Факультет вычислительной математики и кибернетики

На правах рукописи

Константин Юрьевич ОСИПЕНКО

НАИЛУЧШИЕ МЕТОДЫ ПРИБЛИЖЕНИЯ, ИСПОЛЬЗУЮЩИЕ ИНФОРМАЦИЮ О КОНЕЧНОМ ЧИСЛЕ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИЙ

(01.01.07. — вычислительная математика)

АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

ИЗДАТЕЛЬСТВО МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА · 1976

Работа выполнена на кафедре вычислительной математики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель — доктор физико-математических наук, профессор Н.С. БАХВАЛОВ.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор С.Б. СТЕЧКИН, кандидат физико-математических наук Т.А. ЛЕОНТЬЕВА.

Ведущее предприятие — Московский физико-технический институт.

Автореферат разослан "____"________________ 1976 г.

Защита диссертации состоится "____"________________ 1976 г. в 15 часов на заседании Ученого Совета факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ (Москва, 117234, Ленинские горы, МГУ, факультет вычислительной математики и кибернетики, ауд. 205).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке факультета.

Ученый секретарь Совета
доктор физ.-мат. наук,
профессор Н.Н. КУЗНЕЦОВ

Диссертация посвящена исследованию задач, связанных с построением наилучших методов приближения функций из некоторых классов, использующих информацию о конечном числе значений функций. В более общем виде рассматриваемые задачи можно сформулировать, как задачу приближения линейного функционала $L(x)$ на некотором множестве W из линейного пространства X по значениям линейных функционалов $l_1(x), \dots, l_n(x)$.

Последняя задача часто формулируется, как задача нахождения таких чисел $C_1^0, \dots, C_n^0$, для которых величина

$$r_n(C_1, \dots, C_n) = \sup_{x \in W} \left| L(x) - \sum_{j=1}^{n} C_j l_j(x) \right|$$

минимальна. Большинство задач о построении наилучшей квадратурной формулы на классе можно сформулировать именно в таком виде.

Желание наиболее полно использовать информацию о значениях функционалов $l_1(x), \dots, l_n(x)$ приводит к следующей постановке. Среди всевозможных методов приближения $S(l_1(x), \dots, l_n(x))$ (не обязательно линейных относительно $l_1(x), \dots, l_n(x)$) найти метод, называемый наилучшим, который минимизирует величину

$$r_n(S) = \sup_{x \in W} |L(x) - S(l_1(x), \dots, l_n(x))|.$$

Такая постановка задачи была предложена С.А. Смоляком [10] и рассматривалась также в работах Н.С. Бахвалова [2] и Б.Д. Боянова [3, 4]. В частности, было доказано ([10], см. также [2]), что если множество W из линейного вещественного пространства является выпуклым и центрально-симметричным, то среди наилучших методов приближения найдется линейный относительно функционалов $l_1(x), \dots, l_n(x)$, и имеет место равенство

$$\inf_{\{C_j\}} r_n(C_1, \dots, C_n) = \inf_S r_n(S) = \sup_{\substack{x \in W \\ l_1(x) = \ldots = l_n(x) = 0}} |L(x)|.$$

Тот факт, что реально значения функционалов $l_1(x), \dots, l_n(x)$ во многих задачах бывают известны приближенно, приводит к следующей постановке. Приблизить линейный функционал $L(x)$ на множестве W из линейного пространства X (вещественного или комплексного) по значениям $\widetilde{l}_1(x), \dots, \widetilde{l}_n(x)$, где $\widetilde{l}_j(x) = l_j(x) + \rho_j(x)$, $j = 1, \dots, n$, а вектор $\rho(x) = (\rho_1(x), \dots, \rho_n(x))$ при всех $x \in W$ удовлетворяет неравенству $\|\rho(x)\| \le \delta$; здесь $\| \cdot \|$ — какая-либо норма в пространстве n-мерных вещественных или комплексных векторов, а δ — неотрицательное число, характеризующее погрешность задания линейных функционалов $l_1(x), \dots, l_n(x)$.

