Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
"МАТИ" - Российский государственный
технологический университет
им. К.Э.Циолковского

Кафедра "Высшая математика"

К. Ю. Осипенко

Теоремы отделимости в $\mathbb{R}^n$ и оптимальное восстановление

Москва 2006 г.

1. Выпуклые множества

Пусть $x, y \in \mathbb{R}^n$. *Отрезком* (*соединяющим* x *и* y) называется множество

$$[x, y] = \{\, z \in \mathbb{R}^n : z = (1-\alpha)x + \alpha y,\ 0 \le \alpha \le 1 \,\}.$$

Непустое множество $A \subset \mathbb{R}^n$ называется *выпуклым*, если вместе с любыми двумя своими точками x, y оно содержит отрезок $[x, y]$. Пустое множество считается выпуклым.

Пусть $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^n$. Вектор

$$x = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j x_j,$$

где

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j = 1, \quad \alpha_j \ge 0,\ j = 1, \ldots, k,$$

называется *выпуклой комбинацией* векторов $x_1, \ldots, x_k$.

Предложение 1. *Непустое выпуклое множество $A \subset \mathbb{R}^n$ содержит все выпуклые комбинации векторов из A.*

Доказательство. Будем доказывать это утверждение индукцией по числу слагаемых в выпуклой комбинации. Для двух слагаемых утверждение очевидно. Предположим, что утверждение доказано для k слагаемых. Пусть $x_1, \ldots, x_{k+1} \in A$ и

$$\sum_{j=1}^{k+1} \alpha_j = 1, \quad \alpha_j \ge 0,\ j = 1, \ldots, k+1.$$

Имеем

$$x = \sum_{j=1}^{k+1} \alpha_j x_j = \alpha_1 x_1 + (1-\alpha_1) y,$$

где

$$y = \sum_{j=2}^{k+1} \frac{\alpha_j}{1-\alpha_1} x_j.$$

Поскольку

$$\sum_{j=2}^{k+1} \frac{\alpha_j}{1-\alpha_1} = 1,$$

то по предположению индукции $y \in A$. Следовательно, $x \in A$. $\square$

Из доказанного утверждения вытекает, что наименьшим выпуклым множеством, содержащим произвольное непустое множество A, является множество всех выпуклых комбинаций векторов из A. Это множество называется *выпуклой оболочкой* A и обозначается $\operatorname{co} A$.

2. Аффинные многообразия

Пусть $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^n$. Вектор

$$x = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j x_j, \quad \alpha_j \in \mathbb{R},\ j = 1, \ldots, k,$$

называется *линейной комбинацией* векторов $x_1, \ldots, x_k$. Множество всех линейных комбинаций векторов из $A \subset \mathbb{R}^n$ называется *линейной оболочкой* A и обозначается через $\operatorname{span} A$. Вектор

$$x = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j x_j, \quad \sum_{j=1}^{k} \alpha_j = 1, \quad \alpha_j \in \mathbb{R},\ j = 1, \ldots, k, \tag{1}$$

называется *аффинной комбинацией* векторов $x_1, \ldots, x_k$. Множество всех аффинных комбинаций векторов из $A \subset \mathbb{R}^n$ называется *аффинной оболочкой* A и обозначается через $\operatorname{aff} A$.

Аффинным многообразием в $\mathbb{R}^n$ называется множество вида $x + L$, где $x \in \mathbb{R}^n$, а L — линейное подпространство $\mathbb{R}^n$. *Размерностью аффинного многообразия* называется размерность линейного подпространства L.

Предложение 2. *Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$. Тогда аффинная оболочка A является аффинным многообразием, причем*

$$\operatorname{aff} A = x_0 + \operatorname{span}(A - x_0), \quad x_0 \in A.$$

Доказательство. Пусть $x \in \operatorname{aff} A$ имеет вид (1). Тогда

$$x = x_0 + \sum_{j=1}^{k} \alpha_j (x_j - x_0) \in x_0 + \operatorname{span}(A - x_0).$$

Обратно, пусть $x \in x_0 + \operatorname{span}(A - x_0)$. Тогда

$$x = x_0 + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j (x_j - x_0) = (1 - \lambda_1 - \ldots - \lambda_k) x_0 + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x_j,$$

что является аффинной комбинацией векторов $x_0, x_1, \ldots, x_k$. $\square$

Если $A \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклое множество, то его размерностью называется размерность аффинной оболочки A

$$\dim A = \dim \operatorname{aff} A = \dim \operatorname{span}(A - x_0), \tag{2}$$

где x_0 — произвольный вектор из A.

