О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО ВОССТАНОВЛЕНИЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ И ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ПО НЕТОЧНЫМ ДАННЫМ

К.Ю. ОСИПЕНКО, М.И. СТЕСИН

Введение. Пусть X — линейное пространство и Y, Z — линейные нормированные пространства. Рассмотрим задачу оптимального восстановления оператора $L\colon W \to Z$, $W \subset X$, по значениям информационного оператора $I\colon W \to Y$, заданным с погрешностью. Точнее, рассмотрим следующую экстремальную задачу:

$$E(L, I, \delta) = \inf_{S} \sup_{\substack{x \in W \\ \|Ix-y\| \le \delta}} \|Lx - Sy\|, \tag{1}$$

где $S\colon Y \to Z$ — произвольные отображения (методы). Величина $E(L, I, \delta)$ называется *оптимальной погрешностью восстановления*. Метод S_0 называется *оптимальным*, если

$$\sup_{\substack{x \in W \\ \|Ix-y\| \le \delta}} \|Lx - S_0 y\| = E(L, I, \delta).$$

Если S_0 — оптимальный метод, $x_0 \in W$ и

$$\sup_{\|Ix_0-y\| \le \delta} \|Lx_0 - S_0 y\| = E(L, I, \delta),$$

то x_0 называется *экстремальным элементом.*

Исследования задачи (1) были начаты в работе [1] для случая $\dim Y < \infty$. Случай $\dim Y = \infty$ изучался в [2] (см. также [3]). В данной статье мы рассматриваем некоторые задачи оптимального восстановления аналитических функций из пространств Харди H_p и Бергмана A_p, $1 \le p \le \infty$, и гармонических функций из аналогичных классов h_p и a_p. Некоторые результаты, относящиеся к H_∞, см. в [4–7].

В п. 1 мы доказываем общие теоремы о восстановлении по неточным данным, близкие к результатам работ [2, 3, 8, 9]. В п. 2 с помощью этих теорем мы находим оптимальный метод восстановления для функций из H_p, A_p, h_p и a_2 в произвольной точке из единичного круга $\mathbb{C}$ в случае, когда известна информация о приближенных значениях указанных функций в некоторой другой точке. В частности, получено обобщение леммы Шварца. В п. 3 находятся оптимальные методы восстановления $f'(0)$ по приближенным значениям $f(-h)$, $f(h)$, где $h \in (0, 1)$, в пространствах H_p. Для H_∞ находится также оптимальное значение h, при котором погрешность оптимального восстановления минимальна.

1. Общие теоремы о восстановлении по неточным данным. Нашей целью является доказательство достаточности некоторых условий для оптимальности метода S_0 и экстремальности элемента x_0. Эти условия были, по существу, получены в [2]. Теорема, которая нам потребуется, хотя и близка к одному из результатов работы [2], тем не менее имеет некоторые отличия.

Теорема 1. *Пусть* $x_0 \in W$, $-x_0 \in W$, $L(-x_0) = -Lx_0$, $\|Ix_0\| \le \delta$, $\|I(-x_0)\| \le \delta$ *и*

$$\sup_{\substack{x \in W \\ \|Ix-y\| \le \delta}} \|Lx - S_0 y\| = \|Lx_0\|.$$

Тогда

1) S_0 — *оптимальный метод,*
2) x_0 — *экстремальный элемент,*
3) *имеет место равенство* $E(L, I, \delta) = \|Lx_0\|$.

Доказательство. Из (1) следует, что

$$E(L, I, \delta) \le \sup_{\substack{x \in W \\ \|Ix-y\| \le \delta}} \|Lx - S_0 y\| = \|Lx_0\|.$$

С другой стороны, для любого метода S имеем

$$\|Lx_0 - S0\| + \|L(-x_0) - S0\| \ge 2\|Lx_0\|, \tag{2}$$

поэтому

$$\sup_{\substack{x \in W \\ \|Ix-y\| \le \delta}} \|Lx - Sy\| \ge \max\{\|Lx_0 - S0\|, \|L(-x_0) - S0\|\} \ge \|Lx_0\|.$$

Таким образом, $E(L, I, \delta) = \|Lx_0\|$ и S_0 — оптимальный метод. Предположим теперь, что x_0 не является экстремальным элементом, т. е.

$$\sup_{\|Ix_0-y\| \le \delta} \|Lx_0 - S_0 y\| < \sup_{\substack{x \in W \\ \|Ix-y\| \le \delta}} \|Lx - S_0 y\| = \|Lx_0\|.$$

Тогда

$$\|Lx_0 - S_0 0\| < \|Lx_0\|, \quad \|L(-x_0) - S_0 0\| \le \|Lx_0\|,$$

что противоречит (2). Теорема доказана. □

Следствие 1. *Пусть* $x_0 \in W$, $-x_0 \in W$, $L(-x_0) = -Lx_0$, $\|Ix_0\| \le \delta$, $\|I(-x_0)\| \le \delta$, S_0 — *линейный оператор и*

$$\sup_{x \in W} \|Lx - S_0 Ix\| = \|Lx_0\| - \delta\|S_0\|.$$

Тогда

1) S_0 — *оптимальный метод,*

2) x_0 — *экстремальный элемент,*

3) *справедливо равенство* $E(L,I,\delta)=\sup\limits_{\substack{x\in W\\ \|Ix\|\le\delta}}\|Lx\|=\|Lx_0\|$.

Доказательство. Заметим, что

$$\sup_{\substack{x\in W\\ \|Ix-y\|\le\delta}}\|Lx-S_0y\|=\sup_{\substack{x\in W\\ \|Ix-y\|\le\delta}}\|Lx-S_0Ix+S_0(Ix-y)\|$$
$$\le\sup_{x\in W}\|Lx-S_0Ix\|+\delta\|S_0\|=\|Lx_0\|.$$

Поскольку $\|Ix_0\|\le\delta$, имеем

$$\sup_{\substack{x\in W\\ \|Ix\|\le\delta}}\|Lx\|\ge\|Lx_0\|\ge\sup_{\substack{x\in W\\ \|Ix-y\|\le\delta}}\|Lx-S_0y\|\ge\sup_{\substack{x\in W\\ \|Ix\|\le\delta}}\|Lx\|.$$

Таким образом,

$$\sup_{\substack{x\in W\\ \|Ix-y\|\le\delta}}\|Lx-S_0y\|=\|Lx_0\|=\sup_{\substack{x\in W\\ \|Ix\|\le\delta}}\|Lx\|$$

и следствие вытекает из теоремы 1. □

Пусть Ω — подмножество $\mathbb{C}^n$ и μ — неотрицательная мера на Ω. Обозначим через $L_p(\Omega,\mu)$ пространство Лебега комплексных (или вещественных) функций с обычной нормой

$$\|f\|_p=\left(\int_\Omega|f(z)|^p\,d\mu(z)\right)^{1/p},\quad 1\le p<\infty,$$
$$\|f\|_\infty=\operatorname*{vraisup}_{z\in\Omega}|f(z)|.$$

Пусть X_p — какое-либо подпространство $L_p(\Omega,\mu)$ и $BX_p=\{f\in X_p:\|f\|_p\le1\}$. Рассмотрим задачу (1) для $X=X_p$, $W=BX_p$ и $Z=\mathbb{C}(\mathbb{R})$.

Следующая теорема является обобщением соответствующих результатов из работ [8, 9], полученных в случае $\delta=0$.