Погрешностью данного метода приближения $S(\delta, \widetilde{l}_1(x), \ldots, \widetilde{l}_n(x))$ линейного функционала $L(x)$ назовем величину

$$r_n(\delta, S) = \sup_{x \in W} \sup_{\|\rho(x)\| \le \delta} |L(x) - S(\delta, \widetilde{l}_1(x), \ldots, \widetilde{l}_n(x))|.$$

В работе рассматриваются задачи, связанные с нахождением такого метода $S_0(\delta, \widetilde{l}_1(x), \ldots, \widetilde{l}_n(x))$, называемого наилучшим методом приближения при данном δ, для которого справедливо равенство

$$r_n(\delta, S_0) = \inf_S r_n(\delta, S).$$

Заметим, что в случае $\delta = 0$ рассматриваемая постановка задачи совпадает с постановкой С.А. Смоляка.

Диссертация состоит из введения и трех глав. В первой главе исследуются вопросы, связанные с существованием и единственностью линейного наилучшего метода приближения. В § 1 устанавливается, что для комплексного линейного пространства X в случае, если множество W выпуклое и круговое, при всех $\delta \ge 0$ среди наилучших методов приближения найдется линейный и для его погрешности будет справедливо равенство

$$r_n(\delta, S_0) = \sup_{\substack{x \in W \\ \|l(x)\| \le \delta}} |L(x)|, \quad l(x) = (l_1(x), \ldots, l_n(x)).$$

Далее, при условии дифференцируемости в нуле по ε функций

$$\varphi_j(\varepsilon, \delta) = \sup_{x \in A_j(\varepsilon, \delta)} \operatorname{Re} L(x), \;\; \psi_j(\varepsilon, \delta) = \sup_{x \in A_j(i\varepsilon, \delta)} \operatorname{Re} L(x), \;\; j = 1, \ldots, n,$$

где $A_j(\varepsilon, \delta) = \{x \in W | \operatorname{Im} L(x) = 0, \;\; \|l(x) - \varepsilon e_j\| \le \delta\}$, $\{e_j\} = \delta_{kj}$, доказывается, что метод приближения

$$L(x) \approx \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\partial \varphi_j(0, \delta)}{\partial \varepsilon} - i \frac{\partial \psi_j(0, \delta)}{\partial \varepsilon} \right] \widetilde{l}_j(x)$$

будет единственным линейным наилучшим методом приближения функционала $L(x)$ по значениям функционалов $l_1(x), \ldots, l_n(x)$, заданных с погрешностью δ.

В § 2 устанавливаются аналогичные результаты для случая, когда линейные функционалы $L(x), l_1(x), \ldots, l_n(x)$ определены на вещественном линейном пространстве X.

Глава 2 посвящена вопросам, связанным с построением наилучших методов приближения аналитических функций, использующих информацию о конечном числе точных значений функций. Обозначим через $A_d(G)$ класс аналитических в односвязной области G функций $f(z)$, представимых в виде $f(z) = d(z)g(z)$, где $d(z)$ фиксированная аналитическая в области G функция, не обращающаяся в нуль, а $g(z)$ принадлежит классу аналитических и не превосходящих по модулю единицы в области G функций. Простейшим примером класса типа $A_d(G)$ является класс функций $A_M(G)$, аналитических и не превосходящих по модулю константы M. В § 3 строится наилучший на классе $A_d(G)$ метод приближения величины $f(z)$, $z \in G$ по значениям

$$f(z_1), \ldots, f^{(k_1)}(z_1), \ldots, f(z_n), \ldots, f^{(k_n)}(z_n), \text{ где } z_1, \ldots, z_n$$

различные точки из области G, и доказывается единственность построенного метода среди линейных наилучших методов. Для погрешности наилучшего метода $r(z, \underbrace{z_1, \ldots, z_1}_{k_1+1}, \ldots, \underbrace{z_n, \ldots, z_n}_{k_n+1})$ доказывается равенство

$$r(z, z_1, \ldots, z_n) = |d(z)| \prod_{j=1}^{n} \left| \frac{W(z) - W(z_j)}{1 - \overline{W(z_j)} W(z)} \right|^{k_j+1},$$

где $W(z)$ — какое-либо конформное отображение области G на внутренность единичного круга (область G считается не совпадающей со всей расширенной плоскостью или с расширенной плоскостью с одной выколотой точкой, т.к. в противном случае класс $A_d(G)$ состоит из функций, с точностью до постоянного множителя равных $d(z)$, и задача приближения решается точно).

