивалента в комплексной ситуации.

Поскольку реально всякая используемая информация содержит в себе некоторую погрешность, возникает задача оптимального восстановления по неточным данным. Здесь характерным является эффект появления “лишней” информации, когда часть исходных данных может быть отброшена без увеличения погрешности восстановления. В связи с этим ставится и изучается задача о величине “полезной” информации и ее асимптотике при стремлении погрешности в исходных данных к нулю.

С помощью соотношений двойственности нахождение погрешности оптимального восстановления на классах аналитических функций сводится к известным экстремальным задачам, исследованием которых занимались Э. Ландау, Ж. Дьедонне, К. Каратеодори и Л. Фейер, Я.Л. Геронимус, Г.М. Голузин, М. Хейнс, А. Макинтайр и В. Рогозинский, В. Рогозинский и Х. Шапиро, С.Я. Хавинсон и др. Тем самым многие классические экстремальные задачи оказываются связанными с задачами оптимального восстановления. Например, лемма Шварца есть задача о погрешности оптимального восстановления ограниченной аналитической в единичном круге функции в точке z по ее значениям в нуле. Однако, лемма Шварца не дает ответ на вопрос о самом оптимальном методе. Изучение общего подхода к построению оптимальных методов восстановления позволяет получить новые результаты и для классических экстремальных задач, таких, как задача Каратеодори–Фейера и лемма Шварца в многомерных пространствах Харди H_p и Бергмана A_p.

Цель работы — разработка общего подхода к построению оптимальных методов восстановления линейных функционалов на классах аналитических функций, основанного на специальном интегральном представлении погрешности восстановления; нахождение оптимальных методов восстановления на классах Харди и Бергмана; исследование задачи об оптимальном выборе информационного оператора и тесно связанной с ней задачи о точных значениях n-поперечниках; восстановление по неточно заданной информации; построение наилучших и оптимальных квадратурных формул на классах ограниченных аналитических функций.

Научная новизна. Все полученные в диссертации результаты являются новыми. Их можно объединить в следующие группы.

а) Общие теоремы об оптимальном восстановлении многозначных отображений и линейных функционалов; теоремы о восстановлении в абстрактных пространствах $L_p(S, \Sigma, \mu)$; общий подход к построению оптимальных методов восстановления, основанный на интегральном представлении погрешности восстановления; восстановление по неточным данным в гильбертовом пространстве.

б) Оптимальное восстановление значений функций и их производных в пространствах Харди и Бергмана по точной информации;

восстановление гармонических функций; восстановление по значениям функций в счетной системе точек.

в) Оптимизация информационного оператора; точные значения n-поперечников классов периодических функций, аналитически продолжаемых в полосу, и классов Харди и Бергмана в единичном шаре из $\mathbb{C}^n$.

г) Оптимальное восстановление ограниченных аналитических функций по неточно заданной информации; определение порядка информативности как меры "полезной" информации; восстановление производных ограниченных аналитических функций по их следам, заданным с погрешностью, и, как следствие, получение точных неравенств для производных колмогоровского типа.

д) Построение наилучших квадратурных формул (при фиксированных узлах); исследование единственности оптимальных узлов квадратурных формул; построение оптимальной квадратурной формулы для класса периодических функций, аналитически продолжаемых в полосу, использующей приближенные значения функций.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на XI Всесоюзной школе по теории операторов в функциональных пространствах (1986 г., Челябинск), Международном симпозиуме по оптимальным алгоритмам (1989 г., Варна), VIII конференции по теоретическим основам и конструированию численных алгоритмов решения задач математической физики (1990 г., Красновидово), I Межвузовской конференции по теории функций и аппроксимации (1991 г., Симферополь), а также на семинарах Математического института им. В.А. Стеклова и Московского государственного университета.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1-15], список которых приведен в конце автореферата.

Структура диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, списка обозначений и списка литературы. Список литературы содержит 137 наименований. Общий объем диссертации — 323 страницы.

ОБЗОР СОДЕРЖАНИЯ РАБОТЫ

Во введении приведены постановки рассматриваемых задач оптимального восстановления и сформулированы основные утверждения диссертационной работы.

Первая глава посвящена общим вопросам оптимального восстановления и задачам восстановления по неточным данным в абстрактных пространствах L_p. Задача оптимального восстановления в наиболее общей постановке может быть сведена к восстановлению некоторого многозначного отображения однозначным (впервые это было замечено В.А. Арестовым). В §§1–3 изучаются задачи такого типа. При этом основными результатами являются критерии существования среди оптимальных методов восстановления аффинных и линейных в алгебраическом и топологическом случаях.

Пусть X — линейное пространство над полем $K = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, $A \subset X$ — непустое множество и $\Phi\colon A \to K$ — многозначное отображение (м. о.). Положим

$$E(\Phi, \varphi) := \sup_{(x,z)\in \operatorname{gr}\Phi} |z - \varphi(x)|,$$
$$E(\Phi) := \inf_{\varphi} E(\Phi, \varphi),$$

где нижняя грань берется по всевозможным однозначным отображениям $\varphi\colon A \to K$. Величину

$$R(\Phi) := \sup_{x\in A} \inf_{c\in K} \sup_{z\in\Phi(x)} |z - c|,$$

являющуюся максимальным чебышевским радиусом множества $\Phi(x)$, назовем радиусом многозначности м. о. Φ.

Для множества Ω из линейного пространства Y через $\operatorname{co}\Omega$ и $\operatorname{bco}\Omega$ будем обозначать выпуклую и выпуклую уравновешенную оболочки Ω. При $\xi \in Y$ выпуклую уравновешенную относительно точки ξ оболочку множества Ω обозначим через

$$\operatorname{bco}_\xi \Omega := \operatorname{bco}(\Omega - \xi) + \xi.$$

Определим м. о. $\operatorname{co}\Phi$ и $\operatorname{bco}_\xi \Phi$ следующими равенствами

$$\operatorname{gr}\operatorname{co}\Phi := \operatorname{co}\operatorname{gr}\Phi, \quad \operatorname{gr}\operatorname{bco}_\xi\Phi := \operatorname{bco}_\xi \operatorname{gr}\Phi$$

(при $\xi = 0$ пишем просто $\operatorname{bco}\Phi$). Через $\operatorname{Aff}(X)$ обозначим множество аффинных функционалов, т.е. функционалов вида $a(x) = \langle x', x\rangle + c$, где $x' \in X'$, а $c \in K$.

Теорема 1. *Для существования $a \in \operatorname{Aff} X$ такого, что*

$$E(\Phi, a) = E(\Phi), \tag{1}$$

необходимо и достаточно существования $\xi \in X \times K$ такого, что

$$R(\Phi) = R(\operatorname{bco}_\xi \Phi).$$

При $K = \mathbb{R}$ условие (1) *эквивалентно равенству*

$$R(\Phi) = R(\operatorname{co}\Phi). \tag{2}$$

Для существования $x' \in X'$ такого, что

$$E(\Phi, x') = E(\Phi),$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$R(\Phi) = R(\operatorname{bco}\Phi).$$

Отметим, что в комплексном случае условия (1) и (2) не эквивалентны. Соответствующий пример построен в §1.

§2 посвящен задачам, связанным с выражением оптимального метода восстановления через субдифференциал огибающей м. о. Φ.

Если X — локально выпуклое пространство, то через X^* обозначим топологически сопряженное пространство. Исследованию топологического случая посвящен §3. Здесь в отличие от алгебраического случая может не существовать линейный или аффинный оптимальный метод. Однако, при некоторых дополнительных условиях может быть получен аналог сформулированного критерия. Если не касаться вопроса существования, то критерий совпадения величины $E(\Phi)$ с величинами

$$E^*(\Phi) = \inf_{x^* \in X^*} E(\Phi, x^*), \quad E^a(\Phi) = \inf_{a \in \operatorname{Aff}^*(X)} E(\Phi, a),$$

где $\operatorname{Aff}^*(X)$ — множество функционалов вида $a(x) = \langle x^*, x \rangle + c$, $x^* \in X^*$, $c \in K$, имеет следующий вид.

