ОПТИМАЛЬНАЯ ЭКСТРАПОЛЯЦИЯ ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ С ОШИБКОЙ

КОНСТАНТИН Ю. ОСИПЕНКО

Рассматривается задача оптимального восстановления значения функции из класса W_∞^n в точке $t_0 \notin [-1,1]$ по приближенным значениям этой функции в точках отрезка $[-1,1]$.

1. Введение. Обозначим через W_∞^n класс функций, определенных на отрезке $[a,b] \supset [-1,1]$, имеющих там абсолютно непрерывную производную $(n-1)$-го порядка и удовлетворяющих условию

$$\operatorname*{supvrai}_{t\in[a,b]} |x^{(n)}(t)| \le 1.$$

Пусть в некоторой системе различных точек $t_1,\dots,t_m$ из отрезка $[-1,1]$ известны значения функций из класса W_∞^n с погрешностью δ, т.е. для любой функции $x \in W_\infty^n$ известны значения $x_1,\dots,x_m$ такие, что $|x(t_i)-x_i| \le \delta$, $i=1,\dots,m$.

Погрешностью наилучшего восстановления в точке $t_0 \in [a,b]$ называется величина

$$r_n(t_0,t_1,\dots,t_m,\delta) = \inf_S \sup_{x\in W_\infty^n} \sup_{\substack{x_1,\dots,x_m \\ |x(t_i)-x_i|\le\delta,\ i=1,\dots,m}} |x(t_0)-S(x_1,\dots,x_m)|, \tag{1.1}$$

где нижняя грань берется по всевозможным функциям (методам) $S\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$. Метод, на котором достигается нижняя грань, называется наилучшим.

Под задачей оптимальной экстраполяции по m значениям в точке $t_0 \in (1,b]$ будем понимать задачу нахождения величины

$$R_{mn}(t_0,\delta) = \inf_{t_1,\dots,t_m\in[-1,1]} r_n(t_0,t_1,\dots,t_m,\delta), \tag{1.2}$$

а также точек, на которых достигается нижняя грань, называемых оптимальными точками экстраполяции. Наилучший метод по оптимальной системе точек назовем оптимальным.

Кроме того, рассмотрим задачу о нахождении величины

$$R_n(t_0,\delta) = \inf_m R_{mn}(t_0,\delta) \tag{1.3}$$

и минимального из чисел m, на которых достигается нижняя грань в равенстве (1.3), носящего название порядка информативности отрезка $[-1,1]$ для данных t_0, δ и обозначаемого через $I_n(t_0,\delta)$.

Задача (1.1) была поставлена и исследовалась в работах [1, 2], а задачи (1.2), (1.3) были поставлены изучались для класса ограниченных аналитических функций в работах [3,4].

2. Оптимальная экстраполяция и золотаревские сплайны. При решении задач (1.2) и (1.3) существенную роль играют золотаревские идеальные сплайны, поэтому нам потребуется ряд предварительных сведений, касающихся этих сплайнов.

Идеальным сплайном на отрезке $[-1, 1]$ степени n с k узлами $-1 < \xi_1 < \ldots < \xi_k < 1$ называется функция вида

$$P(t) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i t^i + c\left[t^n + 2\sum_{j=1}^{k}(-1)^j (t-\xi_j)_+^n\right],$$

где

$$t_+^n = \begin{cases} t^n, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Будем говорить, что функция $x \in C[-1, 1]$ имеет l точек альтернанса (l-альтернанс), если существуют точки $-1 \leq t_1 < \ldots < t_l \leq 1$ такие, что

$$x(t_i) = (-1)^i \varepsilon \|x\|,$$

где $\varepsilon = 1$ или $\varepsilon = -1$, а $\|x\| = \max_{t\in[-1,1]} |x(t)|$.

Теорема 1 ([5]). *При всех n и $m \geq n$ существует единственный идеальный сплайн на отрезке $[-1, 1]$ x_{mn} степени n, имеющий $m-n$ узлов и $m+1$-альтернанс, нормированный условиями $x_{mn}(1) > 0$, $|x_{mn}^{(n)}(t)| = 1$.*

Сплайны x_{mn} называются чебышевскими идеальными сплайнами, а

$$x_{nn}(t) = \frac{1}{2^{n-1}n!} T_n(t),$$

где $T_n(t) = \cos(n \arccos t)$ — многочлен Чебышева.

