УДК 517.5

ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ПО НЕТОЧНЫМ ИЗМЕРЕНИЯМ

Г. Г. МАГАРИЛ-ИЛЬЯЕВ, К. Ю. ОСИПЕНКО

Введение

Первоначальным стимулом для написания данной работы послужил следующий вопрос: если имеется возможность измерить с известными погрешностями температуру некоторого тела в моменты времени $t_1, \ldots, t_n$, то как наилучшим образом воспользоваться этой информацией, чтобы восстановить его температуру в какой-нибудь другой момент времени?

Мы отвечаем на этот вопрос в задаче о распространении тепла в пространстве $\mathbb{R}^d$. Точнее говоря, ставится задача об оптимальном восстановлении решения уравнения теплопроводности на $\mathbb{R}^d$ в некоторый момент времени по приближенным измерениям этого решения в другие моменты времени и приводятся явные выражения для оптимального метода восстановления и его погрешности.

На практике, помимо измерений, имеется обычно еще априорная информация о распределении температур, заключающаяся в том, что в какие-то моменты времени известны границы, за которые температура не может выйти. В данной работе дается точное решение и этой задачи.

Статья организована следующим образом. Первые три параграфа посвящены постановке и решению задачи оптимального восстановления решения уравнения теплопроводности по неточным измерениям. В четвертом параграфе аналогичная задача решается при наличии априорной информации. Комментарии исторического и библиографического характера собраны в пятом параграфе.

1. Постановка задачи

Распространение тепла в $\mathbb{R}^d$ описывается, как хорошо известно, уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u \tag{1}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №08-01-00450 и №08–01–90001) и Программы государственной поддержки ведущих научных школ Российской Федерации (НШ-3233.2008.1).

(где Δ — оператор Лапласа в $\mathbb{R}^d$ и $u(\cdot,\cdot)$ — функция на $[0,\infty)\times\mathbb{R}^d$) с заданным начальным распределением температуры

$$u(0,\cdot)=u_0(\cdot). \tag{2}$$

Мы предполагаем, что $u_0(\cdot)\in L_2(\mathbb{R}^d)$. Единственным решением задачи (1)–(2) при $t>0$ является интеграл Пуассона

$$u(t,x)=u(t,x;u_0(\cdot))=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{\mathbb{R}^d}e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4t}}u_0(\xi)\,d\xi, \tag{3}$$

где $x=(x_1,\dots,x_d)$, $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_d)$, $|x-\xi|^2=\sum_{i=1}^d(x_i-\xi_i)^2$, и при этом $u(t,\cdot)\to u_0(\cdot)$ при $t\to 0$ в метрике $L_2(\mathbb{R}^d)$.

Ставится следующая задача. Пусть в моменты времени $0\le t_1<\ldots<t_n$ приближенно известны распределения температур $u(t_1,\cdot),\dots,u(t_n,\cdot)$. Точнее говоря, известны функции $y_i(\cdot)\in L_2(\mathbb{R}^d)$ такие, что

$$\|u(t_i,\cdot)-y_i(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\le\delta_i,\quad i=1,\dots,n,$$

где $\delta_i>0$, $i=1,\dots,n$. Мы хотим каждому такому набору функций сопоставить функцию из $L_2(\mathbb{R}^d)$, которая бы в некотором смысле наилучшим образом аппроксимировала истинное распределение температуры в $\mathbb{R}^d$ в фиксированный момент времени τ.

Под этим понимается следующее. Любое отображение m из $(L_2(\mathbb{R}^d))^n=L_2(\mathbb{R}^d)\times\ldots\times L_2(\mathbb{R}^d)$ в $L_2(\mathbb{R}^d)$ объявляется методом восстановления (температуры в $\mathbb{R}^d$ в момент времени τ по данной информации). Погрешностью этого метода называем величину

$$e(\tau,\overline{\delta},m)=\sup_{\substack{u_0(\cdot),\ \overline{y}(\cdot)\in(L_2(\mathbb{R}^d))^n\\ \|u(t_i,\cdot)-y_i(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\le\delta_i,\ i=1,\dots,n}}\|u(\tau,\cdot)-m(\overline{y}(\cdot))(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)},$$

где $\overline{y}(\cdot)=(y_1(\cdot),\dots,y_n(\cdot))$ и $\overline{\delta}=(\delta_1,\dots,\delta_n)$.