Теорема 2. *Равенство*

$$E^a(\Phi) = E(\Phi)$$

имеет место в том и только в том случае, когда существует $\xi \in X \times K$, *для которого*

$$R(\Phi) = R(\operatorname{cl} \operatorname{bco}_\xi \Phi).$$

Равенство

$$E^*(\Phi) = E(\Phi)$$

имеет место тогда и только тогда, когда

$$R(\Phi) = R(\operatorname{cl} \operatorname{bco} \Phi).$$

Общая постановка задач оптимального восстановления функционалов рассматривается в §4. Пусть X и Y — линейные пространства над полем K, $W \subset X$, $f\colon W \to K$ и $F\colon W \to Y$ — м. о. Ставится задача восстановления значений функционала f на множестве W по информации о значениях на этом множестве м. о. F. Многозначность отображения F означает, что информация об элементах W задана, вообще говоря, неточно. Если F — однозначное отображение, то говорят о задаче восстановления по точным данным. Погрешностью метода восстановления $\varphi\colon Y \to K$ называется величина

$$e(f, F, \varphi) := \sup_{(x,y) \in \operatorname{gr} F} |f(x) - \varphi(y)|.$$

Величина

$$e(f, F) := \inf_{\varphi\colon Y \to K} e(f, F, \varphi)$$

называется погрешностью оптимального восстановления, а всякий метод, на котором достигается нижняя грань, будем называть оптимальным. Введем также величину

$$r(f,F) := \sup_{y\in F(W)} \inf_{c\in K} \sup_{x\in F^{-1}(y)} |f(x)-c|,$$

называемую радиусом информации.

Теорема 3. *Если $f \in \mathrm{Aff}(X)$, то для существования $a \in \mathrm{Aff}(Y)$ такого, что*

$$e(f,F,a) = e(f,F), \tag{3}$$

необходимо и достаточно, чтобы существовала точка $z \in X\times Y$, для которой

$$r(f,F) = r(f, \mathrm{bco}_z F).$$

При $K=\mathbb{R}$ условие (3) *эквивалентно равенству*

$$r(f,F) = r(f, \mathrm{co}\, F).$$

Если $f \in X'$, то для существования $y' \in Y'$ такого, что

$$e(f,F,y') = e(f,F),$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$r(f,F) = r(f, \mathrm{bco}\, F).$$

Рассмотрим случай, когда м. о. F имеет вид

$$F(x) = Ix + U,$$

где $I\colon W \to Y$ — линейный оператор, а $U \subset Y$ — некоторое множество. Величину $e(f,F)$ будем обозначать в этом случае через $e(f,I,W,U)$. Если Y — линейное нормированное пространство, а $U = U_\delta := \delta BY$, где $BY := \{y \in Y : \|y\| \le 1\}$ — единичный шар, то говорят о восстановлении по значениям оператора I, заданного с погрешностью δ. В этом случае положим

$$e(f,I,W,\delta) := e(f,I,W,U_\delta).$$

Если W и U — выпуклые уравновешенные множества, то из теоремы 3 вытекает существование оптимального линейного метода. Кроме того, доказывается, что имеет место равенство

$$e(x',I,W,U) = \sup_{\substack{x\in W\\ Ix\in U}} |<x',x>|,$$

которое для $U=U_\delta$ принимает вид

$$e(x',I,W,\delta) = \sup_{\substack{x\in W\\ \|Ix\|\le\delta}} |<x',x>|. \tag{4}$$

Элемент $x_0 \in W$ такой, что $Ix_0 \in U$ и

$$\sup_{\substack{x\in W\\ Ix\in U}} |<x',x>| = <x',x_0>,$$

будем называть экстремальным.

В §5 изучаются задачи оптимального восстановления линейных функционалов в абстрактных пространствах $L_p(S,\Sigma,\mu)$ (или, короче, $L_p(S)$), являющихся совокупностью всех Σ-измеримых функций со значениями в $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, для которых

$$\|x\|_p := \left(\int_S |x(s)|^p\,d\mu\right)^{1/p} < \infty, \quad 1 \le p < \infty,$$
$$\|x\|_\infty := \operatorname*{vraisup}_{s\in S} |x(s)| < \infty, \quad p = \infty.$$

Положим

$$(x,y)_S := \int_S x(s)\overline{y(s)}\,d\mu.$$

Рассматривается задача оптимального восстановления линейного функционала $(x,f)_S$, $f \in L_{p'}(S)$, $1/p+1/p'=1$, на множестве $BL_p(S)$ по значениям м. о. $F(x) := Ix + \delta BY$, где $I\colon L_p(S)\to Y$ — линейный оператор, а Y — линейное нормированное пространство. Положим при $1\le p<\infty$ и $a\in\mathbb{C}$

$$a_{(p)} := \begin{cases} a|a|^{p-2}, & a \ne 0,\\ 0, & a = 0.\end{cases}$$

Рассмотрим случай, когда $Y = L_q(\Omega)$. Оказывается, что имеется некоторые значения погрешности δ, являющиеся в определенном смысле точками переключения. Пусть

$$\delta_1 := \frac{\|If_{(p')}\|_q}{\|f\|_{p'}^{p'-1}}$$

и для $y^* \in L_{q'}(\Omega)$, $1/q+1/q'=1$,

$$\delta_0 := \|y^*\|_{q'}^{q'-1} \inf_{\substack{z\in L_{q'}(\Omega)\\ (y^*_{(q')},z)_\Omega \ne 0}} \frac{\|I^*z\|_{p'}}{|(y^*_{(q')},z)_\Omega|}.$$

Теорема 4. *Пусть $I\colon L_p(S)\to L_q(\Omega)$ — ограниченный линейный оператор. Тогда*

1) *для $1<p\le\infty$ и $1\le q\le\infty$ при $\delta\ge\delta_1$ $y_0^*=0$ — оптимальный метод восстановления,*
2) *для $1\le p<\infty$, $1<q<\infty$ и $f=I^*y^*$, $y^*\in L_{q'}(\Omega)$ при $0\le\delta\le\delta_0$ $y_0^*=y^*$ — оптимальный метод восстановления,*
3) *для $1<p,q<\infty$ при $f\in I^*L_{q'}(\Omega)$ и $\delta_0<\delta<\delta_1$ или при $f\notin I^*L_{q'}(\Omega)$ и $0\le\delta<\delta_1$, для того чтобы $y^*\in L_{q'}(\Omega)$ являлся оптимальным методом восстановления, необходимо, чтобы выполнялось равенство*

(5)
$$\frac{I(f-I^*y_0^*)_{(p')}}{\|f-I^*y_0^*\|_{p'}^{p'-1}} = \delta\frac{(y_0^*)_{(q')}}{\|y_0^*\|_{q'}^{q'-1}},$$

4) *если $1 < p, q \le \infty$ и, кроме того, $I^* y_0^* \in L_1(S)$ при $p = \infty$, то выполнения равенства (5) достаточно, для того чтобы $y_0^* \in L_{q'}(\Omega)$ являлся оптимальным методом восстановления,*
5) *если $1 \le p, q \le \infty$, $y_0^* \in L_{q'}(\Omega)$ — оптимальный метод восстановления и, кроме того, $I^* y_0^* \in L_1(S)$ при $p = \infty$, то*

$$e(f, I, BL_p(S), \delta) = \|f - I^* y_0^*\|_{p'} + \|y_0^*\|_{q'}.$$

Одним из основных способов получения оптимальных методов восстановления в дальнейших исследованиях является использование специального интегрального представления для погрешности восстановления. Пусть Y — произвольное линейное пространство. Вместо $BL_p(S)$ будем рассматривать множество BX_p, где X_p — некоторое линейное подпространство $L_p(S)$ (такая ситуация является типичной для восстановления аналитических или гармонических функций).