Положим

$$\delta_{nm} = \|x_{mn}\|.$$

Известно (см. [6, с. 138, 135], [7]), что величины δ_{nm} при фиксированном n монотонно убывают и стремятся к нулю, кроме того, при $m \to \infty$

$$\delta_{nm} = \left(\frac{2}{\pi m}\right)^n K_n(1 + o(1)),$$

где K_n — константа Фавара. Для $n = 1, 2, 3, m$ имеет место равенство

$$\delta_{nm} = \left(m - n + \frac{4}{\pi}\sqrt[n]{\frac{K_n n!}{2}}\right)^{-n} \left(\frac{2}{\pi}\right)^n K_n. \tag{2.1}$$

Пусть $t_i = \dfrac{2i}{m} - 1$, $i = 1, \ldots, m-1$, $t_0 = -\infty$, $t_m = +\infty$. Положим

$$\varphi_{m0}(t) = (-1)^{m+i}, \quad t_{i-1} < t < t_i, \quad i = 1, \ldots, m,$$

$$\varphi_{mn}(t) = \int_{\gamma_{mn}}^{t} \varphi_{m,n-1}(u)\,du, \quad \gamma_{mn} = \begin{cases} \dfrac{1}{m} - 1, & n = 2k+1, \\ -1, & n = 2k. \end{cases}$$

Функции $\varphi_{mn}(t)$ называются эйлеровыми идеальными сплайнами (подробнее см., например, [8, с. 9, 64]). Известно, что

$$\|\varphi_{mn}\| = \left(\frac{2}{\pi m}\right)^n K_n.$$

Нетрудно показать, что при $n = 1, 2, 3$

$$\max_{|t| \le 1 + \frac{\varepsilon_n}{m}} |\varphi_{mn}(t)| = \|\varphi_{mn}\|,$$

где

$$\varepsilon_n = \frac{4}{\pi} \sqrt[n]{\frac{K_n n!}{2}} - 1 \quad (\varepsilon_1 = 0, \quad \varepsilon_2 = \sqrt{2} - 1, \quad \varepsilon_3 = 1).$$

В случае, когда $n = 1, 2, 3$, чебышевский идеальный сплайн может быть записан в виде

$$x_{mn}(t) = \left(1 + \frac{\varepsilon_n}{m-n+1}\right)^{-n} \varphi_{m-n+1,n}\left[\left(1 + \frac{\varepsilon_n}{m-n+1}\right) t\right]. \tag{2.2}$$

При этом его точки альтернанса имеют вид

$$t_{kn}^{(m)} = \frac{2k - m}{m - n + 1 + \varepsilon_n}, \quad k = 1, \ldots, m-1, \quad t_{mn}^{(m)} = -t_{0n}^{(m)} = 1.$$

В общем случае в силу ряда экстремальных свойств чебышевских и эйлеровых идеальных сплайнов (см. [8, с. 265, 267]) имеют место неравенства

$$\|\varphi_{m+1,n}\| \le \|x_{mn}\| \le \|\varphi_{m-n+1,n}\|. \tag{2.3}$$

Теорема 2 ([6, с. 138], [7])**.** *При $\delta \in (\delta_{mn}, \delta_{m-1,n})$ и $m \ge n$ ($\delta_{n-1,n} = +\infty$) существует единственный сплайн $Z_n(t, \delta)$ порядка n, удовлетворяющий условиям:*

1) *$Z_n(t, \delta)$ имеет $m - n$ узлов,*
2) *$Z_n(t, \delta)$ имеет m-альтернанс,*
3) *$\|Z_n(\cdot, \delta)\| = \delta$, $|Z_n^{(n)}(t, \delta)| \equiv 1$, $Z_n(1, \delta) = \delta$, $Z_n^{(n)}(1, \delta) = 1$.*

Положим $Z_n(t, \delta_{mn}) = x_{mn}(t)$. Тогда идеальный сплайн $Z_n(t, \delta)$ определен при всех $\delta > 0$. Он носит название золотаревского идеального сплайна и при $\delta > \delta_{nn}$ пропорционален многочлену Золотарева степени n (см. [9, с. 314], [10]).

