К. Ю. Осипенко

Л А Б О Р А Т О Р Н А Я Р А Б О Т А
Численное интегрирование функций по формуле Симпсона

Порядок выполнения работы:

1. Изучить порядок выполнения вычислений определенного интеграла по формуле Симпсона и форму записи этих вычислений на примере в описании работы
2. Численное интегрирование функции по формуле Симпсона на заданном отрезке с заданном шагом
3. В отчете по работе должны быть приведены таблица вычислений и результат — приближенное значение определенного интеграла

Численное интегрирование функций по формуле Симпсона

Сущность этого метода заключается в замене подынтегральной функции многочленом второй степени, совпадающим с функцией в трех точках. Отрезок интегрирования $[a, b]$ разделим на две равные части точкой x_1. Введем обозначения

$$b - x_1 = x - a_1 = h, \quad y_0 = f(a), \quad y_1 = f(x_1), \quad y_2 = f(b).$$

Отсюда получим

$$x_1 = a + h, \quad b = a + 2h.$$

Тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{a+2h} f(x)\,dx.$$

Заменим переменную интегрирования, положив

$$x - a = t, \quad dx = dt.$$

Здесь значение $x = a$ соответствует значению $t = 0$, значению $x = x_1$ соответствует $t = h$, значению $x = b$ соответствует $t = 2h$. Тогда получим

$$\int_a^{a+2h} f(x)\,dx = \int_0^{2h} f(t + a)\,dt.$$

Далее, подынтегральную функцию $f(t + a)$ заменяем многочленом второй степени $P_2(t)$, совпадающим с функцией $f(t + a)$ при $t = 0, t + h, t + 2h$ (это соответствует замене функции многочленом второй степени относительно переменной x)

$$P_2(t) = c_2t^2 + c_1t + c_0.$$

По условию должны выполняться следующие равенства

$$y_0 = c_0, \quad y_1 = c_2h^2 + c_1h + c_0, \quad y_2 = 4c_2h^2 + 2c_1h + c_0.$$

Решая эту систему уравнений относительно c_0, c_1, c_2, получим

$$c_0 = y_0, \quad c_1 = \frac{-3y_0 + 4y_1 - y_2}{2h}, \quad c_2 = \frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{2h^2}.$$

Имеем

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_0^{2h} (c_2t^2 + c_1t + c_0)\,dt = \frac{8}{3}c_2h^3 + 2c_1h^2 + 2c_0h.$$

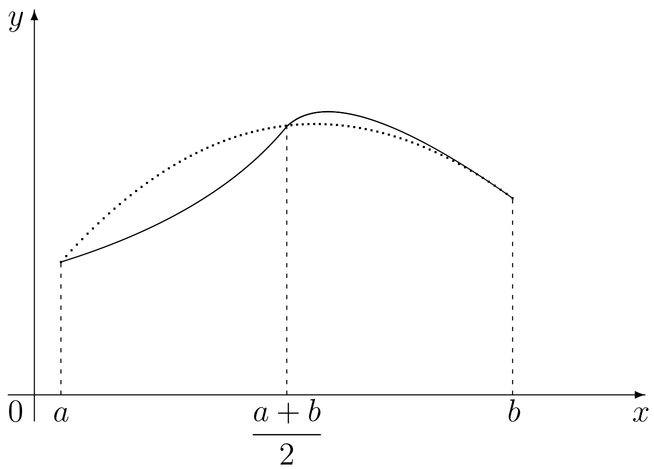
Подставив вместо c_0, c_1, c_2 их выражения, получим формулу для приближенного вычисления интеграла:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2), \tag{1}$$

где $h = \dfrac{b-a}{2}$, или

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Геометрический смысл этой формулы состоит в том, что график функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ заменяем параболой, уравнение которой имеет вид $y = a_2x^2 + a_1x + a_0$. Парабола пересекает кривую $y = f(x)$ в точках $x = a$, $x = b$, $x = \dfrac{a+b}{2}$. При этом площадь криволинейной трапеции заменяется площадью параболической трапеции. На чертеже 1 сплошной линией обозначен график функции $y = f(x)$, а пунктирной — парабола.



ЧЕРТЕЖ 1.