Векторы $x_1, \ldots, x_{k+1}$ называются *аффинно независимыми*, если из того, что

$$\sum_{j=1}^{k+1} \lambda_j x_j = 0 \quad \text{и} \quad \sum_{j=1}^{k+1} \lambda_j = 0, \tag{3}$$

следует, что $\lambda_1 = \ldots = \lambda_{k+1} = 0$.

Предложение 3. *Векторы* $x_1, \ldots, x_{k+1}$ *аффинно независимы в том и только в том случае, если векторы* $x_j - x_1$, $2 \le j \le k+1$, *— линейно независимы.*

Доказательство. Пусть $x_1, \ldots, x_{k+1}$ аффинно независимы и

$$\sum_{j=2}^{k+1} \lambda_j (x_j - x_1) = 0. \tag{4}$$

Тогда

$$\sum_{j=2}^{k+1} \lambda_j x_j - \Big(\sum_{j=2}^{k+1} \lambda_j\Big) x_1 = 0. \tag{5}$$

Из аффинной независимости $x_1, \ldots, x_{k+1}$ вытекает, что $\lambda_2 = \ldots = \lambda_{k+1} = 0$.

Пусть теперь векторы $x_j - x_1$, $2 \le j \le k+1$, — линейно независимы и выполняются условия (3). Тогда имеет место равенство (5), которое эквивалентно равенству (4). Из линейной независимости векторов $x_j - x_1$, $2 \le j \le k+1$, получаем, что $\lambda_2 = \ldots = \lambda_{k+1} = 0$. Кроме того,

$$\lambda_1 = -\sum_{j=2}^{k+1} \lambda_j = 0.$$

□

Выпуклая оболочка аффинно независимых векторов $x_1, \ldots, x_{k+1}$ называется *k-мерным симплексом*, а векторы $x_1, \ldots, x_{k+1}$ — *вершинами симплекса.* Любой вектор из этого симплекса единственным образом представим в виде

$$x = \sum_{j=1}^{k+1} \lambda_j x_j, \quad \sum_{j=1}^{k+1} \lambda_j = 1, \quad \lambda_j \ge 0, \; j = 1, \ldots, k+1.$$

Числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_{k+1}$ называются барицентрическими координатами вектора x.

Одномерные симплексы — это отрезки, двумерные — треугольники, трехмерные — тетраэдры.

Если $A \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклое множество размерности $k \le n$, то оно содержит k-мерный симплекс. Действительно, в силу равенства (2) найдутся линейно независимые векторы $x_1 - x_0, \ldots, x_k - x_0$, $x_0, x_1, \ldots, x_k \in A$. Тогда из предложения 3 вытекает, что векторы $x_0, x_1, \ldots, x_k$ — аффинно независимы. Следовательно, симплекс с вершинами в этих точках содержится в A.

3. Внутренние точки

Точка $a \in A \subset \mathbb{R}^n$ называется *внутренней точкой* множества A, если существует такая окрестность этой точки, что она целиком лежит в A. Множество внутренних точек A обозначается через $\operatorname{int} A$.

Предложение 4. *Если $A \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклое множество размерности n, то* $\operatorname{int} A \neq \emptyset$.

Доказательство. Так как A содержит n-мерный симплекс, достаточно доказать, что n-мерный симплекс в $\mathbb{R}^n$ содержит внутреннюю точку. Пусть $a_0, a_1, \dots, a_n$ — вершины n-мерного симплекса. Без ограничения общности можно считать, что $a_0 = 0$. Покажем, что любая точка вида

$$x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_j, \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j < 1, \quad \lambda_j > 0,\ j = 1, \dots, n,$$

является внутренней. Пусть x_0 принадлежит открытому шару радиуса $\varepsilon > 0$

$$B_\varepsilon(0) = \{\, y \in \mathbb{R}^n : |y| < \varepsilon \,\}.$$

Тогда

$$x_0 = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k,$$

где e_k — стандартный базис в $\mathbb{R}^n$, причем $|x_k| < \varepsilon$, $k = 1, \dots, n$. В силу того, что $a_1, \dots, a_n$ — линейно независимы, каждый из векторов стандартного базиса может быть представлен в виде

$$e_k = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{jk} a_k, \quad k = 1, \dots, n.$$