Теорема 3 ([2]). *Пусть $P(t)$ — идеальный сплайн на отрезке $[-1,1]$ степени n с $m-n$ узлами $(m\ge n)$ такой, что $|P^{(n)}(t)|\equiv 1$, $|P^{(n)}(1)|=1$, и для некоторой системы точек $-1\le t_1<\ldots<t_m\le 1$*

$$P(t_i)=(-1)^{m+i}\delta.$$

Тогда для любой функции $x\in W^n_\infty$, удовлетворяющей условиям $|x(t_i)|\le\delta$, $i=1,\ldots,m$, при всех $t\in[t_m,b]$, справедливо неравенство

$$|x(t)|\le P(t).$$

Золотаревские идеальные сплайны появляются при решении многих экстремальных задач (см. [5–7, 11]). Они являются экстремальными также в следующих задачах.

Теорема 4. *Пусть $\delta\in[\delta_{mn},\delta_{m-1,n})$ и $t_{1n}(\delta),\ldots,t_{mn}(\delta)=1$ — точки альтернанса функции $Z_n(t,\delta)$. Тогда для любого $t_0\in[1,b]$ и $k\ge m$*

$$\begin{aligned}\sup_{\substack{x\in W^n_\infty\\ \|x\|\le\delta}}|x(t_0)|&=\inf_{t_i\in[-1,1]}\sup_{\substack{x\in W^n_\infty\\ |x(t_i)|\le\delta,\ i=1,\ldots,k}}|x(t_0)|\\&=\sup_{\substack{x\in W^n_\infty\\ |x(t_{in}(\delta))|\le\delta,\ i=1,\ldots,m}}|x(t_0)|=Z_n(t_0,\delta).\end{aligned}\tag{2.4}$$

Кроме того, при всех $\delta>0$ число точек альтернанса функции $Z_n(t,\delta)$ (без учета точки -1, когда $\delta=\delta_{mn}$) удовлетворяет неравенству

$$\frac{2}{\pi}\left(\frac{K_n}{\delta}\right)^{1/n}-1\le m<\frac{2}{\pi}\left(\frac{K_n}{\delta}\right)^{1/n}+n.\tag{2.5}$$

Доказательство. В силу того, что для любой системы точек $t_1,\ldots,t_k\in[-1,1]$ справедливо неравенство

$$\sup_{\substack{x\in W^n_\infty\\ \|x\|\le\delta}}|x(t_0)|\le\sup_{\substack{x\in W^n_\infty\\ |x(t_i)|\le\delta,\ i=1,\ldots,k}}|x(t_0)|,$$

учитывая свойства $Z_n(t_0,\delta)$ и теорему 3, имеем

$$\begin{aligned}Z_n(t_0,\delta)\le\sup_{\substack{x\in W^n_\infty\\ \|x\|\le\delta}}|x(t_0)|&\le\inf_{t_i\in[-1,1]}\sup_{\substack{x\in W^n_\infty\\ |x(t_i)|\le\delta,\ i=1,\ldots,k}}|x(t_0)|\\&\le\sup_{\substack{x\in W^n_\infty\\ |x(t_{in}(\delta))|\le\delta,\ i=1,\ldots,m}}|x(t_0)|=Z_n(t_0,\delta).\end{aligned}$$

Пусть теперь δ — произвольное положительное число. Существует такое m, что $\delta\in[\delta_{mn},\delta_{m-1,n})$. Число точек альтернанса функции $Z_n(t,\delta)$ в этом случае (без учета -1) равно m. Из неравенства (2.3) имеем

$$\delta\ge\delta_{mn}\ge\|\varphi_{m+1,n}\|=\left[\frac{2}{\pi(m+1)}\right]^n K_n.$$

Отсюда получаем левое из неравенств (2.5). При $m = n$ правое из неравенств (2.3) очевидно, а в случае, когда $m > n$, оно вытекает из соотношений

$$\delta < \delta_{m-1,n} \leq \|\varphi_{m-n,n}\| = \left[\frac{2}{\pi(m-n)}\right]^n K_n.$$

Теорема доказана. □

Теорема 5. *Пусть $\delta \in [\delta_{mn}, \delta_{m-1,n})$. Тогда для любого $t_0 \in (1, b]$ и $k \geq m$*

$$R_{kn}(t_0,\delta) = R_n(t_0,\delta) = r_n(t_0, t_{1n}(\delta), \ldots, t_{mn}(\delta), \delta) = Z_n(t_0,\delta), \tag{2.6}$$