Теорема 5. *Пусть $g \in X_p$, $g \ne 0$, $g_0 := g/\|g\|_p$, $\|Ig_0\| \le \delta$, $y_0^* \in Y^*$, $\langle y_0^*, Ig_0\rangle = \delta\|y_0^*\|$ и при всех $x \in X_p$ имеет место равенство*

$$(x, f)_S - \langle y_0^*, Ix\rangle = \begin{cases} \alpha(x, g_{(p)})_S, & 1 \le p < \infty, \\ (x, \varphi g)_S, & p = \infty, \end{cases} \tag{6}$$

где $\alpha > 0$, $\varphi \in L_1(S)$, $\varphi(s) \ge 0$ почти всюду и при $p = \infty$ $|g(s)| = 1$ почти всюду. Тогда y_0^* — оптимальный метод, g_0 — экстремальная функция и

$$e(f, BX_p, I, \delta) = (g_0, f)_S = \begin{cases} \alpha\|g\|_p^{p-1} + \delta\|y_0^*\|, & 1 \le p < \infty, \\ \|\varphi\|_1 + \delta\|y_0^*\|, & p = \infty. \end{cases}$$

В §6 рассматривается задача восстановления линейного функционала $(x, f)_X$, $f \in X$, на единичном шаре гильбертова пространства X по значениям линейного ограниченного оператора $I\colon X \to L_q(\Omega)$, заданного с погрешностью δ, для $q = \infty, 1$. В качестве приложения полученных результатов решаются задачи восстановления по приближенным коэффициентам Фурье. Приведем один из подобных результатов.

Пусть $e_1, e_2, \dots$ — ортонормированная система в гильбертовом пространстве X (не обязательно полная и не обязательно бесконечная). Для $x \in X$ через $x_j = (x, e_j)_X$ будем обозначать коэффициенты Фурье элемента x по отношению к этой системе. Рассмотрим задачу восстановления функционала $(x, f)_X$, $f \ne 0$, по значениям $(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \dots)$ таким, что

$$|x_j - \widetilde{x}_j| \le \delta\lambda_j, \quad j = 1, 2, \dots,$$

где $\lambda_j \geq 0$. Предположим, что

$$0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_{m-1} < \lambda_j, \quad j \geq m,$$
$$|f_m| > 0, \quad |f_m|\lambda_m^{-1} \geq |f_{m+1}|\lambda_{m+1}^{-1} \geq \ldots .$$

Положим $s := \sup\{j : |f_j| > 0,\ j \geq m\}$,

$$\mu_k := \frac{|f_k|\lambda_k^{-1}}{\sqrt{\|f\|_X^2 - \sum\limits_{j=1}^{k} |f_j|^2 + |f_k|^2\lambda_k^{-2} \sum\limits_{j=1}^{k} |\lambda_j|^2}}, \quad m \leq k \leq s$$

(если $s = \infty$, то полагаем $\mu_\infty := \lim_{k\to\infty} \mu_k$), $\Delta_{m-1} := (\mu_m, +\infty)$, $\Delta_k := (\mu_{k+1}, \mu_k]$, $m \leq k < s$, $\Delta_s := [0, \mu_s]$.

Теорема 6. *Пусть* $f \in X$, $\sum\limits_{j=1}^{s} |f_j| < \infty$. *Тогда*

1) *если* $\delta \in \Delta_k$, $m - 1 \leq k \leq s$ *и при* $k = s$ $\ f \neq \sum\limits_{j=1}^{s} f_j e_j$, *то*

$$(x, f)_X \approx \sum_{j=1}^{k} \left[|f_j| - \delta\lambda_j \sqrt{\frac{\|f\|_X^2 - \sum\limits_{j=1}^{k} |f_j|^2}{1 - \delta^2 \sum\limits_{j=1}^{k} \lambda_j^2}} \right] (\overline{f}_j)_{(1)} \widetilde{x}_j$$

— *оптимальный метод восстановления, а*

$$e(f, I, BX, \delta) = \sqrt{\|f\|_X^2 - \sum_{j=1}^{k} |f_j|^2} \sqrt{1 - \delta^2 \sum_{j=1}^{k} \lambda_j^2} + \delta \sum_{j=1}^{k} \lambda_j |f_j|.$$

2) *если* $\delta \in \Delta_s$ *и* $f = \sum\limits_{j=1}^{s} f_j e_j$, *то метод*

$$(x, f)_X \approx \sum_{j=1}^{s} \overline{f}_j \widetilde{x}_j$$

является оптимальным методом восстановления, а

$$e(f, I, BX, \delta) = \delta \sum_{j=1}^{s} \lambda_j |f_j|.$$

Характерной особенностью задач восстановления по неточной информации, хорошо видной на примере теоремы 6, является наличие “лишней” информации при больших значениях погрешности. Так, например, при $\delta \in \Delta_k$, $k < s$, информация о приближенных значениях коэффициентов Фурье $\widetilde{x}_{k+1}, \widetilde{x}_{k+2}, \ldots$ не используется в оптимальном методе.

Глава II посвящена задачам восстановления аналитических и гармонических функций, а также их производных по информации о точных значениях этих функций в некоторой конечной или бесконечной системе точек. Кроме того, здесь получен ряд результатов, касающихся точных значений колмогоровских, линейных и гельфандовских n-поперечников.

В §1 решена задача оптимального восстановления функционала

$$L_\xi^\lambda f := \sum_{j=\nu}^{\nu+m} \frac{\lambda_j}{j!} f^{(j)}(\xi),$$

где $\lambda_j \in \mathbb{C}$, $\lambda_{\nu+m} \neq 0$, $\nu \geq 0$, на единичном шаре пространства Харди H_p по значениям информационного оператора

$$If := \left\{f(\xi), \ldots, f^{(\nu-1)}(\xi), f(z_1), \ldots, f^{(\nu_1-1)}(z_1), \ldots, \right.\\ \left. f(z_n), \ldots, f^{(\nu_n-1)}(z_n)\right\},$$

где $\xi, z_1, \ldots, z_n$ — различные точки из единичного круга $D := \{z \in \mathbb{C} : |z| <\}$.

Частные случаи этой задачи рассматривались в работах автора ($p = \infty$, $\nu = m = 0$), Ч. Мичелли и Т. Ривлина ($p = \infty$, $\lambda = (0, 1)$), С. Фишера и Ч. Мичелли ($1 \leq p < \infty$, $\nu = m = 0$), автора и М.И. Стесина ($1 \leq p \leq \infty$, $\lambda = (\lambda_\nu, \lambda_{\nu+1})$). Здесь мы рассматриваем общий случай и сводим его к решению задачи Каратеодори–Фейера, которое удается описать конструктивным образом.

Из описания решения задачи Каратеодори–Фейера вытекает, что при всех $1 \leq p \leq \infty$ и $m \in \mathbb{N}$ для любых $\gamma_1, \ldots, \gamma_m \in \mathbb{C}$ существует $0 \leq k \leq m$, для которого система

$$\sum_{j=1}^{k} (\overline{b}_j^{-s} - b_j^s) + \frac{2(p-1)}{p} \sum_{j=1}^{m} b_j^s = \gamma_s, \quad s = 1, \ldots, m, \tag{7}$$

будет иметь решение, удовлетворяющее условию

$$|b_j| \leq 1,\ j = 1, \ldots, k, \quad |b_j| < 1,\ j = k+1, \ldots, m. \tag{8}$$

(При $p = \infty$ все выражения с p понимаются как предельные значения при $p \to \infty$).