Имеем

$$x + x_0 = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j a_j,$$

где

$$\gamma_j = \lambda_j + \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk} x_k, \quad j = 1, \dots, n.$$

В силу оценки

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk} x_k \right| \le \varepsilon \sum_{k=1}^{n} |\alpha_{jk}|$$

для достаточно малых $\varepsilon > 0$ при всех $x_0 \in B_\varepsilon(0)$ $\gamma_j > 0$, $j = 1, \dots, n$, и

$$\sum_{j=1}^{n} \gamma_j < 1.$$

тем самым все точки $x + x_0$ принадлежат симплексу. $\square$

Обозначим через ∂A — граничные точки множества A. Через $\operatorname{cl} A$ будем обозначать замыкание множества A, т.е. множество всех предельных точек A.

Предложение 5. *Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклое множество, $x \in \operatorname{int} A$ и $\widehat{x} \in \partial A$. Тогда $\lambda(\widehat{x} - x) \notin \operatorname{cl} A$ для всех $\lambda > 1$.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что внутренняя точка множества A совпадает с началом координат, т.е., что $x = 0$. Это означает, что существует такое число $r > 0$, что все точки, для которых $|a| < r$, принадлежат A. Предположим противное, т.е., что $\lambda\widehat{x} \in \operatorname{cl} A$ при некотором $\lambda > 1$. Тогда в любой окрестности точки $\lambda\widehat{x}$ должна найтись точка из A. Пусть $\xi \in A$ и

$$|\lambda\widehat{x} - \xi| < (\lambda - 1)\frac{r}{2}.$$

Докажем, что любая точка из окрестности точки $\widehat{x}$ радиуса $(\lambda - 1)\lambda^{-1}r/2$ лежит в A (тем самым $\widehat{x}$ не является граничной точкой). Пусть y — произвольная точка, для которой

$$|y - \widehat{x}| < \frac{\lambda - 1}{\lambda}\frac{r}{2}.$$

Положим

$$a_0 = \frac{\lambda}{\lambda - 1}y - \frac{1}{\lambda - 1}\xi.$$

Имеем

$$|a_0| \leq \frac{\lambda}{\lambda - 1}|y - \widehat{x}| + \frac{1}{\lambda - 1}|\lambda\widehat{x} - \xi| < r,$$

Поэтому $a_0 \in A$. С другой стороны,

$$y = (1 - \lambda^{-1})a_0 + \lambda^{-1}\xi \in A.$$

□

4. Теоремы отделимости

Пусть $x' = (x'_1, \ldots, x'_n) \in \mathbb{R}^n$ и $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Через $x' \cdot x$ будем обозначать стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$

$$x' \cdot x = \sum_{j=1}^{n} x'_j x_j.$$

Гиперплоскостью H в $\mathbb{R}^n$ называется множество точек $x \in \mathbb{R}^n$, для которых $x' \cdot x = \gamma$, где $x' \in \mathbb{R}^n$, $x' \neq 0$, а $\gamma \in \mathbb{R}$. Каждая гиперплоскость H порождает два полупространства

$$H_+ = \{\, x \in \mathbb{R}^n : x' \cdot x \geq \gamma \,\}, \quad H_- = \{\, x \in \mathbb{R}^n : x' \cdot x \leq \gamma \,\}.$$

Говорят, что точка $b \in \mathbb{R}^n$ *отделима* от множества $A \subset \mathbb{R}^n$, если существует такая гиперплоскость H, что b и A лежат в разных полупространствах. Иными словами, точка b отделима от A, если существует такой элемент $x' \in \mathbb{R}^n$, $x' \neq 0$, что при всех $a \in A$

$$x' \cdot a \leq x' \cdot b.$$

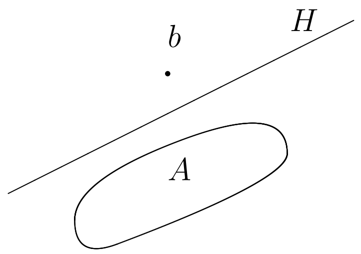

Рис. 1

Теорема 1. *Пусть A — выпуклое множество и $b \notin \operatorname{cl} A$. Тогда точка b отделима от A.*