Теорема 2. *Пусть* $g\in X_p$, $\|g\|_p\ne0$, $g_0=g/\|g\|_p$, L — *функционал на* X_p, $L(-g_0)=-Lg_0$, $\|Ig_0\|\le\delta$, $\|I(-g_0)\|\le\delta$, S_0 — *линейный функционал,* $S_0Ig_0=\delta\|S_0\|$ *и при всех* $f\in BX_p$

$$(3)\qquad Lf-S_0If=\begin{cases}\alpha\displaystyle\int_\Omega\overline{g(z)}|g(z)|^{p-2}f(z)\,d\mu(z), & 1\le p<\infty,\\ \displaystyle\int_\Omega\overline{g(z)}|\varphi(z)|f(z)\,d\mu(z), & p=\infty,\end{cases}$$

где $\alpha>0$, $\varphi\in L_1(\Omega,\mu)$, *и если* $p=\infty$, *то* $|g(z)|=1$ *почти всюду на* Ω *относительно меры* μ. *Тогда*

1) S_0 — *оптимальный метод,*

2) g_0 — *экстремальная функция,*

3) *выполнены соотношения*

$$E(L,I,\delta)=\sup_{\substack{f\in BX_p\\ \|If\|\le\delta}}|Lf|=Lg_0=\begin{cases}\alpha\|g\|_p^{p-1}+\delta\|S_0\|, & 1\le p<\infty,\\ \|\varphi\|_1+\delta\|S_0\|, & p=\infty.\end{cases}$$

Доказательство. При всех $f\in BX_p$ из (3) и неравенства Гёльдера имеем

$$|Lf-S_0If|\le\begin{cases}\alpha\|g\|_p^{p-1}, & 1\le p<\infty,\\ \|\varphi\|_1, & p=\infty.\end{cases}$$

С другой стороны,

$$Lg_0-\delta\|S_0\|=Lg_0-S_0Ig_0=\begin{cases}\alpha\|g\|_p^{p-1}, & 1\le p<\infty,\\ \|\varphi\|_1, & p=\infty.\end{cases}$$

Тем самым

$$\sup_{f\in BX_p}|Lf-S_0If|=Lg_0-\delta\|S_0\|,$$

и теорема вытекает из следствия 1. □

Пусть l_q^m — пространство $\mathbb{C}^m$ с нормой

$$\|a\|_q=\|(a_1,\dots,a_m)\|_q=\begin{cases}\left(\sum_{j=1}^m|a_j|^q\right)^{1/q}, & 1\le q<\infty,\\ \max_{1\le j\le m}|a_j|, & q=\infty.\end{cases}$$

Через (a,b) обозначим эрмитово скалярное произведение

$$(a,b)=\sum_{j=1}^m a_j\bar{b}_j.$$

Пусть $a\ne0$, $a^*\in Bl_q^m$, $(a,a^*)=\|a\|_{q'}$, $1/q+1/q'=1$. Легко видеть, что

$$a_j^*=\frac{a_j|a_j|^{q'-2}}{\|a\|_{q'}^{q'-1}},\quad 1\le q'<\infty,$$

и для $q'=\infty$

$$a_j^*=\begin{cases}0, & j\ne j_0,\\ \dfrac{a_{j_0}}{|a_{j_0}|}, & j=j_0,\end{cases}$$

где j_0 таково, что $|a_{j_0}|=\max_{1\le j\le m}|a_j|$.

Следствие 2. *Пусть* $I\colon BX_p\to l_q^m$, $S_0y=(y,a)$, $a\in\mathbb{C}^m$, $g\in X_p$, $\|g\|_p\ne0$, $g_0=g/\|g\|_p$, L *— функционал,* $L(-g_0)=-Lg_0$ *и* $\|I(-g_0)\|_q\le\delta$. *Предположим, что при всех* $f\in BX_p$ *выполнено равенство* (3) *и* $Ig_0=\delta a^*$, *если* $a\ne0$, *или* $\|Ig_0\|_q\le\delta$, *если* $a=0$. *Тогда*

1) S_0 *— оптимальный метод,*
2) g_0 *— экстремальная функция,*

3) *выполнены соотношения*

$$E(L,I,\delta)=\sup_{\substack{f\in BX_p\\ \|If\|_q\le\delta}}|Lf|=Lg_0=\begin{cases}\alpha\|g\|_p^{p-1}+\delta\|a\|_{q'}, & 1\le p<\infty,\\ \|\varphi\|_1+\delta\|a\|_{q'}, & p=\infty.\end{cases}$$

2. Оптимальное восстановление аналитических и гармонических функций. Пусть $D=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ и H_p — пространство Харди , т. е. пространство аналитических в D функций, для которых

$$(4)\qquad \begin{gathered}\|f\|_{H_p}=\sup_{0<r<1}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^p\,d\theta\right)^{1/p}<\infty,\quad 1\le p<\infty,\\ \|f\|_{H_\infty}=\sup_{z\in D}|f(z)|<\infty.\end{gathered}$$

Хорошо известно, что функции из H_p имеют почти всюду граничные значения. Поэтому H_p можно рассматривать как подпространство $L_p(\Omega,\mu)$ для $\Omega=\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\}$ и $d\mu(e^{i\theta})=\dfrac{1}{2\pi}d\theta$.

Напомним, что *пространством Бергмана* A_p называется пространство аналитических в D функций, для которых

$$(5)\qquad \|f\|_{A_p}=\left(\frac{1}{\pi}\int_D|f(z)|^p\,d\sigma(z)\right)^{1/p}<\infty,\quad 1\le p<\infty,$$

где $\sigma(z)$ — мера Лебега на D (для $p=\infty$ $A_\infty=H_\infty$). Таким образом, пространство A_p есть подпространство $L_p(D,\mu)$ для $d\mu(z)=\dfrac{1}{\pi}d\sigma(z)$.

Обозначим через h_p и a_p пространства гармонических в D функций, удовлетворяющих (4) и (5).

Рассмотрим задачу (1), когда X является одним из пространств H_p, A_p, h_p или a_p, $W=BX$, $Lf=f(\xi)$, $If=f(z_1)$, ξ и z_1 — различные точки из D. Соответствующую погрешность оптимального восстановления обозначим через $E(\xi,z_1,\delta,X)$. Положим

$$(6)\qquad \rho=\left|\frac{\xi-z_1}{1-\overline{z}_1\xi}\right|,\quad W(z)=e^{i\varphi}\frac{z-z_1}{1-\overline{z}_1z},$$

где φ определено из условия $W(\xi)=\rho$,

$$\delta_1=\left(\frac{1-\rho}{2(1-|z_1|^2)}\right)^{1/p},\quad \delta_2=\left(\frac{1-\rho^2}{1-|z_1|^2}\right)^{1/p},$$

$$h(z)=\begin{cases}1, & 0\le\delta\le\delta_1,\\ \dfrac{W(z)+a}{1+aW(z)}, & \delta_1<\delta<\delta_2,\\ W(z), & \delta\ge\delta_2,\end{cases}$$

где $a \in [0,1]$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{a\delta_2}{h(z_1)(1+a\rho+a^2)^{1/p}} = \delta, \quad 0 \le \delta < \delta_2 \tag{7}$$

(существование решения уравнения следует из непрерывности функции, стоящей в левой части (7)). Для $\delta \ge \delta_2$ положим $a = 0$.