Положим $d_j := \lambda_{\nu+m}^{-1} \lambda_{\nu+m-j}$, $j = 1, \ldots, m$,

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \dfrac{d_1}{2} & \dfrac{1}{2} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{d_{m-1}}{m} & \dfrac{d_{m-2}}{m} & \ldots & \dfrac{1}{m} \end{pmatrix}, \quad \rho := A^{-1} d;$$

здесь $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_m)^T$, $d = (d_1, \ldots, d_m)^T$. Пусть $b_1, \ldots, b_m$ — решения системы (7), удовлетворяющие условиям (8), для

$$\gamma_s := (-1)^s \left[\left(m + \nu - 1 + \frac{2}{p} \right) \overline{\xi}^s \right.$$
$$\left. - \sum_{l=1}^{s} (-1)^l C_s^l \overline{\xi}^{s-l} (1 - |\xi|^2)^l \left(\frac{y^{(l-1)}(\xi)}{(l-1)!} + \rho_l \right) \right],$$

где $y(z) := W^{-1}(z) W'(z)$, а

$$W(z) := \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{z - z_j}{1 - \overline{z}_j z} \right)^{\nu_j}.$$

Введем следующие обозначения:

$$W_1(z) := \left(\frac{z - \xi}{1 - \overline{\xi} z} \right)^{\nu} W(z), \quad \omega_j(z) := \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^{n} \left(\frac{z - z_l}{1 - \overline{z}_l z} \right)^{\nu_l},$$

$$\alpha_j := \frac{\overline{b}_j + \xi}{1 + \overline{\xi}\, \overline{b}_j}, \quad j = 1, \ldots, m, \quad r := (m+1)\frac{p-2}{p} - \nu,$$

$$\Psi(z) := \prod_{j=1}^{k} \frac{z - \alpha_j}{1 - \overline{\alpha}_j z} \prod_{j=1}^{m} (1 - \overline{\alpha}_j z)^{2(p-1)/p},$$

$$C(\xi) := \frac{\lambda_{\nu+m} W(\xi)(1 - |\xi|^2)^r}{\Psi(\xi)},$$

$$g(z) := e^{i \arg C(\xi)} W_1(z)(1 - \overline{\xi} z)^{-2(m+1)/p} \prod_{j=k+1}^{m} \frac{z - \alpha_j}{1 - \overline{\alpha}_j z} \prod_{j=1}^{m} (1 - \overline{\alpha}_j z)^{2/p}.$$

Через $e(\xi, \lambda, I, BH_p)$ обозначим погрешность оптимального восстановления.

Теорема 7. *При всех $1 \leq p \leq \infty$ метод*

$$L_\xi^\lambda f \approx \sum_{l=0}^{\nu-1} c_l(\xi) f^{(l)}(\xi) + \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=0}^{\nu_j - 1} c_{jl}(\xi) f^{(l)}(z_j),$$

где

$$c_l(\xi) := -\frac{C(\xi)}{l!(\nu + m - l)!} \left[\frac{\Psi(z)}{W(z)(1 - \overline{\xi} z)^r} \right]^{(\nu+m-l)} \Bigg|_{z=\xi},$$

$$c_{jl}(\xi) := -\frac{C(\xi)}{l!(\nu_j - l - 1)!} \left[\frac{\Psi(z)(1 - \overline{z}_j z)^{\nu_j}}{\omega_j(z)(1 - \overline{\xi} z)^r (z - \xi)^{\nu+m+1}} \right]^{(\nu_j - l - 1)} \Bigg|_{z=z_j},$$

является оптимальным методом восстановления, функция $g_0 := g/\|g\|_{H_p}$ *— экстремальная и*

$$
\begin{aligned}
e(\xi,\lambda,I,BH_p) &= L_\xi^\lambda g_0\\
&= |C(\xi)|\left(\frac{1}{m!}\left[\frac{\prod_{j=1}^m(1-\overline{\alpha}_j z)(z-\alpha_j)}{(1-\overline{\xi}z)^{m+1}}\right]^{(m)}\Bigg|_{z=\xi}\right)^{(p-1)/p}.
\end{aligned}
$$

В §2 рассматриваются задачи восстановления голоморфных функций многих переменных. Пусть B — единичный шар в $\mathbb{C}^n$. Для мультииндекса $\alpha := (\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ положим

$$D_j := \frac{\partial}{\partial z_j}, \quad D^\alpha := D_1^{\alpha_1}\dots D_n^{\alpha_n}, \quad |\alpha| := \alpha_1+\dots+\alpha_n.$$

Рассматривается задача оптимального восстановления значения функции из единичного шара пространства Харди H_p в некоторой точке $a\in B$ по значениям следов функций $D^\alpha f$, $|\alpha| = 0,\dots,r-1$, на аффинном подмножестве $\mathbb{C}^n$ вида

$$A := \{\, z\in B : z_{n-k+1} = c_{n-k+1},\dots,z_n = c_n \,\},$$

где $c = (0,\dots,0,c_{n-k+1},\dots,c_n)\in B$. Тем самым информационным оператором является оператор

$$I_A^r f := \left\{\, D^\alpha f_{|A}\,\right\}, \quad |\alpha| = 0,\dots,r-1.$$

Ответ дается в терминах специальной функции $\Phi_n(\rho,u)$, которая может быть записана в виде

$$\Phi_n(\rho,u) = \frac{\Gamma(n+\rho/2)}{\Gamma(\rho/2)}(1-u)^{-n}Q_n(\rho,u),$$

где

$$Q_n(\rho,u) = \sum_{m=0}^{n-1}\frac{(-1)^m}{m+\rho/2}C_{n-1}^m u^m.$$

Для $z = (z_1,\dots,z_n)\in\mathbb{C}^n$ и $1\le k\le n$ положим

$$z_k' := (z_1,\dots,z_{n-k},0,\dots,0), \quad z_k'' := z - z_k',$$

$$\langle z,w\rangle := \sum_{m=1}^n z_m\overline{w}_m,\ z,w\in\mathbb{C}^n, \quad |z|^2 := \langle z,z\rangle,$$

$$s_k(z,w) := \frac{\langle z,w_k''\rangle}{1-\langle z,w_k'\rangle}.$$

Обозначим через

$$\Delta_{nk}(p) := \left\{\, z\in B : |z_k''|^2 < \lambda_n^2(p)(1-|z_k'|^2)\,\right\}, \quad \Delta_{nk}(\infty) := B,$$

где

$$\lambda_n(\rho) := \min\{\,|u| : Q_n(\rho,u) = 0\,\}.$$

Ограничимся для простоты случаем, когда $A = A_k := \{ z \in B : z_{n-k+1} = \ldots = z_n = 0 \}$.

Теорема 8. *Пусть $1 \le p \le \infty$ и $1 \le k \le n$. Для всех $a \in \Delta_{nk}(rp)$ метод*

$$f(a) \approx \begin{cases} \chi^{(2-p)/p}(a) \displaystyle\sum_{j=0}^{r-1} \frac{1}{j!} d^j \left(\chi^{(p-2)/p}(z) f(z)\right)\Big|_{z=a'_k}, & 1 \le p < \infty, \\ (1-|a|^2) \displaystyle\sum_{j=0}^{r-1} \frac{1}{j!} d^j \left(\frac{f(z)}{1-\langle z, a\rangle}\right)\Big|_{z=a'_k}, & p = \infty, \end{cases}$$

где $dz = a''_k$, а

$$\chi(z) := \frac{\Phi_n\left(rp, s_k(z,a)\right)}{(n-1)!\left(1-\langle z, a'_k\rangle\right)^{n+rp/2}},$$

является оптимальным методом восстановления на классе BH_p по информации $I^r_{A_k}$. Для погрешности оптимального восстановления имеет место равенство

$$e(a, I^r_{A_k}, BH_p) = \begin{cases} \chi^{1/p}(a)|a''_k|^r, & 1 \le p < \infty, \\ |a''_k|^r \left(1-|a'_k|^2\right)^{-r/2}, & p = \infty. \end{cases}$$

При $a \in \Delta_{nk}(rp) \setminus A_k$ экстремальная функция имеет вид

$$g_0(z) = \begin{cases} \chi^{-1/p}(a)|a''_k|^{-r}\chi^{2/p}(z)(\langle z, a''_k\rangle)^r, & 1 \le p < \infty, \\ \left(\dfrac{\sqrt{1-|a'_k|^2}}{|a''_k|} \dfrac{\langle z, a''_k\rangle}{1-\langle z, a'_k\rangle}\right)^r, & p = \infty. \end{cases}$$

Интересно, что при всех $1 \le p < \infty$ и $1 \le n \le 5$ $\Delta_{nk}(p) = B$, а при любом $n \ge 6$ существуют $p \ge 1$, для которых $B \setminus \Delta_{nk}(p) \ne \emptyset$. Таким образом, рассматриваемая задача при $1 \le n \le 5$ решена полностью, а при $n \ge 6$ существует область $B \setminus \Delta_{nk}(p)$, где экстремальная функция имеет более сложный вид. В одномерном случае подобный эффект разбиения области на некоторые подобласти, в которых экстремальная функция имеет различное число нулей, встречался при восстановлении производных.