Доказательство. Положим

$$B_r(b) = \{ x \in \mathbb{R}^n : |x - b| \leq r \}.$$

Существует r, при котором $A_1 = \operatorname{cl} A \cap B_r(b) \neq \emptyset$. Функция $f(x) = |x - b|$ является непрерывной на ограниченном замкнутом множестве A_1 и, следовательно, по теореме Вейерштрасса достигает своего минимума в некоторой точке $\widehat{x}$. Иными словами, точка $\widehat{x}$ — ближайшая к b из множества A_1, а значит и из множества $\operatorname{cl} A$. Положим $x' = \widehat{x} - b$ и рассмотрим гиперплоскость $x' \cdot x = x' \cdot \widehat{x}$. Докажем, что эта гиперплоскость отделяет b от A. Имеем

$$x' \cdot b = x' \cdot (\widehat{x} - x') = x' \cdot \widehat{x} - |x'|^2 < x' \cdot \widehat{x}.$$

Остается доказать, что $x' \cdot a \geq x' \cdot \widehat{x}$ для всех $a \in A$. Предположим, что нашлась точка $a_0 \in A$, для которой $x' \cdot a_0 < x' \cdot \widehat{x}$. Так как $\operatorname{cl} A$ — тоже выпуклое множество, $(1-t)\widehat{x} + ta_0 \in \operatorname{cl} A$ при всех $t \in [0, 1]$. Имеем

$$|(1-t)\widehat{x} + ta_0 - b|^2 = |x' + t(a_0 - \widehat{x})|^2 = |x'|^2 + 2t\alpha + t^2|a_0 - \widehat{x}|^2,$$

где $\alpha = x' \cdot (a_0 - \widehat{x}) < 0$. Поэтому при достаточно малых t

$$|(1-t)\widehat{x} + ta_0 - b|^2 < |x'|^2 = |\widehat{x} - b|^2,$$

что противоречит тому, что $\widehat{x}$ — ближайшая точка к b из точек множества $\operatorname{cl} A$. $\square$

Лемма 1. *Если $A \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклое множество и $\dim A < n$, то существует гиперплоскость H такая, что $A \subset H$.*

Доказательство. Пусть $\operatorname{aff} A = x_0 + \operatorname{span}(x_1, \ldots, x_k)$, $k < n$. Тогда существует $x' \in \mathbb{R}^n$ такой, что $x' \neq 0$ и $x' \cdot x_j = 0$, $j = 1, \ldots, k$. Гиперплоскость $x' \cdot x = x' \cdot x_0$ содержит множество A. $\square$

Теорема 2. *Пусть A — выпуклое множество и $b \in \partial A$. Тогда точка b отделима от A.*

Доказательство. Если $\dim A < n$, то по лемме 1 существует гиперплоскость $x' \cdot x = \gamma$, содержащая A. Очевидно, что $x' \cdot b = \gamma$. Поэтому эта гиперплоскость отделяет b от A.

Предположим , что $\dim A = n$. Тогда по предложению 4 у A есть внутренняя точка, а из предложения 4 следует, что существует последовательность точек $b_k \notin \operatorname{cl} A$ такая, что $b_k \to b$ при $k \to \infty$ (достаточно положить $b_k = (1+1/k)(b - x_0)$, $k = 1, 2, \ldots$, где x_0 — внутренняя точка A). Из теоремы 1 вытекает, что точки b_k можно отделить от A, т.е. существуют $x'_k \in \mathbb{R}^n$, $x'_k \neq 0$, $k = 1, 2, \ldots$, такие, что для всех $a \in A$

$$x'_k \cdot a \leq x'_k \cdot b_k. \tag{6}$$

Разделив на $|x'_k|$, можно считать, что $|x'_k| = 1$. Поскольку сфера

$$\mathbb{S}^{n-1} = \{\, y \in \mathbb{R}^n : |y| = 1 \,\}$$

ограничена и замкнута, найдется подпоследовательность $x'_{k_s} \to x'$ при $s \to \infty$, причем $|x'| = 1$ (т.е. $x' \neq 0$). Переходя к пределу по этой подпоследовательности в неравенстве (6), получим

$$x' \cdot a \leq x' \cdot b$$

для всех $a \in A$. □

Множество $A \subset \mathbb{R}^n$ называется *центрально-симметричным*, если из того, что $x \in A$, следует, что $-x \in A$.