Обозначим через H_p, $p > 0$, класс аналитических в $|z| < 1$ функций $f(z)$ таких, что для каждой из них интеграл $\displaystyle\int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})|^p \, d\varphi$ ограничен при $0 < r < 1$. Известно (см. [9], [5]), что каждая функция из класса H_p имеет почти всюду на $|z| = 1$ определенные предельные значения по некасательным путям, которые обозначаются через $f(e^{i\varphi})$. Пусть $\rho(\varphi)$ неотрицательная с периодом 2π функция такая, что $\ln \rho(\varphi)$ и $[\ln \rho(\varphi)]^p$, $p > 0$, суммируемы на $[0, 2\pi]$. Через H_p^ρ обозначим класс функций $f(z) \in H_p$, для которых почти всюду выполняется неравенство $|f(e^{i\varphi})| \leq \rho(\varphi)$. В § 4 показано, что класс H_p^ρ является классом типа $A_d(G)$, где $G = \{z : |z| < 1\}$, а $d(z) = e^{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \rho(\varphi) \frac{e^{i\varphi} + z}{e^{i\varphi} - z} \, d\varphi}$, и с помощью результатов, полученных в § 3, строится единственный линейный наилучший метод приближения для функций из класса H_p^ρ. Для симметричной относительно вещественной оси области G и аналитической функции $d(z)$, вещественной и положительной на вещественной оси, обозначим через $A_d^0(G)$ множество функций из $A_d(G)$, вещественных на вещественной оси. Для приближенного вычисления интеграла $\displaystyle\int_a^b f(x) p(x) \, dx$ на функциях из класса $A_d^0(G)$ в § 3 строится квадратурная формула, использующая значения $f(z_1), \ldots, f^{(k_1)}(z_1), \ldots, f(z_n), \ldots, f^{(k_n)}(z_n)$. Для погрешности построенной квадратурной формулы доказана оценка

$$(1)\quad r(\underbrace{z_1,\dots,z_1}_{k_1+1},\dots,\underbrace{z_n,\dots,z_n}_{k_n+1}) \le \int_a^b d(x)\prod_{j=1}^{l}\left|\frac{W(z)-W(z_j)}{1-W(z_j)W(z)}\right|^{k_j+1} \times\prod_{j=l+1}^{n}\left|\frac{W(z)-W(z_j)}{1-\overline{W(z_j)}W(z)}\right|^{2(k_j+1)} p(x)\,dx,$$

где $W(z)$ — какое-либо конформное отображение области G на внутренность единичного круга, переводящее точки вещественной оси в точки вещественной оси, а точки $z_1,\dots,z_n$ таковы, что

$$\operatorname{Im} z_j = 0,\quad j=1,\dots,l,\quad z_i\ne z_j,\quad l+1\le i,j\le n.$$

В случае, когда $k_j = 2k_j'+1$, $j=1,\dots,l$, доказано, что построенная квадратурная формула является наилучшим методом интегрирования на классе $A_d^0(G)$ и неравенство (1) обращается в равенство. Задачи, связанные с исследованием квадратурных формул на классе $A_M^0(G)$, рассматривались ранее Н.С. Бахваловым в работе [1].