Из полученной теоремы, вытекает следствие, являющееся обобщением леммы Шварца.

Следствие. *При всех $1 \le p < \infty$ для $a \in B$ таких, что $|a| < \lambda_n(rp)$, имеет место равенство*

$$\sup_{\substack{f \in BH_p \\ (D^\alpha f)(0)=0,\, |\alpha| \le r-1}} |f(a)|$$

$$= \frac{|a|^r}{(1-|a|^2)^{n/p}} \left[\frac{\Gamma(n+rp/2)}{\Gamma(n)\Gamma(rp/2)} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(-1)^m}{m+rp/2} C^m_{n-1} |a|^{2m}\right]^{1/p}.$$

Ряд аналогичных результатов получен для восстановления в пространствах Бергмана $A_p(B)$.

В §3 рассмотрены задачи восстановления на классах гармонических функций, аналогичные тем, которые рассматривались в §1.

В §4 исследуются задачи оптимального выбора информационного оператора и тесно связанные с ними задачи о нахождении n-поперечников. Обозначим через $H_\infty(G)$ класс аналитических в области $G \in \mathbb{C}$ функций, удовлетворяющих условию

$$\|f\|_{H_\infty(G)} := \sup_{z\in G} |f(z)| < \infty.$$

Аналогичное обозначение $h_\infty(G)$ будем использовать для гармонических функций. Пусть $D_H := \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| < H\}$ и $\widetilde{H}_\infty(D_H)$ множество 2π-периодических функций из $H_\infty(D_H)$. Положим

$$e_n([0,2\pi), B\widetilde{H}_\infty(D_H)) := \inf_{t_j\in[0,2\pi)} \sup_{t\in[0,2\pi)} e(t, I_\tau, B\widetilde{H}_\infty(D_H)),$$

где $I_\tau f = \{f(t_1), \dots, f(t_n)\}$, и

$$\kappa(x) = 4x^{1/2}\left(\sum_{m=0}^{\infty} x^{m(m+1)}\right)^2 \left(1 + 2\sum_{m=1}^{\infty} x^{m^2}\right)^{-2}.$$

Теорема 9. *Пусть $k = \kappa(e^{-2H})$, а $\lambda = \kappa(e^{-2Hn})$. Тогда*

1) *при всех $n \in \mathbb{N}$ имеет место равенство*

$$e_n([0,2\pi), B\widetilde{H}_\infty(D_H)) = \begin{cases} \sqrt{\lambda}, & n = 2s, \\ \sqrt{k\lambda}, & n = 2s-1, \end{cases}$$

причем единственными с точностью до сдвига оптимальными узлами являются узлы $t_j^* = (j-1)2\pi/n$, $j = 1, \dots, n$;

2) *метод*

$$f(t) \approx \frac{K}{n\Lambda} \operatorname{sn}\left(\frac{n\Lambda}{\pi}t, \lambda\right) \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j c_n\left(\frac{K}{\pi}t - j\frac{2K}{n}\right) f\left(j\frac{2\pi}{n}\right),$$

в котором

$$c_n(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{cn}(x,k)\operatorname{dn}(x,k)}{\operatorname{sn}(x,k)} + i\mu, & n = 2s, \\ \dfrac{\operatorname{dn}^2(x,k)}{\operatorname{sn}(x,k)}, & n = 2s-1, \end{cases}$$

а μ — произвольное вещественное число, удовлетворяющее условию $|\mu| \le 1-k$, является оптимальным методом восстановления на классе $B\widetilde{H}_\infty(D_H)$ при всех $t \in \mathbb{R}$.

Вторая часть §4 посвящена нахождению точных значений колмогоровских, линейных и гельфандовских n-поперечников, которые обозначаются через d_n, λ_n и d^n, соответственно. Приведем некоторые из полученных результатов.

Пусть A_H — класс функций, вещественных на вещественной оси, 2π-периодических, аналитически продолжаемых в полосу D_H и удовлетворяющих в ней условию $|\operatorname{Re} f(z)| \le 1$. Множество функций из $\widetilde{H}_\infty(D_H)$, вещественных на вещественной оси, обозначим через $\widetilde{H}_\infty^{\mathbb{R}}(D_H)$. Положим

$$I_{q0}(\lambda) := \int_0^1 \frac{t^q\,dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-\lambda^2t^2)}},$$
$$I_{q1}(\lambda) := \int_0^1 \frac{\arctan^q(\sqrt{\lambda}t)\,dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-\lambda^2t^2)}}.$$

Теорема 10. *При всех* $1 \le q < \infty$

$$d_{2n}(A_H, L_q) = \lambda_{2n}(A_H, L_q) = d^{2n}(A_H, L_q) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{2\pi}{\Lambda} I_{q1}(\lambda)\right)^{1/q}$$
$$= \frac{8}{\pi}\left(2\sqrt{\pi}\frac{\Gamma\left(\dfrac{q+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{q}{2}+1\right)}\right)^{1/q} e^{-Hn} + O\left(e^{-5Hn}\right),$$

где $\lambda = \kappa(e^{-4Hn})$.

Теорема 11. *При всех* $1 \le q \le \infty$

$$d_{2n}(B\widetilde{H}_\infty^{\mathbb{R}}(D_H), L_q) = \lambda_{2n}(B\widetilde{H}_\infty^{\mathbb{R}}(D_H), L_q) = d^{2n}(B\widetilde{H}_\infty^{\mathbb{R}}(D_H), L_q)$$
$$= \begin{cases} \sqrt{\lambda}\left(\dfrac{2\pi}{\Lambda} I_{q0}(\lambda)\right)^{1/q} = 2\left(2\sqrt{\pi}\dfrac{\Gamma\left(\dfrac{q+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{q}{2}+1\right)}\right)^{1/q} e^{-Hn} \\ \qquad\qquad\qquad + O\left(e^{-5Hn}\right), & 1 \le q < \infty, \\ \sqrt{\lambda} = 2e^{-Hn} + O\left(e^{-5Hn}\right), & q = \infty, \end{cases}$$

где $\lambda = \kappa(e^{-4Hn})$.

В §5 мы находим некоторые точные значения гельфандовских и линейных поперечников для многомерных классов Харди и Бергмана.

Пусть функция $f(z)$, $z \in \mathbb{C}^n$, разлагается в степенной ряд

$$f(z) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} c_\alpha z^\alpha. \tag{9}$$

Обозначим через $F_s(z)$ сумму членов $c_\alpha z^\alpha$ степенного ряда, у которых $|\alpha| = s$. Тогда степенной ряд (9), записанный в виде

$$f(z) = \sum_{s=0}^{\infty} F_s(z), \tag{10}$$

называется однородным разложением функции f. Радиальная производная порядка r для функции, имеющей однородное разложение (10), определяется равенством

$$\mathcal{R}^r f(z) := \sum_{s=r}^{\infty} \frac{s!}{(s-r)!} F_s(z).$$

Обозначим через $H\mathcal{R}_2^r(B_n)$ класс функций f, голоморфных в $B_n := \{z \in \mathbb{C}^n : |z| < 1\}$, для которых $\mathcal{R}^r f \in BH_2(B_n)$. Через $A\mathcal{R}_2^r(B_n)$ будем обозначать класс функций f, голоморфных в B_n, для которых $\mathcal{R}^r f \in BA_2(B_n)$.

Положим

$$S_\rho := \{\, z \in \mathbb{C}^n : |z| = \rho \,\}, \quad C_\rho = C(S_\rho), \quad N_m := \sum_{s=0}^{m-1} C_{n+s-1}^{n-1}.$$

Число N_m равно размерности пространства полиномов от n переменных степени не выше $m-1$.