Предложение 1. *Пусть $X = H_p$. Тогда для всех $1 \le p < \infty$ и $\delta \ge 0$*

1) *метод*

$$S_0 y = \frac{h(z_1)(1-\rho^2)}{h(\xi)(1+a\rho)^{2(p-1)/p}} \left(\frac{1-\bar{\xi} z_1}{1-|\xi|^2}\right)^{2/p} y$$

оптимален;

2) *функция*

$$g_0(z) = \left(\frac{1-|\xi|^2}{1+2a\rho+a^2}\right)^{1/p} \frac{(W(z)+a)(1+aW(z))^{(2-p)/p}}{h(z)(1-\bar{\xi} z)^{2/p}} \tag{8}$$

экстремальна;

3) *имеет место равенство*

$$E(\xi, z_1, \delta, H_p) = \frac{(\rho+a)(1+a\rho)^{(2-p)/p}}{h(\xi)(1+2a\rho+a^2)^{1/p}(1-|\xi|^2)^{1/p}}.$$

Доказательство. Положим

$$g(z) = \frac{(W(z)+a)(1+aW(z))^{(2-p)/p}}{h(z)(1-\bar{\xi} z)^{2/p}}, \quad \alpha = \frac{\rho(1-|\xi|^2)^{(p-2)/p}}{h(\xi)(1+a\rho)^{2(p-1)/p}}.$$

По теореме о вычетах для всех $f \in H_p$

$$\begin{aligned} &\alpha \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{g(e^{i\theta})} |g(e^{i\theta})|^{p-2} f(e^{i\theta})\, d\theta \\ &= \alpha \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{(1+aW(z))^{2(p-1)/p} h(z)}{W(z)(z-\xi)(1-\bar{\xi} z)^{(p-2)/p}} f(z)\, dz = f(\xi) - S_0 f(z_1). \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \|g\|_{H_p}^p &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|\frac{1+aW(e^{i\theta})}{1-\bar{\xi} e^{i\theta}}\right|^2 d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{(1+aW(z))(W(z)+a)}{W(z)(1-\bar{\xi} z)(z-\xi)}\, dz = \frac{1+2a\rho+a^2}{1-|\xi|^2}. \end{aligned}$$

Из (7) следует, что $|g_0(z_1)| = \delta$ для $0 \le \delta < \delta_2$; $|g_0(z_1)| = \delta_2 \le \delta$ для $\delta \ge \delta_2$ и $S_0 y \equiv 0$. Так как $S_0 g_0(z_1) \ge 0$, то $S_0 g_0(z_1) = \delta \|S_0\|$ при всех $\delta \ge 0$. Теперь предложение 1 вытекает из теоремы 2. $\square$

Заметим, что в силу теоремы 2 из предложения 1 может быть получено следующее обобщение леммы Шварца:

$$(9)\quad \sup_{\substack{f\in BH_p\\ |f(0)|\le\delta}} |f(z)|$$
$$= \begin{cases} \dfrac{(|z|+a)(1+a|z|)^{(2-p)/p}}{(1-|z|^2)^{1/p}(1+2a|z|+a^2)^{1/p}}, & 0\le\delta\le\left(\dfrac{1-|z|}{2}\right)^{1/p}, \\ \dfrac{(1+a|z|)^{2/p}}{(1-|z|^2)^{1/p}(1+2a|z|+a^2)^{1/p}}, & \left(\dfrac{1-|z|}{2}\right)^{1/p}\le(1-|z|^2)^{1/p}, \\ (1-|z|^2)^{-1/p}, & \delta\ge(1-|z|^2)^{1/p}, \end{cases}$$

где a определено равенством (7) для $z_1=0$.

Рассмотрим ту же задачу для $X=A_p$. Положим

$$\delta_1=\frac{(2+\rho)^{2/p}(1-\rho)^{2/p}}{2^{1/p}(3-\rho^2)^{1/p}(1-|z_1|^2)^{2/p}},\quad \delta_2=\left(\frac{1-\rho^2}{1-|z_1|^2}\right)^{2/p},$$
$$b=\begin{cases}(1+a\rho)^{-1}, & 0\le\delta<\delta_1,\\ \dfrac{a}{a+\rho}, & \delta\ge\delta_1,\end{cases}$$

где $a\in[0,1]$ удовлетворяет уравнению

$$(10)\quad \frac{a\rho^{2/p}[(p/2-1)(1-a^2)b^2+b+b^2]^{2/p}(1-|z_1|^2)^{-2/p}}{\left[\dfrac{(p/2-1)(1-a^2)(1+2a\rho+a^2)\rho^2b^4}{1-\rho^2}+\dfrac{\rho^2(2-\rho^2)}{(1-\rho^2)^2}+(1-b^2)^2\right]^{1/p}}=\delta$$

для $0\le\delta<\delta_1$ и

$$\frac{(1-b^2)^{2/p}(1-\rho^2)^{2/p}}{[1-2(1-\rho^2)^2b^2+(1-\rho^2)^2b^4]^{1/p}(1-|z_1|^2)^{2/p}}=\delta$$

для $\delta_1\le\delta<\delta_2$ (решение последнего уравнения может быть записано в явном виде, а существование решения уравнения (10) будет доказано ниже). При $\delta\ge\delta_2$ положим $a=0$. Введем следующие обозначения:

$$\varphi(z)=\begin{cases}(p/2-1)(1-a^2)(1-\rho W(z)) \\ \qquad\qquad +(1+aW(z))(2+a\rho-\rho W(z)), & 0\le\delta<\delta_1,\\ (1+aW(z))(2a+\rho-a\rho W(z)), & \delta\ge\delta_1,\end{cases}$$

$$g(z)=\begin{cases}\dfrac{(W(z)+a)(\varphi(z))^{2/p}}{(1+aW(z))(1-\overline{\xi}z)^{4/p}}, & 0\le\delta<\delta_1,\\ \dfrac{(\varphi(z))^{2/p}}{(1-\overline{\xi}z)^{4/p}}, & \delta\ge\delta_1.\end{cases}$$

Предложение 2. *Пусть* $X=A_p$. *Тогда для всех* $1\le p<\infty$ *и* $\delta\ge0$

1) *метод*

$$S_0 y = b^2(1-\rho^2)^2 \left(\frac{1-\overline{\xi} z_1}{1-|\xi|^2}\right)^{4/p} \left(\frac{\varphi(z_1)}{\varphi(\xi)}\right)^{(p-2)/p} y$$

оптимален;

2) $g_0 = g/\|g\|_{A_p}$ — *экстремальная функция;*

3) *имеет место равенство*

$$E(\xi, z_1, \delta, A_p) = \begin{cases} \dfrac{\rho((p/2)(1-\rho^2)+1)^{1/p}}{(1-|\xi|^2)^{2/p}}, & \delta = 0, \\ \delta b \dfrac{a+\rho}{a} \left(\dfrac{1-|z_1|^2}{(1-|\xi|^2)(1-\rho^2)}\right)^{2/p} \left(\dfrac{\varphi(\xi)}{\varphi(z_1)}\right)^{2/p}, & 0 < \delta < \delta_2, \\ (1-|\xi|^2)^{-2/p}, & \delta \geq \delta_2. \end{cases}$$

Доказательство. Заметим, что функции

$$(p/2-1)(1-a^2)(1-\rho w)+(1+aw)(2+a\rho-\rho w), \quad (1+aw)(2a+\rho-a\rho w)$$

как функции от w имеют вещественные нули, лежащие вне интервала $(-1,1)$. Поэтому $\varphi(z)$ не имеет нулей в D. Пусть $0 \leq \delta < \delta_1$. Для $f \in H_\infty$ положим

$$If = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{(1+aW(z))^2(\varphi(z))^{(p-2)/p}}{W(z)(W(z)-\rho)(1-\overline{\xi} z)^{2(p-2)/p}} f(z)\, dz.$$