а для порядка информативности справедливы неравенства

$$n \leq I_n(t_0,\delta) \leq m. \tag{2.7}$$

При всех $\delta > 0$

$$n \leq I_n(t_0,\delta) < \frac{2}{\pi}\left(\frac{K_n}{\delta}\right)^{1/n} + n. \tag{2.8}$$

Доказательство. Из работы [1] следует равенство

$$r_n(t_0, t_1, \ldots, t_k, \delta) = \sup_{\substack{x \in W^n_\infty \\ |x(t_i)| \leq \delta,\ i=1,\ldots,k}} |x(t_0)|,$$

которое вместе с (2.4) дает равенства (2.6). Правое из неравенств (2.7) следует из (2.6), а левое — следствие того, что при $k < n$ для любой системы точек $t_1, \ldots, t_k \in [-1, 1]$ и $t_0 \in (1, b]$

$$\sup_{\substack{x \in W^n_\infty \\ |x(t_i)| \leq \delta,\ i=1,\ldots,k}} |x(t_0)| = \infty.$$

Неравенства (2.8) вытекают из (2.7) и (2.5). Теорема доказана. □

3. Некоторые частные случаи. Рассмотрим задачу оптимальной экстраполяции (1.2), когда $m = n$.

Теорема 6. *Для всех $t_0 \in (1, b]$ имеет место равенство*

$$R_{nn}(t_0,\delta) = \begin{cases} \dfrac{\delta}{2}\left[\dfrac{H^n\left(\dfrac{K}{n} - u_0\right)}{H^n\left(\dfrac{K}{n} + u_0\right)} + \dfrac{H^n\left(\dfrac{K}{n} + u_0\right)}{H^n\left(\dfrac{K}{n} - u_0\right)}\right], & \delta > \Delta_n, \\ \delta T_n\left[\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{\delta n!}\right)^{1/n}(t_0 - 1) + 1\right], & 0 < \delta \leq \Delta_n, \end{cases} \tag{3.1}$$

где $\Delta_n^{-1} = 2^{n-1}n!\cos^{2n}\dfrac{\pi}{2n}$, *при этом единственными оптимальными узлами при* $0 < \delta \le \Delta_n$ *являются узлы*

$$t_j = 1 - 4\left(\frac{\delta n!}{2}\right)^{1/n}\cos^2\frac{\pi j}{2n}, \quad j = 1, \dots, n,$$

а при $\delta > \Delta_n$ *узлы* $t_1, \dots, t_n$ *определяются из равенств (эти же равенства определяют* u_0*)*

$$t_j = \frac{\operatorname{sn}^2\dfrac{K}{n} + \operatorname{sn}^2 u_j}{\operatorname{sn}^2\dfrac{K}{n} - \operatorname{sn}^2 u_j}, \quad j = 0, 1, \dots, n,$$

где $u_1, \dots, u_n$ *таковы, что*

$$\arg\frac{H\left(\dfrac{K}{n} + u_j\right)}{H\left(\dfrac{K}{n} - u_j\right)} = \pi\left(1 - \frac{j}{n}\right), \quad j = 1, \dots, n;$$

здесь K *— полный эллиптический интеграл первого рода для модуля, однозначно определяемого из уравнения*

$$\frac{1}{2^{n-1}n!}\left[\frac{H_1(0)\theta_1(0)}{H_1\left(\dfrac{K}{n}\right)\theta_1\left(\dfrac{K}{n}\right)}\right]^{2n} = \delta,$$

H, H_1 *и* θ_1 *— стандартные обозначения тета-функций. Оптимальным методом является метод*

$$x(t_0) \approx \sum_{j=1}^{n}\frac{\omega_j(t_0)}{\omega_j(t_j)}x_j, \tag{3.2}$$

где

$$\omega_j(t) = \frac{\omega(t)}{t - t_j}, \quad \omega(t) = \prod_{j=1}^{n}(t - t_j).$$

Доказательство. Из работы [1] следует, что для любой системы различных точек $t_1, \dots, t_n \in [a, b]$ имеет место равенство

$$r_n(t_0, t_1, \dots, t_n, \delta) = \frac{|\omega(t_0)|}{n!} + \delta\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\omega_j(t_0)}{\omega_j(t_j)}\right|, \tag{3.3}$$