Нас интересует величина

$$E(\tau,\overline{\delta})=\inf_{m\colon (L_2(\mathbb{R}^d))^n\to L_2(\mathbb{R}^d)}e(\tau,\overline{\delta},m),$$

которую назовем *погрешностью оптимального восстановления* и метод $\widehat{m}$, на котором нижняя грань достигается, т. е. для которого

$$E(\tau,\overline{\delta})=e(\tau,\overline{\delta},\widehat{m}),$$

называемый *оптимальным методом восстановления* (температуры в $\mathbb{R}^d$ в момент времени τ по данной информации).

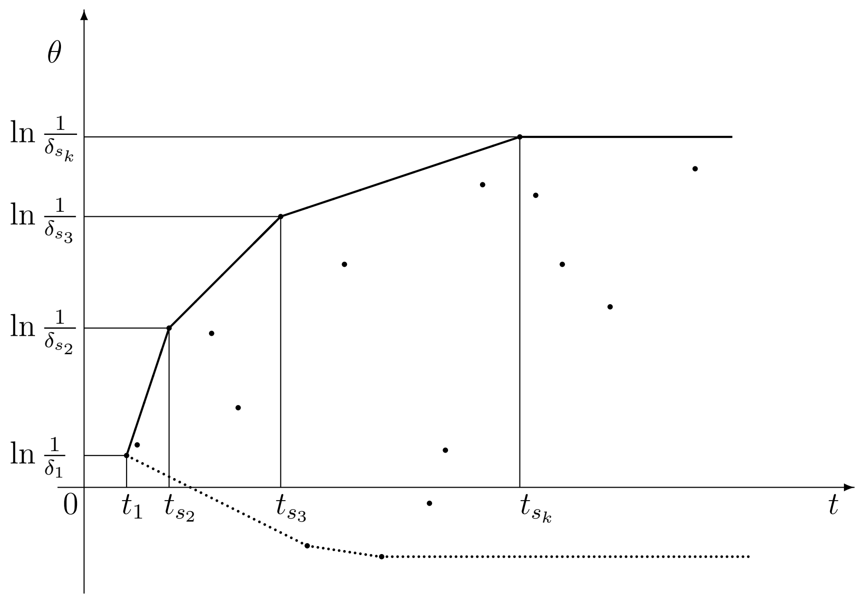
2. Формулировка теоремы

Перед формулировкой теоремы сделаем некоторые построения. На двумерной плоскости (t,x) построим множество

$$M=\operatorname{co}\{\,(t_j,\ln(1/\delta_j)),\ 1\le j\le n\,\}+\{\,(t,0)\mid\ t\ge 0\,\},$$

где $\operatorname{co}A$ обозначает выпуклую оболочку множества A.

Определим функцию $\theta(\cdot)$ на $[0,\infty)$ равенством: $\theta(t) = \max\{\, x \mid (t,x) \in M\,\}$, причем $\theta(t) = -\infty$, если $(t,x) \notin M$ для всех x. Ясно, что на $[t_1,\infty)$ функция $\theta(\cdot)$ — вогнутая ломаная. Обозначим через $t_{s_1} < \ldots < t_{s_k}$ ее точки излома (считая t_1 также точкой излома, т. е. $t_{s_1} = t_1$), которые, очевидно, являются подмножеством точек $\{t_1,\ldots,t_n\}$ (см. рисунок, на котором изображенные точки имеют координаты $(t_i, \ln(1/\delta_i)$, жирная кривая — график функции $\theta(\cdot)$).



Формула (3) для каждого $t>0$ определяет линейный непрерывный оператор в $L_2(\mathbb{R}^d)$,[1] который обозначим P_t и если через P_0 обозначить тождественный оператор, то $u(t,\cdot;u_0(\cdot)) = P_t u_0(\cdot)$ для всех $t \ge 0$.