Поскольку

$$W(z) - \rho = e^{i\varphi} \frac{(z-\xi)(1-|z_1|^2)}{(1-\overline{z}_1 z)(1-\overline{z}_1 \xi)},$$

по теореме о вычетах получаем

$$e^{i\varphi} \frac{\rho(1-|z_1|^2)(1-|\xi|^2)^{2(p-2)/p}}{(1+a\rho)^2(1-\overline{z}_1\xi)(\varphi(\xi))^{(p-2)/p}} If = f(\xi) - S_0 f(z_1).$$

С другой стороны, в силу равенства $\overline{W(e^{i\theta})} = W^{-1}(e^{i\theta})$, используя формулу Стокса, имеем

$$
\begin{aligned}
If &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\left(\frac{\overline{W(z)}+a}{1+a\overline{W(z)}}\right)^2 \frac{(1+a\overline{W(z)})^2(\varphi(z))^{(p-2)/p}}{(1-\rho\overline{W(z)})(1-\overline{\xi}z)^{2(p-2)/p}} f(z)\,dz \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\left(\frac{\overline{W(z)}+a}{1+a\overline{W(z)}}\right)^{p/2+1} \frac{(1+a\overline{W(z)})^2}{1-\rho\overline{W(z)}}\left(\frac{W(z)+a}{1+aW(z)}\right)^{p/2-1} \\
&\times \frac{(\varphi(z))^{(p-2)/p}}{(1-\overline{\xi}z)^{2(p-2)/p}} f(z)\,dz = e^{-i\varphi}\frac{(1-\overline{z}_1\xi)^2}{1-|z_1|^2}\frac{1}{\pi}\int_D\left(\frac{\overline{W(z)}+a}{1+a\overline{W(z)}}\right)^{p/2} \\
&\qquad \times \frac{\overline{\varphi(z)}}{(1-\xi\overline{z})^2}\left(\frac{W(z)+a}{1+aW(z)}\right)^{p/2-1}\frac{(\varphi(z))^{(p-2)/p}}{(1-\overline{\xi}z)^{2(p-2)/p}} f(z)\,d\sigma(z) \\
&\qquad\qquad = e^{-i\varphi}\frac{(1-\overline{z}_1\xi)^2}{1-|z_1|^2}\frac{1}{\pi}\int_D \overline{g(z)}|g(z)|^{p-2} f(z)\,d\sigma(z).
\end{aligned}
$$

Таким образом, при всех $f \in H_\infty$

(11)

$$
\frac{\rho(1-|\xi|^2)^{2(p-2)/p}}{(1+a\rho)^2(\varphi(\xi))^{(p-2)/p}}\frac{1}{\pi}\int_D \overline{g(z)}|g(z)|^{p-2} f(z)\,d\sigma(z) = f(\xi) - S_0 f(z_1).
$$

Так как функции из H_∞ плотны в A_p для любого $1 \le p < \infty$, равенство (11) выполняется для любой функции из A_p. Легко убедиться, что $S_0 g(z_1) \ge 0$. Поэтому из теоремы 2 следует, что если $a \in [0,1]$ удовлетворяет условию $|g(z_1)|/\|g\|_{A_p} = \delta$, то S_0 — оптимальный метод. Для $f = g$ из (11) имеем

$$
\begin{aligned}
&\frac{\rho(1-|\xi|^2)^{2(p-2)/p}}{(1+a\rho)^2(\varphi(\xi))^{(p-2)/p}}\|g\|_{A_p}^p \\
&\qquad = \frac{(\rho+a)(\varphi(\xi))^{2/p}}{(1+a\rho)(1-|\xi|^2)^{4/p}} - \left(\frac{1-\rho^2}{1+a\rho}\right)^2 \frac{a\varphi(z_1)}{(1-|\xi|^2)^{4/p}(\varphi(\xi))^{(p-2)/p}}.
\end{aligned}
$$

Тем самым

$$
\|g\|_{A_p}^p = \frac{(\rho+a)(1+a\rho)}{\rho(1-|\xi|^2)^2}\varphi(\xi) - \frac{a(1-\rho^2)^2}{\rho(1-|\xi|^2)^2}\varphi(z_1).
$$

Непосредственным вычислением находим

$$
\begin{aligned}
\|g\|_{A_p}^p = \frac{1}{b^4\rho^2(1-|\xi|^2)^2}&[(p/2-1)(1-a^2)(1-\rho^2)(1+2a\rho+a^2b^4 \\
&+ 1 - 2(1-\rho^2)^2 b^2 + (1-\rho^2)^2 b^4].
\end{aligned}
$$

Поскольку $\|g\|_{A_p} > 0$ при всех $a \in [0,1]$, функция, стоящая в левой части (10), непрерывна как функция a, и поэтому уравнение (10) имеет решение для любого $\delta \in [0, \delta_1)$. Кроме того,

$$|g(z_1)| = a\frac{|\varphi(z_1)|^{2/p}}{|1-\overline{\xi}z_1|^{4/p}} = a\frac{[(p/2-1)(1-a^2)+2+a\rho]^{2/p}}{|1-\overline{\xi}z_1|^{4/p}}$$
$$= \frac{a[(p/2-1)(1-a^2)+1+b^{-1}]^{2/p}(1-\rho^2)^{2/p}}{(1-|\xi|^2)^{2/p}(1-|z_1|^2)^{2/p}},$$

и, следовательно, уравнение (10) означает, что $|g(z_1)|/\|g\|_{A_p} = \delta$. Случай $\delta_1 \le \delta < \delta_2$ рассматривается аналогично, если положить

$$If = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \frac{(W(z)+a)^2(\varphi(z))^{(p-2)/p}}{W(z)(W(z)-\rho)(1-\overline{\xi}z)^{2(p-2)/p}} f(z)\,dz$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \frac{(1+a\overline{W(z)})^2(\varphi(z))^{(p-2)/p}}{(1-\rho\overline{W(z)})(1-\overline{\xi}z)^{2(p-2)/p}} f(z)\,dz.$$

Пусть $\delta \ge \delta_2$. Тогда $a = 0$, $g(z) = \rho^{2/p}(1-\overline{\xi}z)^{-4/p}$ и

$$\frac{1}{\pi}\int_D \overline{g(z)}|g(z)|^{p-2}f(z)\,d\sigma$$
$$= \rho^{2(p-1)/p}\frac{1}{\pi}\int_D (1-\xi\overline{z})^{-2}(1-\overline{\xi}z)^{-2(p-2)/p}f(z)\,d\sigma(z)$$
$$= \rho^{2(p-1)/p}(1-|\xi|^2)^{-2(p-2)/p}f(\xi)$$

(здесь мы пользуемся тем, что ядро Бергмана $(1-\overline{\xi}z)^{-2}$ является воспроизводящим ядром для A_p. Таким образом,

$$\frac{(1-|\xi|^2)^{2(p-2)/p}}{\rho^{2(p-1)/p}}\frac{1}{\pi}\int_D \overline{g(z)}|g(z)|^{p-2}f(z)\,d\sigma = f(\xi) - S_0 f(z_1). \tag{12}$$