причем наилучшим методом является метод (3.2). Обозначим через $\varphi(\bar{t})$, $\bar{t} = (t_1, \dots, t_n)$, функцию, стоящую в правой части равенства

(3.3). Тогда для $\bar{t} \in D = \{(t_1, \ldots, t_n) : -1 \le t_1 < \ldots < t_n \le 1\}$ и $t_0 \in (1, b]$ имеем

$$\varphi(\bar{t}) = \frac{\omega(t_0)}{n!} + \delta \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n+j} \frac{\omega_j(t_0)}{\omega_j(t_j)}.$$

Функция $\varphi(\bar{t})$ непрерывна при $\bar{t} \in D$ и $\varphi(\bar{t}) \to +\infty$ при $t_i \to t_j$. Следовательно, существует точка, в которой функция $\varphi(\bar{t})$ достигает своей нижней грани. В экстремальной точке $-1 < t_1 < \ldots < t_n < 1$ должны выполняться соотношения

$$\frac{\partial \varphi(\bar{t})}{\partial t_j} = 0, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{3.4}$$

Если $t_1 = -1$ или $t_n = 1$, то соответствующее равенство из (3.4) заменяется на неравенство

$$\frac{\partial \varphi(\bar{t})}{\partial t_1} \ge 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial \varphi(\bar{t})}{\partial t_n} \le 0.$$

Для данной экстремальной точки $-1 \le t_1 < \ldots < t_n \le 1$ рассмотрим многочлен степени n

$$p_n(t) = \frac{\omega(t)}{n!} + \delta \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n+j} \frac{\omega_j(t)}{\omega_j(t_j)}.$$

Непосредственным вычислением можно убедиться, что

$$p_n'(t_j) = -\frac{\omega_j(t_j)}{\omega_j(t_0)} \frac{\partial \varphi(\bar{t})}{\partial t_j}.$$

При $t > t_n$ $p_n(t) > \delta$, поэтому $p_n'(t_n) > 0$, и следовательно, $\dfrac{\partial \varphi(\bar{t})}{\partial t_n} < 0$. Таким образом, $t_n = 1$. Из того, что $p_n(t_1) = (-1)^{n+1}\delta$, $(-1)^n p_n(t) \to +\infty$ при $t \to -\infty$, а $(-1)^n p_n'(t_1) \ge 0$, следует существование точки $\tau \in (-\infty, t_1]$, в которой $p_n'(\tau) = 0$. Так как $p_n'(t)$ не может иметь более $n-1$ нулей, то $p_n(t)$ имеет экстремумы только в точках $\tau, t_2, \ldots, t_{n-1}$.

Итак, $|p_n(t)| \le \delta$ при $t \in [t_1, 1]$, $p_n(t)$ имеет n-альтернанс в точках $t_1, \ldots, t_n$, $p_n^{(n)}(t) \equiv 1$, $p_n(1) = \delta$. Из теоремы 2 следует, что многочлен $p_n(t)$ определен единственным образом и при $t_1 = -1$ пропорционален многочлену Золотарева на отрезке $[-1, 1]$, а при $t_1 \ne -1$ $\tau = t_1$ и $p_n(t)$ пропорционален многочлену Чебышева на некотором отрезке $[\tau_2, 1]$ с уклонением δ (τ_2 однозначно находится по δ). Представление для многочлена Золотарева можно найти в работах [9, с. 314], [10]. Теорема доказана. □

Из теорем 5 и 6 вытекает, что при $\delta \ge \delta_{nn} = (2^{n-1} n!)^{-1}$ для любого $k \ge n$ и $t_0 \in (1, b]$

$$R_{kn}(t_0, \delta) = R_{nn}(t_0, \delta) = r_n(t_0, t_1, \ldots, t_n, \delta), \tag{3.5}$$

где точки $t_1, \dots, t_n$ определены в теореме 6, и, кроме того, $I_n(t_0, \delta) = n$.