В § 5 исследуется задача минимизации погрешности наилучшего на классе $A_d(G)$ метода приближения $r(z_1,\dots,z_n)$ на некотором замкнутом множестве $E\subset G$ со связным дополнением за счет выбора узлов $z_1,\dots,z_n$. Положим

$$(2)\qquad R_n(G,E) = \inf_{\{z_j\}\in G}\max_{z\in E} r(z_1,\dots,z_n),$$

$$(3)\qquad R_n^*(G,E) = \inf_{\{z_j\}\in E}\max_{z\in E} r(z_1,\dots,z_n).$$

Точки $z_1^0,\dots,z_n^0$, на которых достигается нижняя грань в равенствах (2) или (3), будем называть оптимальными узлами для соответствующей задачи. Для величин $R_n(G,E)$ и $R_n^*(G,E)$ доказываются следующие соотношения:

$$R_n^*(G,E)\ge R_n(G,E)\ge \min_{z\in E}|d(z)|e^{-nh(E,CG)},\quad n\ge 1,$$
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{R_n^*(G,E)} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{R_n(G,E)} = e^{-h(E,CG)};$$

здесь $h(E,CG)$ — модуль конденсатора, образованного множеством E и дополнением множества G.

В некоторых случаях для класса $A_M(G)$ задача нахождения величин $R_n(G,E)$, $R_n^*(G,E)$ и соответствующих оптимальных узлов может быть решена точно. Рассмотрению таких случаев посвящен § 6. В частности, в этом параграфе доказывается, что для эллипса $Э_c$ с фокусами в точках ±1 и суммой полуосей c справедливы равенства

$$R_n^*(\text{Э}_c,[-1,1]) = R_n(\text{Э}_c,[-1,1]) = 2Mc^{-n}\frac{\sum\limits_{m=0}^{\infty} c^{-4nm(m+1)}}{1+\sum\limits_{m=1}^{\infty} c^{-4nm^2}},$$

а оптимальными узлами являются узлы Чебышева $z_j^0 = \cos\dfrac{2j-1}{2n}\pi$, $j=1,\dots,n$.

В главе 3 исследуются задачи, связанные с построением наилучших методов приближения, использующих информацию о значениях функций, заданных с погрешностью. Одним из простейших методов приближения функции по ее значениям $f(x_1),\dots,f^{(k-1)}(x_1)$, $\dots,f(x_n),\dots,f^{(k-1)}(x_n)$ является интерполяционная формула Эрмита $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=0}^{k-1} P_{ij}(x)f^{(j)}(x_i)$, погрешность которой обычно оценивается на классе функций, имеющих непрерывную производную $f^{(nk)}(x)$, удовлетворяющую на некотором отрезке $[a,b]$ условию $\max\limits_{x\in[a,b]}|f^{(nk)}(x)| \le M$ (будем обозначать такой класс через $W^{(nk)}(M;a,b)$). В § 7 доказывается, что интерполяционная формула Эрмита, в которой вместо точных значений используются приближенные значения $\widetilde{f}^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(x_i) + \rho_{ij}(f)$, $i=1,\dots,n$, $j=0,\dots,k-1$, где векторы $\rho^j(f) = (\rho_{1j}(f),\dots,\rho_{nj}(f))$ при всех $f\in W^{(nk)}(M;a,b)$ удовлетворяют неравенству

$$\|\rho^j(f)\|_{p_j} \le \delta_j \quad \left(\|\rho\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n}|\rho_i|^p\right)^{1/p}, \quad 1\le p<\infty, \right.$$
$$\left. \|\rho\|_\infty = \max_{1\le i\le n}|\rho_i|\right),$$

для любых $\delta_1,\dots,\delta_{k-1}\ge 0$ будет единственным линейным наилучшим методом приближения величины $f(x)$ на классе $W^{(nk)}(M;a,b)$. Для погрешности наилучшего метода приближения в точке x доказывается равенство

$$r(x,\delta_1,\dots,\delta_{k-1}\underbrace{x_1,\dots,x_1}_{k},\dots,\underbrace{x_n,\dots,x_n}_{k}) = \frac{M}{(nk)!}\prod_{i=1}^{n}|x-x_i|^k$$
$$+\sum_{j=0}^{k-1}\delta_j\|\overline{P_j(x)}\|_{q_j},$$

где $\overline{P_j(x)} = (P_{1j}(x),\dots,P_{nj}(x))$, $\dfrac{1}{p_j}+\dfrac{1}{q_j}=1$.