Покажем, что $|g(z_1)|/\|g\|_{A_p} \le \delta$. Подставляя $f = g$ в (12), получаем

$$(1-|\xi|^2)^{2(p-2)/p}\|g\|_{A_p}^p = \frac{\rho^{2/p}}{(1-|\xi|^2)^{4/p}},$$

что дает

$$\frac{|g(z_1)|}{\|g\|_{A_p}} = \left(\frac{1-\rho^2}{1-|z_1|^2}\right)^{2/p} = \delta_2 \le \delta.$$

Предложение доказано. $\square$

Рассмотрим аналогичную задачу для $X = h_p$, $p > 1$. Положим

$$\alpha(\lambda) = \frac{\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} P(z_1, e^{i\theta})(P(\xi, e^{i\theta}) - \lambda P(z_1, e^{i\theta}))_{(q)}\,d\theta}{\|P(\xi,\cdot) - \lambda P(z_1,\cdot)\|_q^{q-1}}, \quad \delta_1 = \alpha(0),$$

где $P(\xi, z) = (1-|\xi|^2)/|1-\overline{\xi}z|^2$ — ядро Пуассона, $1/p + 1/q = 1$, $(x)_{(q)} = |x|^{q-1}\operatorname{sign} x$ и

$$\|f\|_q = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^q\,d\theta\right)^{1/q}.$$

Покажем, что при любом $0 \le \delta \le \delta_1$ уравнение

$$\alpha(\lambda) = \delta \tag{13}$$

имеет решение $\lambda \in [0, (1+\rho)/(1-\rho))$. При $z = e^{i\theta}$ и $\zeta = W(z) = e^{i\varphi}(z - z_1)/(1 - \overline{z}_1 z)$

$$\frac{P(\xi, z)}{P(z_1, z)} = P(\rho, \zeta) = \frac{1-\rho^2}{|1-\rho\zeta|^2} \le \frac{1-\rho}{1+\rho} \tag{14}$$

(ρ и φ те же, что и в (6)). Тем самым при всех $z = e^{i\theta}$

$$P(\xi, z) - \frac{1+\rho}{1-\rho} P(z_1, z) \le 0.$$

Поэтому $\alpha((1+\rho)/(1-\rho)) < 0$. Поскольку $\alpha(\lambda)$ непрерывна при $\lambda \in [0, (1+\rho)/(1-\rho)]$ и $\alpha(0) = \delta_1$, уравнение (13) имеет решение в указанном промежутке при всех $0 \le \delta \le \delta_1$. Обозначим это решение через $C_p(\xi, z_1, \delta)$. При $\delta > \delta_1$ положим $C_p(\xi, z_1, \delta) = 0$.

Предложение 3. *Пусть $X = h_p$, $p > 1$. Тогда при всех $\delta \ge 0$*

1) *$S_0 y = C_p(\xi, z_1, \delta) y$ — оптимальный метод,*

2) *функция*

$$u_0(\zeta) = \frac{\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} P(\zeta, e^{i\theta})(P(\xi, e^{i\theta}) - C_p(\xi, z_1, \delta) P(z_1, e^{i\theta}))_{(q)}\, d\theta}{\|P(\xi, \cdot) - C_p(\xi, z_1, \delta) P(z_1, \cdot)\|_q^{q-1}}$$

экстремальна,

3) *имеет место равенство*

$$E(\xi, z_1, \delta, h_p) = u_0(\xi) = \|P(\xi, \cdot) - C_p(\xi, z_1, \delta) P(z_1, \cdot)\|_q + \delta C_p(\xi, z_1, \delta).$$

Доказательство. Известно (см. [10]), что всякая функция из h_p, $p > 1$, имеет почти всюду граничные значения, по которым она может быть однозначно восстановлена с помощью преобразования Пуассона. Таким образом, для любой $u \in Bh_p$, $p > 1$,

$$\begin{aligned} |u(\xi) - C_p(\xi, z_1, \delta) u(z_1)| = \Bigg| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} &(P(\xi, e^{i\theta}) - C_p(\xi, z_1, \delta) P(z_1, e^{i\theta})) \\ &\times u(e^{i\theta})\, d\theta \Bigg| \le \|P(\xi, \cdot) - C_p(\xi, z_1, \delta) P(z_1, \cdot)\|_q. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$f(\theta) = \frac{(P(\xi, e^{i\theta}) - C_p(\xi, z_1, \delta) P(z_1, e^{i\theta}))_{(q)}}{\|P(\xi, \cdot) - C_p(\xi, z_1, \delta) P(z_1, \cdot)\|_q^{q-1}} \in BL_p(0, 2\pi),$$

и поэтому (см. [10]) функция u_0 принадлежит Bh_p, а ее граничные значения почти всюду совпадают с $f(\theta)$. Тем самым

$$u_0(\xi) - C_p(\xi, z_1, \delta) u_0(z_1) = \|P(\xi, \cdot) - C_p(\xi, z_1, \delta) P(z_1, \cdot)\|_q.$$

Следовательно,

$$\text{(15)} \qquad \sup_{u\in Bh_p} |u(\xi) - C_p(\xi, z_1, \delta)u(z_1)| = u_0(\xi) - C_p(\xi, z_1, \delta)u_0(z_1).$$

Пусть $0 \le \delta \le \delta_1$. Из определения $C_p(\xi, z_1, \delta)$ следует, что $u_0(z_1) = \delta$. Так как $C_p(\xi, z_1, \delta) \ge 0$, с учетом (15) $u_0(\xi) \ge 0$ и

$$\sup_{u\in Bh_p} |u(\xi) - C_p(\xi, z_1, \delta)u(z_1)| = |u_0(\xi)| - \delta C_p(\xi, z_1, \delta).$$

Для $\delta > \delta_1$ последнее равенство выполняется ввиду того, что $C_p(\xi, z_1, \delta) = 0$. Ссылка на следствие 1 завершает доказательство предложения. □

Найдем величину $C_p(\xi, z_1, \delta)$ при $p = \infty$. В этом случае $q = 1$ и

$$\alpha(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(z_1, e^{i\theta}) \operatorname{sign}(P(\xi, e^{i\theta}) - \lambda P(z_1, e^{i\theta}))\, d\theta.$$

В силу (14) после замены переменной

$$z = \frac{e^{-i\varphi}\zeta + z_1}{1 + \overline{z}_1 e^{-i\varphi}\zeta}$$

получаем

$$\begin{aligned}
\alpha(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} &\operatorname{sign}(P(\rho, e^{i\theta}) - \lambda)\, d\theta \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sign}\left(\frac{1-\rho^2}{1 - 2\rho\cos\theta + \rho^2} - \lambda\right) d\theta \\
&= \begin{cases} 1, & \lambda \le \dfrac{1-\rho}{1+\rho}, \\ \dfrac{2}{\pi}\arccos\dfrac{\lambda(1+\rho^2) - (1-\rho^2)}{2\rho\lambda} - 1, & \dfrac{1-\rho}{1+\rho} \le \lambda \le \dfrac{1+\rho}{1-\rho}, \\ -1, & \lambda \ge \dfrac{1+\rho}{1-\rho}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Тем самым при $0 \le \delta < 1$ решением уравнения (13) является

$$C_\infty(\xi, z_1, \delta) = \frac{1-\rho^2}{1 + 2\rho\sin\dfrac{\pi}{2}\delta + \rho^2}.$$

Если $\delta = 1$, то любое $\lambda \in [0, (1-\rho)/(1+\rho)]$ будет решением (13).