Теорема 3. *Пусть A — выпуклое центрально симметричное множество из $\mathbb{R}^{n+1}$ и*

$$b = \sup_{(0,\ldots,0,a_{n+1}) \in A} a_{n+1} < \infty. \tag{7}$$

Тогда существуют такие числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, что для всех $(a_1, \ldots, a_{n+1}) \in A$ имеет место неравенство

$$\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n + a_{n+1} \leq b. \tag{8}$$

Доказательство. Будем доказывать эту теорему индукцией по n. Пусть сначала $n = 1$. Так как точка $(0, b) \in \partial A$, то по теореме 2 существует гиперплоскость (прямая), отделяющая эту точку от множества A, т.е. существует вектор $(x'_1, x'_2) \neq 0$ такой, что

$$x'_1 a_1 + x'_2 a_2 \leq x'_2 b \tag{9}$$

для всех $(a_1, a_2) \in A$. Если $x'_2 > 0$, то разделив на x'_2, мы придем к виду (8). Если $x'_2 < 0$, то разделив на x'_2, мы придем к виду

$$\alpha_1 a_1 + a_2 \geq b. \tag{10}$$

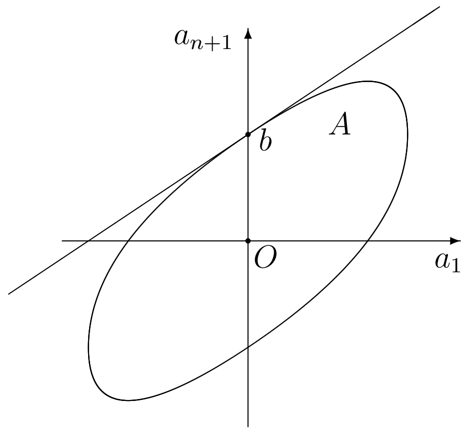

Рис. 2

Поскольку $(0,0) \in A$, то из этого неравенства следует, что $b \le 0$. Тем самым (см. (7)) $b = 0$. Подставив в (10) вместо (a_1, a_2) точку $(-a_1, -a_2)$ и умножив полученное неравенство на -1, придем к виду

$$-\alpha_1 a_1 + a_2 \le 0,$$

что соответствует (8) при $b = 0$. Предположим теперь, что $x'_2 = 0$. Тогда из (9) вытекает, что

$$x'_1 a_1 \le 0.$$

В силу центральной симметрии множества A это означает, что $a_1 = 0$ для точек $(a_1, a_2) \in A$. Следовательно, неравенство (8) выполнено для любого α_1.

Пусть утверждение теоремы доказано для всех $k \le n-1$. Докажем его для $k = n$. Поскольку точка $(0, \ldots, 0, b) \in \partial A$, по теореме 2 найдется вектор $x' = (x'_1, \ldots, x'_{n+1}) \ne 0$ такой, что для всех $a \in A$

$$x' \cdot a \le x'_{n+1} b. \tag{11}$$

Если $x'_{n+1} \ne 0$, то рассуждения, аналогичные проведенным для $n = 2$, сразу приводят к неравенству (8). Предположим, что $x'_{n+1} = 0$. Тогда из неравенства (11) с учетом центральной симметрии следует, что множество A лежит в подпространстве $x' \cdot x = 0$. Выберем в этом подпространстве ортонормированный базис $f_1, \ldots, f_n$, взяв в качестве $f_n = e_{n+1} = (0, \ldots, 0, 1)$ (в силу того, что $x'_{n+1} = 0$, e_{n+1} принадлежит этому подпространству). Из предположения индукции следует, что в этом подпространстве (размерность которого $n-1$) найдутся $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{R}$ такие, что для точек $\widetilde{a}_1 f_1 + \ldots + \widetilde{a}_n f_n \in A$ имеет место неравенство

$$\alpha_1 \widetilde{a}_1 + \ldots + \alpha_{n-1} \widetilde{a}_{n-1} + \widetilde{a}_n \le b.$$

Выразив координаты $\widetilde{a}_1, \dots, \widetilde{a}_n$ через координаты $a_1, \dots, a_{n+1}$, учитывая, что $\widetilde{a}_n = a_{n+1}$, а $\widetilde{a}_j$, $j = 1, \dots, n-1$, линейно выражаются через $a_1, \dots, a_n$, приходим к виду (8). $\square$