Положим

$$\Delta_{mn} = \left(\frac{2}{1 - t_{1n}^{(m)}} \right)^n \delta_{mn},$$

$$y_n(t, \delta) = \frac{\delta}{\delta_{mn}} x_{mn} \left[\left(\frac{\delta_{mn}}{\delta} \right)^{1/n} (t-1) + 1 \right] \text{ при } \Delta_{m-1,n} < \delta \le \Delta_{mn}.$$

В работах [6, с. 138], [7] отмечалось, что для $\delta_{mn} \le \delta \le \Delta_{mn}$

$$Z_n(t, \delta) = y_n(t, \delta), \tag{3.6}$$

а следовательно,

$$t_{kn}(\delta) = \left(\frac{\delta_{mn}}{\delta} \right)^{1/n} (t_{kn}^{(m)} - 1) + 1, \quad k = 1, \dots, m. \tag{3.7}$$

Поскольку $\Delta_{m1} = \delta_{m-1,1}$, то равенство (3.6) при $n = 1$ полностью описывает золотаревские сплайны. Следующая лемма дает описание этих сплайнов при $n = 2, 3$ и $0 < \delta \le \Delta_{nn}$ (случай $\delta > \Delta_{nn}$ следует из теоремы 6).

Лемма 1. *При $n = 2, 3$ имеют место равенства*

$$Z_n(t, \delta) = \begin{cases} y_n(t, \delta), & \delta_{mn} \le \delta \le \Delta_{mn}, \\ y_n(t, \delta) - \dfrac{2(-1)^m}{n!} (\tau - t)_+^n, & \Delta_{m+1,n} < \delta < \delta_{mn}, \end{cases}$$

где

$$\tau = -1 + \sqrt[n]{\frac{n!}{2} [|y_n(-1, \delta)| - \delta]} < t_{1n}(\delta).$$

Доказательство. В силу равенства (3.6) достаточно рассмотреть случай, когда $\Delta_{m+1,n} < \delta < \delta_{mn}$. Положим при $n = 2, 3$

$$\psi(t) = \varphi_{1n}(t) - \frac{2(-1)^n}{n!} (\tau_1 - t)_+^n,$$

где

$$\tau_1 = \alpha + \sqrt[n]{\frac{n!}{2} [|\varphi_{1n}(\alpha)| - \delta_{1n}]}.$$

Нетрудно убедиться, что при $-n \le \alpha \le -1 - \varepsilon_n$, τ_1 монотонно убывает от -1 до $-1 - \varepsilon_n$, $\psi(\alpha) = (-1)^n \delta_{1n}$ и $|\psi(t)| \le \delta_{1n}$ при $t \in [\alpha, 1 + \varepsilon_n]$. Пользуясь подобием между φ_{1n} и функциями, из которых состоит x_{mn}, получаем, что функция

$$\psi_1(t) = x_{mn}(t) - \frac{2(-1)^m}{n!} (\tau_2 - t)_+^n,$$

где

$$\tau_2 = \beta + \sqrt[n]{\frac{n!}{2} [|x_{mn}(\beta)| - \delta_{mn}]}, \quad -\frac{m}{m - n + 1 + \varepsilon_n} \le \beta \le -1,$$

удовлетворяет условиям $\psi_1(\beta) = (-1)^m\delta_{mn}$, $|\psi_1(t)| \le \delta_{mn}$ при $t \in [\beta, 1]$, а τ_2 монотонно убывает от $-\dfrac{m-n+1}{m-n+1+\varepsilon_n}$ до -1. Отсюда следует, что

$$\left(\frac{2}{1-\beta}\right)^n \psi_1\left(\frac{1-\beta}{2}t + \frac{1+\beta}{2}\right) = Z_n\left[t, \left(\frac{2}{1-\beta}\right)^n \delta_{mn}\right].$$

Положив

$$\beta = 1 - 2\left(\frac{\delta_{mn}}{\delta}\right)^{1/n}$$

и заметив, что β монотонно возрастает от $-\dfrac{m}{m-n+1+\varepsilon_n}$ до -1 при $\delta \in (\Delta_{m+1,n}, \delta_{mn})$, а $-1 < \tau_2 < t_{1n}^{(m)}$, получаем утверждение леммы. Лемма доказана. □