При $0 \le \delta < 1$ и $z = e^{i\theta}$ имеем

$$\begin{aligned}
&\operatorname{sign}(P(\xi, z) - C_\infty(\xi, z_1, \delta)P(z_1, z)) \\
&= \operatorname{sign}\left(\frac{1-\rho^2}{|1 - \rho W(z)|^2} - C_\infty(\xi, z_1, \delta)\right) = \operatorname{sign}\left(\operatorname{Re} W(z) + \sin\frac{\pi}{2}\delta\right) \\
&\qquad = \operatorname{sign}\operatorname{Re}\frac{W(z) + \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}\delta}{1 + W(z)\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}\delta} = \frac{4}{\pi}\operatorname{Re}\operatorname{arctg}\frac{W(z) + \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}\delta}{1 + W(z)\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}\delta}.
\end{aligned}$$

Мы получили, что при $p=\infty$ и $0 \le \delta < 1$

$$u_0(\zeta) = \frac{4}{\pi} \operatorname{Re} \operatorname{arctg} \frac{W(\zeta) + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}\delta}{1 + W(\zeta) \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}\delta}.$$

Таким образом, из предложения 3 вытекает

Следствие 3. *Для* $X = h_\infty$

1) *метод*

$$S_0 y = \begin{cases} \dfrac{1-\rho^2}{1 + 2\rho \sin \frac{\pi}{2}\delta + \rho^2} y, & 0 \le \delta < 1, \\ c\dfrac{1-\rho}{1+\rho} y, & \delta = 1,\ c \in [0,1], \\ 0, & \delta > 1, \end{cases}$$

оптимален (при $\delta = 1$ c *— произвольное число из отрезка* $[0,1]$*),*

2) *функция*

$$u_0(z) = \frac{4}{\pi} \operatorname{Re} \operatorname{arctg} \frac{W(z) + \Delta}{1 + \Delta W(z)},$$

где

$$\Delta = \begin{cases} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}\delta, & 0 \le \delta < 1, \\ 1, & \delta \ge 1, \end{cases}$$

экстремальна,

3) *имеют место равенства*

$$E(\xi, z_1, \delta, h_\infty) = u_0(\xi) = \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\rho + \Delta}{1 + \Delta\rho}.$$

Решение уравнения (13) при $p = 2$ также может быть получено в явном виде. Тем не менее мы установим более общий результат для гильбертова пространства.

Пусть X — комплексное (или вещественное) гильбертово пространство. Рассмотрим задачу (1) для случая, когда $W = BX$, $Y = Z = \mathbb{C}$ $(\mathbb{R})$, $Lx = (x, x_1)$, $Ix = (x, x_2)$, $x_1, x_2 \in X$. Погрешность оптимального восстановления в этом случае будем обозначать через $E(x_1, x_2, \delta, X)$.

Предложение 4. *Пусть* x_1 *и* x_2 *— линейно независимые элементы гильбертова пространства* X*. Положим*

$$\varepsilon = \min\left\{\delta, \frac{|(x_1, x_2)|}{\|x_1\|}\right\}.$$

Тогда

1) *метод*

$$S_0 y = \lambda \frac{(x_2, x_1)}{\|x_2\|^2} y,$$

где

$$\lambda = 1 - \frac{\varepsilon}{|(x_1, x_2)|}\sqrt{\frac{\|x_1\|^2\|x_2\|^2 - |(x_1, x_2)|^2}{\|x_2\|^2 - \varepsilon^2}},$$

оптимален,

2) *элемент*

$$x_0 = \sqrt{\frac{\|x_2\|^2 - \varepsilon^2}{\|x_1\|^2\|x_2\|^2 - |(x_1, x_2)|^2}}\left(x_1 - \lambda\frac{(x_1, x_2)}{\|x_2\|^2}x_2\right)$$

экстремален,

3) *выполняется равенство*

$$E(x_1, x_2, \delta, X) = \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{\|x_2\|^2}}\sqrt{\|x_1\|^2 - \frac{|(x_1, x_2)|^2}{\|x_2\|^2}} + \varepsilon\frac{|(x_1, x_2)|}{\|x_2\|^2}.$$

Доказательство. Имеем

$$\sup_{\|x\|\le 1}|(x, x_1) - S_0(x, x_2)| = \sup_{\|x\|\le 1}\left|\left(x, x_1 - \lambda\frac{(x_1, x_2)}{\|x_2\|^2}x_2\right)\right|$$
$$= \left\|x_1 - \lambda\frac{(x_1, x_2)}{\|x_2\|^2}x_2\right\| = \sqrt{\frac{\|x_1\|^2\|x_2\|^2 - |(x_1, x_2)|^2}{\|x_2\|^2 - \varepsilon^2}}.$$

Более того,

$$(x_0, x_1) - S_0(x_0, x_2) = \left(x_0, x_1 - \lambda\frac{(x_1, x_2)}{\|x_2\|^2}x_2\right) = \left\|x_1 - \lambda\frac{(x_1, x_2)}{\|x_2\|^2}x_2\right\|.$$

Следовательно, $\|x_0\| = 1$ и

$$\sup_{\|x\|\le 1}|(x, x_1) - S_0(x, x_2)| = (x_0, x_1) - S_0(x_0, x_2).$$

Поскольку

$$S_0(x_0, x_2) = \frac{\lambda(1-\lambda)|(x_1, x_2)|^2}{\|x_2\|^2\left\|x_1 - \lambda\frac{(x_1, x_2)}{\|x_2\|^2}x_2\right\|} \ge 0,$$

$$|(x_0, x_2)| = \sqrt{\frac{\|x_2\|^2 - \varepsilon^2}{\|x_1\|^2\|x_2\|^2 - |(x_1, x_2)|^2}}|(x_1, x_2)|(1-\lambda) = \varepsilon,$$

получаем $S_0(x_0, x_2) = \delta\|S_0\|$. Для завершения доказательства предложения остается применить следствие 1. $\square$

Задачи оптимального восстановления по неточным данным в гильбертовых пространствах для более общей ситуации рассматривались в работе [11] (см. также [2]).

Пусть X — гильбертово пространство функций $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ ($\mathbb{R}$) с воспроизводящим ядром $K\colon \Omega\times\Omega \to \mathbb{C}$ ($\mathbb{R}$), т. е.

$$f(z) = (f(\cdot), K(\cdot, z))$$

для любых $f \in X$ и $z \in \Omega$. Рассмотрим задачу (1) для $W = BX$, $Lf = f(\xi)$, $If = f(z_1)$. Если $K(\cdot,\xi)$ и $K(\cdot,z_1)$ линейно независимы (т. е. класс BX разделяет точки ξ и z_1), то из предложения 4 получаем

Следствие 4. *Пусть*

$$\varepsilon = \min\left\{\delta, \frac{|K(z_1,\xi)|}{\sqrt{K(\xi,\xi)}}\right\}.$$

Тогда

1) *метод*

$$S_0 y = \lambda \frac{K(\xi,z_1)}{K(z_1,z_1)} y,$$

где

$$\lambda = 1 - \frac{\varepsilon}{|K(z_1,\xi)|}\sqrt{\frac{K(\xi,\xi)K(z_1,z_1) - |K(z_1,\xi)|^2}{K(z_1,z_1)-\varepsilon^2}},$$

оптимален,

2) *функция*

$$f_0(z) = \sqrt{\frac{K(z_1,z_1)-\varepsilon^2}{K(\xi,\xi)K(z_1,z_1) - |K(z_1,\xi)|^2}} \times \left(K(z,\xi) - \lambda\frac{K(z_1,\xi)}{K(z_1,z_1)}K(z,z_1)\right)$$