Теорема 12. *При всех* $0 < \rho < 1$ *и* $m \geq r \geq 0$

$$\begin{aligned} d^{N_m}\left(H\mathcal{R}_2^r(B_n), C_\rho\right) &= \lambda_{N_m}\left(H\mathcal{R}_2^r(B_n), C_\rho\right) \\ &= \rho^m \left(\frac{1}{(n-1)!} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{((m-r+s)!)^2 (n+m-1+s)!}{((m+s)!)^3} \rho^{2s} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

При всех $0 < \rho < 1$ *и* $m \geq r \geq 1$

$$\begin{aligned} d^{N_m}\left(A\mathcal{R}_2^r(B_n), C_\rho\right) &= \lambda_{N_m}\left(A\mathcal{R}_2^r(B_n), C_\rho\right) \\ &= \rho^m \left(\frac{1}{n!} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{((m-r+s)!)^2 (n+m+s)!}{((m+s)!)^3} \rho^{2s} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

При всех

$$0 < \rho \leq \left(\frac{n}{n+m} \right)^{\frac{1}{2m}}$$

$$\begin{aligned} d^{N_m}\left(BA_2(B_n), C_\rho\right) &= \lambda_{N_m}\left(BA_2(B_n), C_\rho\right) \\ &= \rho^m \left(\frac{1}{n!} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(n+m+s)!}{(m+s)!} \rho^{2s} \right)^{1/2} \\ &= \frac{\rho^m}{(1-\rho^2)^{(n+1)/2}} \left(C_{n+m}^n \sum_{s=0}^{n} \frac{(-1)^s}{1+s/m} C_n^s \rho^{2s} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Аналогичные результаты получены для классов Харди и Бергмана в единичном поликруге.

В §6 исследуются задачи восстановления, подобные задачам, рассмотренным в §§1 и 3, по информации о значениях функции в бесконечных системах точек $\{z_j\}_1^\infty$ и $\{z_j\}_\infty^\infty$. С помощью этих результатов найдены в явном виде оптимальные методы в одной задаче, поставленной Сунь Юн-Шеном.

Пусть W — некоторый класс функций, определенных на всей вещественной оси. Обозначим через $\widetilde{\Theta}_\tau$, $\tau > 0$, системы узлов $\{\xi_j\}_{-\infty}^\infty$, для каждой из которых

1) существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что

$$-n\tau \le \xi_{-n} < \xi_{-n+1} < \ldots < \xi_{n-1} < n\tau,$$

2) $\xi_{j+2n} = 2n\tau + \xi_j$ при всех $j \in \mathbb{Z}$. Положим

$$e(\tau, W) := \inf_{\xi \in \widetilde{\Theta}_\tau} \sup_{x \in \mathbb{R}} \inf_{S\colon I_\xi(W) \to \mathbb{R}} \sup_{f \in W} |f(x) - S(I_\xi f)|,$$

где

$$I_\xi f := \{f(\xi_j)\}_{-\infty}^\infty.$$

Систему узлов, на которой достигается нижняя грань будем называть оптимальной.

Теорема 13. *Имеют место равенства*

$$e(\tau, BH_\infty(D_H)) = (\kappa(\exp(-4\pi H/\tau)))^{1/2},$$

$$e(\tau, Bh_\infty(D_H)) = \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^\infty \frac{(-1)^m}{2m+1} \frac{1}{\operatorname{ch}\left[(2m+1)\dfrac{\pi H}{\tau}\right]}. \tag{11}$$

Система $\{j\tau\}_{-\infty}^\infty$ является оптимальной в обоих случаях, а соответствующие этой системе оптимальные методы имеют вид

$$f(x) \approx \frac{\pi}{K'} \operatorname{sn}\left(\frac{K'}{2H}x, k\right) \sum_{j=-\infty}^\infty (-1)^j \frac{f(j\tau)}{\operatorname{sh}\left[\dfrac{\pi}{2H}(x - j\tau)\right]},$$

$$u(x) \approx \frac{\pi}{K'} \frac{\operatorname{sn}\left(\dfrac{K'}{2H}x, k\right)}{1 + k \operatorname{sn}^2\left(\dfrac{K'}{2H}x, k\right)} \sum_{j=-\infty}^\infty (-1)^j \frac{u(j\tau)}{\operatorname{sh}\left[\dfrac{\pi}{2H}(x - j\tau)\right]},$$

где $k = \kappa(\exp(-4\pi H/\tau))$.

Равенство (11) и оптимальность узлов $\{j\tau\}_{-\infty}^\infty$ для класса $Bh_\infty(D_H)$ были получены ранее Сунь Юн-Шеном.

В третьей главе рассмотрены задачи оптимального восстановления ограниченных аналитических функций и их производных по неточно заданной информации.

В §1 изучается погрешность оптимального метода восстановления, если вместо точных значений используются приближенные. При этом вводится величина, аналогичная константе Лебега при интерполяции многочленами Лагранжа. Из полученных результатов в предельном случае вытекают известные результаты относительно констант Лебега.

В §2 изучается задача оптимального восстановления функции из класса BH_∞ в точке $z_0 \in D$ по значениям информационного оператора

$$If := f\Big|_E, \quad E \subset D,$$

заданного с погрешностью δ в норме пространства $C(E)$. Из общих результатов (см. (4)) вытекает следующее равенство для погрешности оптимального восстановления

$$e(z_0, E, \delta) = \sup_{\substack{f \in BH_\infty \\ |f(z)| \le \delta,\ z \in E}} |f(z_0)|. \tag{12}$$

Экстремальная задача (12) для $E = (-1, 0)$ известна как задача Мию, для $E = \{z \in D : |z| \le r\}$ — как задача Уолша и для $E = [a, b] \subset (-1, 1)$ — как задача Хейнса. Более общие задачи подобного типа изучались С. Я. Хавинсоном.

Для задачи (12) характерным является эффект “очистки”, когда решение совпадает с решением аналогичной задачи для множества $E_1 \subset E$, состоящем из конечного или дискретного множества точек. С точки зрения восстановления этот эффект означает, что из всех значений восстанавливаемой функции на E достаточно знать ее значения на E_1, а информация о значениях в точках множества $E \setminus E_1$ является лишней.

Обозначим через $\mathcal{E}$ множество таких $E_1 \subset E$, для которых решение задачи (12) для E и E_1 совпадают. Порядком информативности множества E при заданных z_0 и δ будем называть величину

$$\mathrm{In}(z_0, E, \delta) := \inf_{E_1 \subset \mathcal{E}} \operatorname{card} E_1,$$

а множества, на которых достигается эта нижняя грань, назовем полными информативными системами.

Теорема 14. *Пусть $E \subset (-1, 1)$ — замкнутое множество, $0 < \delta < 1$ и $z_0 \in (-1, 1) \setminus E$. Тогда*

1) *экстремальная функция в задаче* (12), *нормированная условием $f^*(z_0) > 0$, существует, единственна и имеет вид*

$$f^*(z) = \lambda \prod_{j=1}^{m} \frac{z - \alpha_j}{1 - \alpha_j z}, \quad \alpha_j \in (-1, 1), \quad \lambda = 1 \text{ или } 1; \tag{13}$$

2) *функция* (13), *нормированная условием $f^*(z_0) > 0$, является экстремальной в задаче* (12) *тогда и только тогда, когда при всех $z \in E$ $|f^*(z)| \le \delta$ и найдутся точки $x_1 < \ldots < x_m$, $x_j \in E$, такие, что*

$$f^*(x_j) = \begin{cases} (-1)^{p+j}\delta, & j = 1, \ldots, p, \\ (-1)^{p+j+1}\delta, & j = p+1, \ldots, m, \end{cases}$$

где $0 \le p \le m$ *таково, что* $z_0 \in (x_p, x_{p+1})$ $(x_0 := -1,\ x_{m+1} := 1)$, *а* $\lambda = (-1)^{p+m}$. *При этом* $\mathrm{In}(z_0, E, \delta) = m$, *а точки* $x_1, \dots, x_m$ *являются полной информативной системой.*

В этом же параграфе строится оптимальный метод восстановления и указывается алгоритм нахождения полной информативной системы.