5. Оптимальное восстановление линейного функционала

Пусть X — линейное пространство, $W \subset X$, $L, l_1, \dots, l_n$ — линейные функционалы на X. Ставится задача восстановления функционала L на множестве W по значениям функционалов $l_1, \dots, l_n$, заданным с некоторой погрешностью. Будем считать, что для каждого $x \in W$ известен вектор $y = (y_1, \dots, y_n)$ такой, что

$$\|Ix - y\| \le \delta,$$

где $Ix = (l_1 x, \dots, l_n x)$, $\|\cdot\|$ — некоторая норма в $\mathbb{R}^n$, а $\delta > 0$ — погрешность задания исходных данных.

В качестве *методов восстановления* рассматриваются всевозможные отображения $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Для данного метода φ его *погрешностью* называется величина

$$e(W, L, I, \delta, \varphi) = \sup_{\substack{x \in W,\ y \in \mathbb{R}^n \\ \|Ix - y\| \le \delta}} |Lx - \varphi(y)|.$$

Погрешностью оптимального восстановления называется величина

$$E(W, L, I, \delta) = \inf_{\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}} e(W, L, I, \delta, \varphi),$$

а метод, на котором достигается нижняя грань называется *оптимальным методом восстановления.*

Теорема 4. *Пусть W — выпуклое центрально-симметричное множество. Тогда*

$$E(W, L, I, \delta) = \sup_{\substack{x \in W \\ \|Ix\| \le \delta}} |Lx|, \tag{12}$$

а среди оптимальных методов восстановления существует линейный, т.е. метод вида

$$\varphi(y) = \sum_{j=1}^n c_j y_j.$$

Доказательство. 1. Оценка снизу. Пусть $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — произвольный метод восстановления. Для всех $x \in W$ таких, что $\|Ix\| \le \delta$, имеем

$$\begin{aligned} 2|Lx| &= |Lx - \varphi(0) - (L(-x) - \varphi(0)| \\ &\le |Lx - \varphi(0)| + |(L(-x) - \varphi(0)| \le 2e(W, L, I, \delta, \varphi). \end{aligned}$$

Отсюда

$$e(W, L, I, \delta, \varphi) \geq \sup_{\substack{x \in W \\ \|Ix\| \leq \delta}} |Lx|.$$

Следовательно,

$$E(W, L, I, \delta) \geq \sup_{\substack{x \in W \\ \|Ix\| \leq \delta}} |Lx|.$$

2. Оценка сверху. Рассмотрим в $\mathbb{R}^{n+1}$ множество точек

$$A = \{\, (y_1, \ldots, y_{n+1}) : \|Ix - y\| \leq \delta.\ y_{n+1} = Lx, \\ x \in W,\ y = (y_1, \ldots, y_n)\,\}.$$

Легко убедиться, что A — выпуклое центрально-симметричное множество. Положим

$$b = \sup_{(0,\ldots,0,y_{n+1}) \in A} y_{n+1} = \sup_{\substack{x \in W \\ \|Ix\| \leq \delta}} |Lx|.$$

Из теоремы 3 следует, что существуют такие числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, что для всех $(y_1, \ldots, y_{n+1}) \in A$ имеет место неравенство

$$\alpha_1 y_1 + \ldots + \alpha_n y_n + y_{n+1} \leq b. \tag{13}$$

Так как $(-y_1, \ldots, -y_{n+1}) \in A$, то имеет место также неравенство

$$-\alpha_1 y_1 - \ldots - \alpha_n y_n - y_{n+1} \leq b. \tag{14}$$

Из (13) и (14) следует, что

$$|y_{n+1} + \alpha_1 y_1 + \ldots + \alpha_n y_n| \leq b$$

для всех $(y_1, \ldots, y_{n+1}) \in A$. Это означает, что для всех $x \in W$ и $y \in \mathbb{R}^n$ таких, что $\|Ix - y\| \leq \delta$ справедливо неравенство

$$|Lx - \varphi(y)\| \leq b,$$

где

$$\varphi(y) = -\alpha_1 y_1 - \ldots - \alpha_n y_n.$$

Тем самым

$$E(W, L, I, \delta) \leq e(W, L, I, \delta, \varphi) \leq b,$$

что доказывает равенство (12) и оптимальность метода φ. $\square$