Через $r(\delta, x_1, \ldots, x_n)$ обозначим погрешность наилучшего метода интегрирования для задачи приближенного вычисления интеграла $\int_a^b f(x)p(x)\,dx$ на классе $W^{(2n)}(M; a, b)$ по значениям $\widetilde{f}(x_i) = f(x_i) + \rho_i(f)$, $i = 1, \ldots, n$, где при всех $f \in W^{(2n)}(M; a, b)$ выполняется неравенство $\max\limits_{1 \le i \le n} |\rho_i(f)| \le \delta$. Наилучший метод интегрирования, использующий значения $\widetilde{f}(x_1^0), \ldots, \widetilde{f}(x_n^0)$, будем называть оптимальным, если имеет место равенство

$$r(\delta, x_1^0, \ldots, x_n^0) = \inf_{\{x_i\}} r(\delta, x_1, \ldots, x_n).$$

В § 3 доказывается, что единственным линейным методом интегрирования на классе $W^{(2n)}(M; a, b)$ является квадратурная формула Гаусса, в которой вместо точных значений используются значения $\widetilde{f}(x_1^0), \ldots, \widetilde{f}(x_n^0)$, а для погрешности оптимального метода интегрирования справедливо равенство

$$r(\delta, x_1^0, \ldots, x_n^0) = \frac{M}{(2n)!} \int_a^b \prod_{i=1}^n (x - x_i)^2 p(x)\,dx + \delta \int_a^b p(x)\,dx;$$

здесь $x_1^0, \ldots, x_n^0$ — узлы квадратуры Гаусса для веса $p(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Задаче построения наилучшего метода приближения на классе $A_d^0(G)$, использующего значения $\widetilde{f}(x_i) = f(x_i) + \rho_i(f)$, $i = 1, \ldots, n$, где при всех $f \in A_d^0(G)$ выполнено неравенство $\max\limits_{1 \le i \le n} |\rho_i(f)| \le \delta$, посвящен § 8. При некоторых условиях на малость δ в этом параграфе строится наилучший метод приближения величины $f(x)$ по значениям $\widetilde{f}(x_1), \ldots, \widetilde{f}(x_n)$, $x, x_1, \ldots, x_n \in G \cap \mathbb{R}$, и доказывается единственность построенного метода среди линейных наилучших методов приближения.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [6–8] и докладывались на семинарах факультета ВМК МГУ и механико-математического факультета МГУ.

В заключение автор глубоко признателен своему научному руководителю профессору Н.С. БАХВАЛОВУ за постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бахвалов Н.С. Об оптимальной скорости интегрирования аналитических функций. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 7, № 5 (1967), IOII–1020.
2. Бахвалов Н.С. Об оптимальности линейных методов приближения операторов на выпуклых классах функций. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 11, № 4 (1971), I014–I018.
3. Боянов Б.Д. Оптимальная скорость интегрирования и ε-энтропия одного класса аналитических функций. Матем. заметки, 14, № 1 (1973), 3–10.
4. Боянов Б.Д. Найлучшие методы интерполирования для некоторых классов дифференцируемых функций. Матем. заметки, I7, № 4 (1975), 511–524.
5. Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного, М., 1966.
6. Марчук А.Г., Осипенко К.Ю. Наилучшее приближение функций, заданных с погрешностью в конечном числе точек. Матем. заметки, I7, № 3 (1975), 359–368.
7. Осипенко К.Ю. Оптимальная интерполяция аналитических функций. Матем. заметки, 12, № 4 (1972), 465–476.
8. Осипенко К.Ю. Наилучшее приближение аналитических функций по информации об их значениях в конечном числе точек. Матем. заметки, 19, № 1 (1976) 29–40.
9. Привалов И.И. Граничные свойства аналитических функций, М.-Л., 1950.
10. Смоляк С.А. Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них, Кандид. дисс., МГУ, 1965.