Теорема 7. *При $n = 1, 2, 3$ для любого $k \ge n$, $\delta > 0$ и $t_0 \in (1, b]$ имеют место равенства*

$$R_{kn}(t_0, \delta) = R_{nn}(t_0, \delta) = R_n(t_0, \delta), \tag{3.8}$$

$$I_n(t_0, \delta) = n. \tag{3.9}$$

Доказательство. Для $\delta \ge \delta_{nn}$ утверждение теоремы следует из (3.5). Пусть $\delta < \delta_{nn}$. Тогда из леммы 1 для $\delta \in (\Delta_{m+1,n}, \Delta_{mn}]$

$$Z_n(t_0, \delta) = \frac{\delta}{\delta_{mn}} x_{mn}\left[\left(\frac{\delta_{mn}}{\delta}\right)^{1/n}(t_0 - 1) + 1\right].$$

Учитывая (2.2), (2.1), вид функций φ_{mn} при $n = 1, 2, 3$ и равенство (3.1), получаем

$$Z_n(t_0, \delta) = \delta T_n\left[\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\delta n!}\right)^{1/n}(t_0 - 1) + 1\right] = R_{nn}(t_0, \delta).$$

Тем самым для всех $\delta > 0$ $Z_n(t_0, \delta) = R_{nn}(t_0, \delta)$. Пусть теперь $\delta_{mn} \le \delta < \delta_{m-1,n}$. При $k \ge m$ равенства (3.8) следуют из теоремы 5. Если $n \le k < m$, то

$$R_{nn}(t_0, \delta) \ge R_{kn}(t_0, \delta) \ge R_{mn}(t_0, \delta) = R_{nn}(t_0, \delta).$$

Таким образом, равенства (3.8) доказаны при всех $\delta > 0$ и $k \ge n$. Равенство (3.9) непосредственно следует из (3.8). Теорема доказана. □

Из теорем 6 и 7 следует, что оптимальные точки экстраполяции при $n = 1, 2, 3$ имеют вид (за исключением случая $n = 3$, $j = 2$, $\delta > \Delta_{33} = 8/81$)

$$t_{jn} = -1 + 2\left(1 - 2\sqrt[n]{\frac{\delta n!}{2}}\cos^2\frac{\pi j}{2n}\right)_+.$$

Если $\delta > \Delta_{33}$, то для некоторого β

$$Z_3(t,\delta) = \frac{1}{6}(t - t_{23})^2(t - \beta) - \delta.$$

Пользуясь условиями $Z_3(-1,\delta) = Z_3(1,\delta) = \delta$, получим уравнение,

$$1 - t_{23}^2 = 2\sqrt{6\delta t_{23}},$$

из которого при $\delta > \Delta_{33}$ единственным образом определяется $t_{23} \in (0, 1/3)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Г. М а р ч у к, К. Ю. О с и п е н к о. Наилучшее приближение функций, заданных с погрешностью в конечном числе точек. *Мат. заметки*, **17**, 1975, 359–368.
2. C. A. M i c c h e l l i. Optimal estimation of smooth functions from inaccurate data. *J. Inst. Math. and Appl.*, **23**, 1979, 473–495.
3. К. Ю. О с и п е н к о. Задача Хейнса и оптимальная экстраполяция аналитических функций, заданных с ошибкой. *Мат. сб.*, **126**, 1985, 566–575.
4. K. Yu. O s i p e n k o. On optimal extrapolation and interpolation of fuzzy analytic functions. *Anal. math.*, **13**, 1987, 122–210.
5. В. М. Т и х о м и р о в. Наилучшие методы приближения и интерполяции дифференцируемых функций в пространстве $C(-1, 1)$. *Мат. сб.*, **80**, 1969, 290–304.
6. В. М. Т и х о м и р о в. Некоторые вопросы теории приближений. М., 1976.
7. S. K a r l i n. Oscillatory perfect splines and related extremum problems. In: Studies in spline functions and approximation theory. New York, 1976, 371–460.
8. Н. П. К о р н е й ч у к. Сплайны в теории приближения. М., 1984.
9. Н. И. А х и е з е р. Лекции по теории аппроксимации. М., 1965.
10. B. C. C a r l s o n, J. T o d d. Zolotarev's first problem —th e best approximation by polynomials of degree $\leq n - 2$ to $x^n - n\sigma x^{n-1}$ in $[-1, 1]$. *Aequat. math.*, **26**, 1983, 1–33.
11. A. P i n k u s. Some extremal properties of perfect splines and the pointwise Landau problem on themfinite interval. *J. Approxim. Theory*, **23**, 1979, 37–67.

Московский авиационный технологический институт Москва К-31

Поступила 11.09.1989 г.