В §3 исследуется зависимость порядка информативности от величины погрешности δ. Положим

$$\delta_n(E) := \inf_{B \in \mathcal{B}_n} \|B\|_{C(E)},$$

где $\mathcal{B}_n$ — множество произведений Бляшке порядка не выше n.

Теорема 15. *Пусть* $E \subset (-1,1)$ *— замкнутое множество и* $z_0 \in (-1,1) \setminus E$. *Тогда*

1) *при* $\delta_n(E) \le \delta < \delta_{n-1}(E)$ $(\delta_0(E) := 1)$ *справедливы неравенства*

$$n \le \mathrm{In}(z_0, E, \delta) \le n+1,$$

причем, если $z_0 \in (-1,1) \setminus \operatorname{co} E$, *то*

$$\mathrm{In}(z_0, E, \delta) = n.$$

2) *при всех* $\delta \in (0,1)$

$$\mathrm{In}(z_0, E, \delta) \ge c(E) \log \frac{1}{\delta},$$

кроме того,

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{\mathrm{In}(z_0, E, \delta)}{\log \frac{1}{\delta}} = c(E),$$

где $c(E)$ *— емкость конденсатора* $(E, \mathbb{C} \setminus D)$.

В §4 рассматриваются задачи восстановления для случаев, когда $E = [-l, 0]$ $(l \in (0,1))$, $(-1,0)$ и $z_0 \in (0,1)$. Исследуется также задача об оптимальной интерполяции, под которой понимается задача о нахождении величины

$$e_n(E, \delta) := \inf_{\substack{F \subset E \\ \operatorname{card} F \le n}} \sup_{z_0 \in E} e(z_0, E, \delta)$$

и множества F_0, на котором достигается нижняя грань.

§5 посвящен восстановлению производных ограниченных аналитических и гармонических функций по неточным данным.

Пусть W — некоторый класс функций, определенных в области $\Omega \subset \mathbb{C}$, и $E \subset \Omega$. Положим

$$e^{(k)}(z_0, E, \delta, W) := \inf_{S\colon C(E) \to \mathbb{C}} \sup_{f \in W} \sup_{\substack{y \in C(E) \\ \|f - y\|_{C(E)} \le \delta}} |f^{(k)}(z_0) - S(y)|.$$

Теорема 16. *Для всех* $0 < \delta < 1$ *и* $z_0 \in (-1, 1)$ *метод*

$$f'(z_0) \approx \frac{2\pi}{D'(1-\delta^4)(1-z_0^2)} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{\operatorname{sh}^2\left((2j-1)\dfrac{\pi D}{D'}\right)} \widetilde{f}(z_j),$$

где

$$z_j = \frac{\operatorname{th}\left((2j-1)\dfrac{\pi D}{2D'}\right) + z_0}{1 + z_0 \operatorname{th}\left((2j-1)\dfrac{\pi D}{2D'}\right)},$$

D *и* D' *— полные эллиптические интегралы первого рода для модулей* δ^2 *и* $\sqrt{1-\delta^4}$*, соответственно, является оптимальным методом восстановления на классе* BH_∞ *по значениям, заданным на множестве* $(-1, 1)$ *с погрешностью* δ*, и*

$$e'(z_0, (-1,1), \delta, BH_\infty) = \frac{2\delta D'}{\pi(1-z_0^2)} = \frac{4}{\pi(1-z_0^2)} \delta \log \frac{2}{\delta} + O\left(\delta^5 \log \frac{2}{\delta}\right).$$

С помощью конформного отображения полосы D_H на единичный круг D из этого результата получаем

$$e'(z_0, \mathbb{R}, \delta, BH_\infty(D_H)) = \frac{\delta D'}{2H}.$$

Из последнего равенства и общего соотношения (4) следует точное неравенство колмогоровского типа для производных функций $f \in BH_\infty(D_H)$

$$\|f'\|_{C(\mathbb{R})} \le \frac{1}{2H} \|f\|_{C(\mathbb{R})} \|f\|^2_{H_\infty(D_H)} \times \int_0^{\pi/2} \left(\|f\|^4_{H_\infty(D_H)} \cos^2 t + \|f\|^4_{C(\mathbb{R})} \sin^2 t\right)^{-1/2} dt.$$

Задача восстановления второй производной несколько отличается от рассмотренной задачи. Оказывается, что здесь существует некоторое значение $\delta_0 \in (0, 1)$ такое, что характер поведения экстремальной функции качественно меняется в зависимости от того, какому из множеств $(0, \delta_0]$ или $(\delta_0, 1)$ принадлежит величина погрешности задания исходных данных δ. Значение δ_0 является решением уравнения

$$C(\delta) := \frac{8}{3} \left[\frac{1 - 5\delta^4}{2} \left(\frac{D'}{\pi}\right)^2 - 1 \right] = 0$$

(вычисления показывают, что $\delta_0 = 0,2145\ldots$).

Ряд аналогичных результатов получен также для класса Bh_∞.

Глава IV посвящена задачам построения наилучших и оптимальных квадратурных формул. Пусть W — некоторый класс функций, определенных в области $\Omega \subset \mathbb{C}$, содержащей интервал вещественной оси (a, b). Рассматривается задача оптимального восстановления функционала

$$Lf := \int_a^b f(x)p(x)\,dx$$

для функций $f \in W$ по точным значениям информационного оператора

$$If := \left\{ f(x_1), \dots, f^{(\nu_1 - 1)}(x_1), \dots, f(x_n), \dots, f^{(\nu_n - 1)}(x_n) \right\},$$

где p — весовая функция, а $x_1, \dots, x_n$ — различные точки из множества $\mathbb{R} \cap \Omega$.

Положим для $\nu := (\nu_1, \dots, \nu_n)$

$$\tau_\nu := \begin{pmatrix} x_1, \dots, x_n \\ \nu_1, \dots, \nu_n \end{pmatrix},$$
$$e(\tau_\nu, W, p) := e(L, I, W, 0).$$

Из общей теории следует, что среди оптимальных методов восстановления существует линейный, т.е. квадратурная формула. Ее мы и называем наилучшей для данной системы узлов τ_ν.

В §1 находятся наилучшие квадратурные формулы при четных кратностях $\nu_1, \dots, \nu_n$ для классов BH_∞ и Bh_∞.

Положим

$$e(\nu, W, p) := \inf_{\substack{x_1 < \dots < x_n \\ x_j \in \Omega \cap \mathbb{R}}} e(\tau_\nu, W, p). \tag{14}$$

Точки, на которых достигается нижняя грань назовем оптимальными узлами. Наилучшую квадратурную формулу для оптимальных узлов будем называть оптимальной.

Задача об оптимальной квадратурной формуле, называемая задачей Колмогорова–Никольского, исследовалась многими авторами. Основные результаты, полученные для классов гладких функций, приведены Н.П. Корнейчуком в добавлении в монографии С.М. Никольского “Квадратурные формулы” М: Наука, 1979. Для классов аналитических функций порядковые оценки величины (14) исследовались в работах Н.С. Бахвалова, Я.-Е. Андерсона и Б. Боянова.

В §3 с помощью ряда вспомогательных результатов, полученных в §2, доказывается существование оптимальных квадратурных формул для любых кратностей на классах BH_∞ и Bh_∞. В общем случае оптимальные узлы могут быть не единственны. Соответствующий пример приведен в §2. Однако, если зафиксировать отрезок интегрирования, то для достаточно больших областей аналитичности (или гармоничности) единственность имеет место.