экстремальна,

3) *имеет место равенство*

$$E(\xi,z_1,\delta,X) = \sqrt{1-\frac{\varepsilon^2}{K(z_1,z_1)}}\sqrt{K(\xi,\xi) - \frac{|K(z_1,\xi)|^2}{K(z_1,z_1)}} + \varepsilon\frac{|K(z_1,\xi)|}{K(z_1,z_1)}.$$

Перечислим некоторые примеры гильбертовых пространств с воспроизводящими ядрами:

1) H_2, $\quad K(\xi,z) = (1-\xi\overline{z})^{-1}$, $\quad (f,g) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\overline{g(e^{i\theta})}\,d\theta$,

2) A_2, $\quad K(\xi,z) = (1-\xi\overline{z})^{-2}$, $\quad (f,g) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_D f(z)\overline{g(z)}\,d\sigma(z)$,

3) h_2, $\quad K(\xi,z) = 2\,\mathrm{Re}(1-\xi\overline{z})^{-1} - 1$,
$$(u,v) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(e^{i\theta})v(e^{i\theta})\,d\theta,$$

4) a_2, $\quad K(\xi,z) = 2\,\mathrm{Re}(1-\xi\overline{z})^{-2} - 1$,
$$(u,v) = \frac{1}{\pi}\int_D u(z)v(z)\,d\sigma(z).$$

Отметим, что можно получить обобщение леммы Шварца, аналогичное (9):

$$\sup_{\substack{f\in BX\\ |f(z_1)|\le\delta}} |f(\xi)| = E(\xi, z_1, \delta, X),$$

где $E(\xi, z_1, \delta, X)$ находится из соответствующего предложения для $X = H_p, A_p, h_p$ и a_2.

Положим $D(\xi, z_1, \delta, X) = \{z \in D : |g_0(z)| \le \delta\}$, где $X = H_p, A_p, h_p$ или a_2, а $g_0(z)$ — экстремальная функция для соответствующей задачи восстановления. Если взять информационный оператор $\widetilde{I}f = f_{|D(\xi,z_1,\delta,X)}$ вместо оператора $If = f(z_1)$ и в качестве пространства Y — пространство непрерывных в $D(\xi, z_1, \delta, X)$ функций с нормой

$$\|y\| = \sup_{z\in D(\xi,z_1,\delta,X)} |y(z)|,$$

то из следствия 1 получим, что оптимальный метод, экстремальная функция и погрешность оптимального восстановления остаются прежними. Таким образом, дополнительная информация (с той же погрешностью) о поведении функции на множестве $D(\xi, z_1, \delta, X)$ не уменьшает погрешности оптимального восстановления. Иными словами, точка z_1 образует некоторое “теневое” множество, любая дополнительная информация в котором бесполезна.

3. Оптимальное восстановление производной по неточным данным. Вернемся к задаче (1) для $X = H_p$, $Z = \mathbb{C}$, $Y = l_q^2$, $Lf = f'(0)$, $If = (f(-h), f(h))$, $h \in (0,1)$. Погрешность оптимального восстановления обозначим через $E'_q(h, \delta, H_p)$.

Существует хорошо известный метод

$$f'(0) \approx \frac{f(h) - f(-h)}{2h},$$

который не оптимален даже при $\delta = 0$ (см. [12]). В работе [2] было показано, что метод

$$f'(0) \approx (1 - h^4)\frac{f(h) - f(-h)}{2h}$$

оптимален для $\delta = 0$ и $p = \infty$. Из работы [8] следует, что этот же метод оптимален для $\delta = 0$ и всех $1 \le p \le \infty$. Более того, он же оптимален для $\delta = 0$ и $X = h_\infty$ (см. [9]).

Теперь рассмотрим случай, когда значения функций в точках $-h$ и h известны с погрешностью, не превышающей δ, в норме l_q^2, т. е. известны y_1 и y_2 такие, что

$$|f(-h) - y_1|^q + |f(h) - y_2|^q \le \delta^q, \quad 1 \le q < \infty,$$
$$\max\{|f(-h) - y_1|, |f(h) - y_2|\} \le \delta, \quad q = \infty.$$

Положим

$$\varepsilon_p = \begin{cases} 1/p, & 1 \le p < \infty, \\ 0, & p = \infty, \end{cases} \qquad \delta_1 = h2^{\varepsilon_q - \varepsilon_p}(1+h^2)^{-\varepsilon_p}, \quad \delta_2 = h2^{\varepsilon_q},$$

$$\alpha(z) = \begin{cases} 1, & 0 \le \delta < \delta_1, \\ \dfrac{a^2 - z^2}{1 - a^2 z^2}, & \delta \ge \delta_1 \end{cases}$$

Пусть $a \in [h, 1]$ является решением уравнения

$$\frac{h(a^2 - h^2)(1 - a^2h^2)^{2\varepsilon_p - 1}}{\alpha(h)(1 - h^4)^{\varepsilon_p}(1 - 2a^2h^2 + a^4)^{\varepsilon_p}} = \delta 2^{-\varepsilon_q}, \tag{16}$$

где $0 \le \delta \le \delta_2$ (существование решения следует из непрерывности функции, стоящей в левой части уравнения). Для $\delta > \delta_2$ положим $a = h$.

Предложение 5. *При всех $\delta \ge 0$ и $1 \le p, q \le \infty$*

1) *метод*

$$f'(0) \approx S_0 y = \frac{\alpha(h)(1 - a^2h^2)^{2(1-\varepsilon_p)}}{\alpha(0)(1 - h^4)^{1 - 2\varepsilon_p}} \cdot \frac{y_2 - y_1}{2h}$$

оптимален,

2) *функция*

$$g_0(z) = \left(\frac{1 - h^4}{1 - 2a^2h^2 + a^4} \right)^{\varepsilon_p} \frac{z(a^2 - z^2)(1 - a^2z^2)^{2\varepsilon_p - 1}}{\alpha(z)(1 - h^2z^2)^{2\varepsilon_p}}$$

экстремальна,

3) *имеет место равенство*

$$E_q'(h, \delta, H_p) = \frac{a^2}{\alpha(0)} \left(\frac{1 - h^4}{1 - 2a^2h^2 + a^4} \right)^{\varepsilon_p}.$$

Доказательство. Положим

$$g(z) = \frac{z(a^2 - z^2)(1 - a^2z^2)^{2\varepsilon_p - 1}}{\alpha(z)(1 - h^2z^2)^{2\varepsilon_p}}, \quad \varphi(z) = \left(\frac{1 - a^2z^2}{1 - h^2z^2} \right)^2.$$

Для всех $f \in H_p$ из теоремы о вычетах имеем

$$f'(0) - S_0 I f = -\frac{h^2}{\alpha(0)} \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{\alpha(z)(1 - a^2z^2)^{2(1-\varepsilon_p)}}{z^2(z^2 - h^2)(1 - h^2z^2)^{1 - 2\varepsilon_p}} f(z)\, dz$$

$$= \begin{cases} \dfrac{h^2}{\alpha(0)} \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \overline{g(e^{i\theta})} |g(e^{i\theta})|^{p-2} f(e^{i\theta})\, d\theta, & 1 \le p < \infty, \\ \dfrac{h^2}{\alpha(0)} \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \overline{g(e^{i\theta})} |\varphi(e^{i\theta})| f(e^{i\theta})\, d\theta, & p = \infty. \end{cases}$$

При $f = g$ из этих равенств получаем

$$\|g\|_{H_p}^p = \|\varphi\|_{H_1} = \frac{1 - 2a^2h^2 + a^4}{1 - h^4}.$$

Если $p = \infty$, то $|g(e^{i\theta})| \equiv 1$. Для применения следствия 2 остается доказать, что

$$Ig_0 = \delta a^* = \frac{\delta}{2^{\varepsilon_q}}(-1, 1).$$

Так как $g_0(-h) = -g_0(h)$, требуемое следует из равенства $g_0(h) = \delta 2^{-\varepsilon_q}$, которое совпадает с (16). Предложение доказано. $\square$

Заметим, что $S_0 y \equiv 0$ для $\delta \geq 2^{\varepsilon_q}$. Если $\delta < 2^{\varepsilon_q}$, то можно рассмотреть задачу о нахождении оптимального значения h_0, т. е. такого значения, что

$$E'_q(h_0, \delta, H_p) = \min_{h \in (0,1)} E'_q(h, \delta, H_p).$$

Приведем решение этой задачи для $p = \infty$.