Для получения более точного результата разделим отрезок $[a, b]$ на $2n$ частей точками $a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{2n} = b$. Введем такие обозначения: $y_0 = f(a)$, $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, $\ldots$, $y_{2n} = f(x_{2n})$,

$h = x_{2n} - x_{2n-1} = \ldots = x_2 - x_1 = x_1 - x_0$. Так как

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{x_2} f(x)\,dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx + \ldots + \int_{x_{2n-2}}^{b} f(x)\,dx,$$

то, применяя к каждому из слагаемых формулу (1), получим

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) + \ldots + \frac{h}{3}(y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n})$$

или

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left[y_0 + y_{2n} + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2n-2})\right].$$

Учитывая, что $h = \dfrac{b-a}{2n}$, окончательно будем иметь

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2n}\left(y_0 + y_{2n} + 4\Sigma_1 + 2\Sigma_2\right), \qquad (2)$$

где

$$\Sigma_1 = y_1 + y_3 + \ldots + y_{2n-1},$$
$$\Sigma_2 = y_2 + y_4 + \ldots + y_{2n-2}.$$

Эта формула приближенного интегрирования называется формулой Симпсона или формулой парабол.

Вычисления оформляются в таблицу, подобную таблице 1. Первый столбец этой таблицы — индексы: $0, 1, \ldots, 2n$, второй столбец — соответствующие значения x_0, $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_0 + 2h$, $\ldots$, $x_{2n} = x_0 + 2nh$. Средние столбцы отводятся под промежуточные значения функции, предпоследний столбец — под значения $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$, $\ldots$, $y_{2n} = f(x_{2n})$. В последний столбец удобно поставить коэффициент, с которым соответствующее значение $f(x)$ входит в формулу (2), т. е. 1, 2, 4. После заполнения таблицы вычисляют суммы Σ_1 и Σ_2, которые подставляют в формулу (2).

Пример. Вычисление интеграла $\int_{0,2}^{1,8} \sqrt{1 + x^2 + x^4}\,dx$ с шагом $h = 0,1$, т. е. при $n = 8$.

Таблица 1.

0	0,2	0,04	0,0016	1,0416	1,0206	1
1	0,3	0,09	0,0081	1,0981	1,0470	4
2	0,4	0,16	0,0256	1,1856	1,0888	2
3	0,5	0,25	0,0625	1,3125	1,1456	4

4	0,6	0,36	0,1296	1,4896	1,2205	2
5	0,7	0,49	0,2401	1,7301	1,3153	4
6	0,8	0,64	0,4096	2,0496	1,4316	2
7	0,9	0,81	0,6561	2,4861	1,5704	4
8	1,0	1,00	1,0000	3,000	1,7321	2
9	1,1	1,21	1,4641	3,6741	1,9168	4
10	1,2	1,44	2,0736	4,5136	2,1245	2
11	1,3	1,69	2,8561	5,5461	2,3550	4
12	1,4	1,96	3,8416	6,8016	2,6080	2
13	1,5	2,25	5,0625	8,3125	2,8831	4
14	1,6	2,56	6,5536	10,1136	3,1802	2
15	1,7	2,89	8,3521	12,2421	3,4989	4
16	1,8	3,24	10,4976	14,7376	3,8390	1

Получаем:

$$\Sigma_1 = 15,7331,$$
$$\Sigma_2 = 13,3857,$$
$$\int_{0,2}^{1,8} \sqrt{1+x^2+x^4}\,dx \approx 3,15211.$$

Варианты заданий

Вычислить $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ по формуле Симпсона с шагом h. Параметры m и n могут принимать значения $0, 1, 2, \ldots$.

Вариант 1.

$$\int_{0,2}^{1,6} \frac{1+x^2}{\sqrt{a+bx^4}}\,dx,$$
$$a = 1+0,2n, \quad b = 1+0,25m, \quad h = 0,2.$$

Вариант 2.

$$\int_{0,4}^{1,8} \sqrt{a+x^2+bx^3}\,dx,$$
$$a = 2+0,1n, \quad b = 1+0,05m, \quad h = 0,1.$$

Вариант 3.

$$\int_{0,3}^{1,7} \sqrt{\frac{a+x^2}{b+x^4}}\,dx,$$
$$a = 3+0,2n, \quad b = 2+0,25m, \quad h = 0,1.$$

Вариант 4.

$$\int_{0,2}^{3} \frac{\sqrt{a+x^3}}{1+bx^2}\,dx,$$

$$a = 1 + 0,25n, \quad b = 1 + 0,1m, \quad h = 0,2.$$

Вариант 5.

$$\int_{0,3}^{3,1} \frac{\sqrt{1+ax^2+bx^4}}{1+x^2}\,dx,$$

$$a = 1 + 0,1n, \quad b = 1 + 0,2m, \quad h = 0,2.$$