Теорема 17. *Пусть* $[a,b]=[-1,1]$, $D_k := \left\{z\in\mathbb{C} : |z| < 1/\sqrt{k}\right\}$ *и для весовой функции* p *(быть может, зависящей от* k*) при всех* $k\in(0,k_0)$, $0<k_0\le 1$, *выполнено условие*

$$\frac{\inf\limits_{t_j}\displaystyle\int_{-1}^{1}\prod_{j=1}^{N}(t-t_j)^2 p(t)\,dt}{\displaystyle\int_{-1}^{1} p(t)\,dt} \ge \gamma_N > 0.$$

Тогда для всех $\mu=(\mu_1,\ldots,\mu_n)$ *таких, что* $\sum\limits_{j=1}^{n}[(\mu_j+1)/2]\le N$ *и всех*

$$0<k\le\min\left\{k_0, \frac{2r-1}{18r-7+N4^{N+1}\gamma_N^{-1}}\right\},$$

где $r := \min\limits_{1\le j\le n}[(\mu_j+1)/2]$, *оптимальные узлы для классов* $BH_\infty(D_H)$ *и* $BH_\infty(D_H)$ *единственны.*

Для чебышевского веса $p_0(t) := \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$, $[a,b]=[-1,1]$ на классах $BH_\infty(Э_c)$ и $Bh_\infty(Э_c)$, где $Э_c$ — внутренность эллипса с фокусами в точках ±1 и суммой полуосей $c>1$, удается точно решить задачу об оптимальной квадратурной формуле. Положим

$$I_{q2}(\lambda) := \int_0^1 \frac{\arctan(\sqrt{\lambda}t)^q\,dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-\lambda^2t^2)}}.$$

Теорема 18. *Пусть* q *— четное число. Тогда для любого* $c>1$ *при всех* $q-1\le\nu_j\le q$ *имеют место равенства*

$$e(\nu, BH_\infty(Э_c), p_0) = \frac{\pi}{\Lambda}\lambda^{q/2}I_{q0}(\lambda) = 2^{q/2}\pi\frac{(q-1)!!}{(q/2)!}c^{-qn} + O\left(c^{-(q+4)n}\right),$$
$$e(\alpha, Bh_\infty(Э_c), p_0) = \frac{4}{\Lambda}I_{q2}(\lambda) = 2^{q/2+2}\frac{(q-1)!!}{(q/2)!}c^{-qn} + O\left(c^{-(q+4)n}\right),$$

где $\lambda=\kappa(c^{-4n})$, *а единственными оптимальными узлами являются чебышевские узлы*

$$x_j := \cos\frac{2j-1}{2n}\pi, \quad j=1,\ldots,n.$$

В §3 изучается также задача оптимального интегрирования по приближенным значениям функций. Рассмотрим величину $e(L, I_\tau, B\widetilde{H}_\infty(D_H), \delta)$, когда

$$Lf = \int_0^{2\pi} f(t)\,dt,$$

$I_\tau f = (f(t_1), \dots, f(t_n))$, $t_j \in [0, 2\pi)$ — различные точки, а погрешность измеряется в норме l_q^n, $1 \le q \le \infty$. Положим в этом случае

$$e_{nq}(B\widetilde{H}_\infty(D_H), \delta) = \inf_{t_j \in [0,2\pi)} e(L, I_\tau, B\widetilde{H}_\infty(D_H), \delta). \tag{15}$$

Узлы, на которых достигается нижняя грань будем называть оптимальными.

Таким образом, задача (15) является задачей о нахождении оптимального метода интегрирования функции $f \in B\widetilde{H}_\infty(D_H)$, использующего n приближенных значений $\widetilde{f}(t_1), \dots, \widetilde{f}(t_n)$ таких, что

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \widetilde{f}(t_j) - f(t_j)|^q\right)^{1/q} \le \delta \quad \text{при} \quad 1 \le q < \infty$$

или

$$\max_{1 \le j \le n} |\widetilde{f}(t_j) - f(t_j)| \le \delta \quad \text{при} \quad q = \infty.$$

Положим

$$J_r(\lambda, \Delta) := \int_0^1 \left(\frac{\lambda t^2 + \Delta}{1 + \Delta\lambda t^2}\right)^{r/2} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-\lambda^2 t^2)}}.$$

Теорема 19. *Пусть* $1 \le q \le \infty$ *и* $0 \le \delta < n^{1/q}$. *Тогда*

1) *квадратурная формула*

$$\int_0^{2\pi} f(t)\,dt \approx \frac{2\pi}{n}(1-\Delta^2)^{-1}\left(1 - \Lambda^{-1} J_4(\lambda, \Delta)\right) \sum_{j=0}^{n-1} \widetilde{f}\left(j\frac{2\pi}{n}\right),$$

в которой $\Delta = \delta n^{-1/q}$, *а* $\lambda = \kappa(e^{-2Hn})$, *является оптимальным методом интегрирования на классе* $B\widetilde{H}_\infty(D_H)$ *по значениям, заданным с погрешностью* δ *в норме* l_q^n;

2) *имеет место равенство*

$$e_{nq}(B\widetilde{H}_\infty(D_H), \delta) = 2\pi\Lambda^{-1} J_2(\lambda, \delta n^{-1/q}) = 2\pi\delta n^{-1/q}$$
$$+ 4\pi(1 - \delta^2 n^{-2/q})e^{-Hn} + 4\pi\delta(4 - 3\delta^2 n^{-2/q})n^{-1/q}e^{-2Hn} + O\left(e^{-3Hn}\right);$$

3) *узлы* $t_j^* = (j-1)\dfrac{2\pi}{n}$, $j = 1, \dots, n$, — *единственные с точностью до сдвига оптимальные узлы.*

Аналогичная задача решена для класса $BH_\infty(Э_c)$, $[a, b] = [-1, 1]$ и чебышевского веса p_0.

ЛИТЕРАТУРА

1. Осипенко К.Ю. Наилучшие методы приближения и порядок информативности систем// Мат. сб. 1980. Т. 111, №4. С. 532–556.

2. Осипенко К.Ю. Наилучшие методы приближения аналитических функций, заданных с погрешностью// Мат. сб. 1982. Т. 118, №3. С. 350–370.
3. Осипенко К.Ю. Задача Хейнса и оптимальная экстраполяция аналитических функций, заданных с ошибкой// Мат. сб. 1985. Т. 126, №4. С. 566–575.
4. Осипенко К.Ю. О наилучших методах интегрирования на классах ограниченных аналитических функций. XI Всесоюзная школа по теории операторов в функциональных пространствах. Челябинск, 1986. С. 97.
5. Osipenko K.Yu. On optimal extrapolation and interpolation of fuzzy analytic functions// Anal. math. 1987. V. 13, №3. P. 199–210.
6. Осипенко К.Ю. О наилучших и оптимальных квадратурных формулах на классах ограниченных аналитических функций// Изв. АН СССР. Сер. мат. 1988. Т. 52, №1. С. 79–99.
7. Osipenko K.Yu. Minimal Blaschke products and optimal quadratures in H_∞. International Symposium on Optimal Algorithms. 1989. Varna: Sofia, 1989. P. 135–136.
8. Осипенко К.Ю. О произведениях Бляшке, наименее уклоняющихся от нуля// Мат. заметки. 1990. Т. 47, №5. С. 71–80.
9. Osipenko K.Yu. On the Lebesgue constants for interpolation of analytic functions// Anal. math. 1990. V. 16, №4. P. 227–289.
10. Осипенко К.Ю., Стесин М.И. О поперечниках класса Харди H_2 в n-мерном шаре// Успехи мат. наук. 1990. Т. 45, №5. С. 193–194.
11. Осипенко К.Ю. Оптимальная экстраполяция гладких функций, заданных с ошибкой// Сердика Бълг. мат. спис. 1990. Т. 16. С. 79–86.
12. Магарил-Ильяев Г.Г., Осипенко К.Ю. Об оптимальном восстановлении функционалов по неточным данным// Мат. заметки. 1991. Т. 50, №6. С. 85–93.
13. Осипенко К.Ю. Наилучшие и оптимальные методы восстановления на классах гармонических функций// Мат. сб. 1991. Т. 182, №5. С. 723–745.
14. Осипенко К.Ю. Об оптимальном восстановлении многозначных отображений. Третья Северо-Кавказская региональная конференция по функционально-дифференциальным уравнениям и их приложениям. Махачкала, 1991. С. 123.
15. Osipenko K.Y., Stessin M.I. On optimal recovery of a holomorphic function in the unit ball of C^n// Constr. Approx. 1992. V. 8. P. 141–159.