Предложение 6. *Пусть $p = \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ и $0 \leq \delta < 2^{\varepsilon_q}$. Тогда оптимальное значение h_0 удовлетворяет уравнению*

$$\delta h_0^4 + 2^{1+\varepsilon_q} h_0^3 - \delta^2 2^{1-\varepsilon_q} h_0 - \delta = 0. \tag{17}$$

При этом $E'_q(h_0, \delta, H_\infty) = h_0^2$.

Для h_0 справедливо равенство

$$h_0 = \sqrt{k}\,\mathrm{sn}(K/3, k),$$

в котором k определяется из соотношений

$$\sqrt{k} = 2h_1^{1/4} \frac{\sum\limits_{m=0}^{\infty} h_1^{m(m+1)}}{1 + 2\sum\limits_{m=1}^{\infty} h_1^{m^2}}, \quad h_1 = e^{-\frac{\pi}{3}\frac{\Lambda'}{\Lambda}}, \tag{18}$$

или

$$\frac{K'}{K} = \frac{\Lambda'}{3\Lambda}, \tag{19}$$

где K, Λ — полные эллиптические интегралы первого рода для модулей k, $\lambda = \delta^2 4^{-\varepsilon_q}$, а K', Λ' — для дополнительных модулей.

Доказательство. Из предложения 5 имеем

$$E'_q(h_0, \delta, H_\infty) = \begin{cases} a^2, & 0 \leq \delta < h 2^{\varepsilon_q}, \\ 1, & \delta \geq h 2^{\varepsilon_q}, \end{cases}$$

где $a \in [h, 1]$ определяется из уравнения

$$h\frac{a^2 - h^2}{1 - a^2 h^2} = \frac{\delta}{2^{\varepsilon_q}}. \tag{20}$$

Нетрудно убедиться, что минимальное значение a^2, удовлетворяющее равенству (20), достигается для единственного значения $h_0 \in (0, 1)$, определяемого уравнением (17).

Дифференцируя равенство (20), имеем

$$\frac{a^2-h^2}{1-a^2h^2}-2h^2\frac{1-a^4}{(1-a^2h^2)^2}+2aa'h\frac{1-h^4}{(1-a^2h^2)^2}=0.$$

Таким образом, если h_0 — минимум, то $g_0'(h_0)=0$, где

$$g_0(z)=z\frac{a^2-z^2}{1-a^2z^2}. \tag{21}$$

Теперь достаточно найти функцию $g_0(z)$ вида (21) такую, что $g_0(h_0)=\delta 2^{-\varepsilon_q}$ и $g_0'(h_0)=0$ для некоторого $h_0\in(0,1)$. Из леммы 2.2 работы [7] следует, что она является произведением Бляшке порядка 3 с минимальной нормой, равной

$$\|g_0\|=\max_{z\in[-\sqrt{k},\sqrt{k}]}|g_0(z)|=\delta 2^{-\varepsilon_q},$$

где k определяется из условий $|g_0(-\sqrt{k})|=|g_0(\sqrt{k})|=\delta 2^{-\varepsilon_q}$. Из [13] получаем

$$g_0(z)=z\frac{k\,\mathrm{sn}^2(2K/3,k)-z^2}{1-k\,\mathrm{sn}^2(2K/3,k)z^2}.$$

Используя первое главное преобразование порядка 3 (см. [14]), запишем эту функцию в виде

$$g_0(z)=\sqrt{\lambda}\,\mathrm{sn}\left(\frac{3\Lambda}{K}u,\lambda\right),\quad z=\sqrt{k}\,\mathrm{sn}(u,k),$$

где $\lambda=\delta^2 4^{-\varepsilon_q}$, а k удовлетворяет (18), (19). Если положить $h_0=\sqrt{k}\,\mathrm{sn}(K/3,k)$, то $g_0(h_0)=\delta 2^{-\varepsilon_q}$ и $g_0'(h_0)=0$. Предложение доказано. □

С помощью (17) легко показать, что

$$h_0=2^{-(1+\varepsilon_q)/3}\delta^{1/3}+O\left(\delta^{5/3}\right)$$

и, следовательно,

$$\min_{h\in(0,1)}E_q'(h_0,\delta,H_\infty)=4^{-(1+\varepsilon_q)/3}\delta^{2/3}+O\left(\delta^2\right).$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Марчук А. Г., Осипенко К. Ю. Наилучшее приближение функций, заданных с погрешностью в конечном числе точек // Мат. заметки. 1975. Т. 17, вып. 3. С. 359–368.

[2] Micchelli C. A., Rivlin T. J. A survey of optimal recovery // Optimal Estimation in Approximation Theory. N.Y.: Plenum Press, 1977. P. 1–53.

[3] Micchelli C. A., Rivlin T. J. Lectures on optimal recovery // Lectures Notes in Math. 1985. V. 1129. P. 21-93.

[4] Rivlin T. J. A survey of recent results in optimal recovery // Polynomial and Spline Approximation: Proc. NATO Adv. Study Inst. Calgary, 1978. P. 225–245. (Dordrecht etc., 1979).

[5] Осипенко К. Ю. Наилучшее методы приближения аналитических функций, заданных с погрешностью // Мат. сб. 1982. Т. 118, № 3. С. 350–370.

[6] Осипенко К. Ю. Задача Хейнса и оптимальная экстраполяция аналитических функций, заданных с ошибкой // Мат. сб. 1985. Т. 126, № 4. С. 566–575.

[7] Osipenko K. Yu. On optimal extrapolation and interpolation of fuzzy analytic functions // Anal. Math. 1987. V. 13, № 3. P. 199–210.

[8] Осипенко К. Ю., Стесин М. И. О задачах восстановления в пространствах Харди и Бергмана // Мат. заметки. 1991. Т. 49, вып. 4. С. 95–104.

[9] Осипенко К. Ю. Наилучшие и оптимальные методы восстановления на классах гармонических функций // Мат. сб. 1991. Т. 182, № 5. С. 723–745.

[10] Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966.

[11] Melkman A. A., Micchelli C. A. Optimal estimation of linear operators in Hilbert spaces from inaccurate data // SIAM J. Numer. Anal. 1979. V. 16, № 1. P. 87–105.

[12] Rivlin T. J. The optimal recovery of functions // Contemp. Math. 1982. V. 9. P. 121–151.

[13] Осипенко К. Ю. Оптимальная интерполяция аналитических функций // Мат. заметки. 1972. Т. 12, вып. 4. С. 465–476.

[14] Ахиезер Н. И. Элементы теории эллиптических функций. М.: Наука, 1970.