Теорема 1. *Для любого $\tau \ge 0$ справедливо равенство*

$$E(\tau,\overline{\delta}) = e^{-\theta(\tau)}.$$

(1) *Если $t_1 > 0$ и $0 \le \tau < t_1$, то любой метод является оптимальным;*
(2) *если $\tau = t_{s_j}$, $1 \le j \le k$, то метод $\widehat{m}$, определенный равенством $\widehat{m}(\overline{y}(\cdot))(\cdot) = y_{s_j}(\cdot)$, является оптимальным;*
(3) *если $k \ge 2$ и $\tau \in (t_{s_j}, t_{s_{j+1}})$, $1 \le j \le k-1$, то метод $\widehat{m}$, определенный равенством*

$$\widehat{m}(\overline{y}(\cdot))(\cdot) = (K_{s_j} * y_{s_j})(\cdot) + (K_{s_{j+1}} * y_{s_{j+1}})(\cdot),$$

[1]Это следует, например, из неравенства Юнга, так как интеграл Пуассона есть свертка ограниченной функции и функции из $L_2(\mathbb{R}^d)$.

где $K_{s_j}(\cdot)$ *и* $K_{s_{j+1}}(\cdot)$ *— функции из* $L_2(\mathbb{R}^d)$*, преобразования Фурье которых имеет вид*

$$FK_{s_j}(\xi)=\frac{(t_{s_{j+1}}-\tau)\delta^2_{s_{j+1}}e^{-|\xi|^2(\tau-t_{s_j})}}{(t_{s_{j+1}}-\tau)\delta^2_{s_{j+1}}+(\tau-t_{s_j})\delta^2_{s_j}e^{-2|\xi|^2(t_{s_{j+1}}-t_{s_j})}},$$

$$FK_{s_{j+1}}(\xi)=\frac{(\tau-t_{s_j})\delta^2_{s_j}e^{-|\xi|^2(\tau+t_{s_{j+1}}-2t_{s_j})}}{(t_{s_{j+1}}-\tau)\delta^2_{s_{j+1}}+(\tau-t_{s_j})\delta^2_{s_j}e^{-2|\xi|^2(t_{s_{j+1}}-t_{s_j})}},$$

является оптимальным;

(4) *если* $\tau>t_{s_k}$*, то метод* $\widehat{m}$*, определенный равенством*

$$\widehat{m}(\overline{y}(\cdot))(\cdot)=P_{\tau-t_{s_k}}y_{s_k}(\cdot),$$

является оптимальным.

Сделаем несколько замечаний по поводу сформулированной теоремы.

1. Если $t_1>0$ и $0\le\tau<t_1$, то $\theta(\tau)=-\infty$ и значит, $E(\tau,\overline{\delta})=+\infty$, т.е. прошлое нельзя восстановить по неточному настоящему. В этом случае любой метод можно считать оптимальным.

2. Отметим, что оптимальный метод линеен, “сглаживает” наблюдения (свертка — бесконечно дифференцируемая функция) и использует информацию не более чем о двух измерениях до и после времени τ, либо только до времени τ (если $\tau>t_{s_k}$).

3. Если $\tau=t_i$ и t_i не является точкой излома функции $\theta(\cdot)$, то оптимальный метод позволяет данное измерение уточнить.

4. Случай $\tau>t_{s_k}$ означает, что самое точное измерение температуры было произведено раньше времени τ. В этой ситуации оптимальный метод — решение уравнения теплопроводности в момент времени $\tau-t_{s_k}$ с начальным распределением температуры $y_{s_k}(\cdot)$.

3. Доказательство теоремы 1

Доказательство состоит из двух частей: оценка снизу погрешности оптимального восстановления $E(\tau,\overline{\delta})$ и оценка сверху этой величины с предъявлением оптимального метода.

1. *Оценка снизу величины* $E(\tau,\overline{\delta})$. Напомним, что P_t — линейный непрерывный оператор в $L_2(\mathbb{R}^d)$, который определен формулой (3) при $t>0$ и P_0 — тождественный оператор.

Пусть $\tau\ge0$. Рассмотрим задачу

$$(4)\quad \|P_\tau u_0(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\to\max,\quad \|P_{t_j}u_0(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\le\delta_j,\quad j=1,\dots,n,\quad u_0(\cdot)\in L_2(\mathbb{R}^d).$$

Обозначим ее значение (т. е. величину верхней грани $\|P_\tau u_0(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}$ при данных ограничениях) через S и покажем, что $E(\tau,\overline{\delta})\ge S$.

Действительно, пусть $\overline{u}_0(\cdot)$ — допустимая функция в (4) (т. е. $\overline{u}_0(\cdot)$ удовлетворяет всем ограничениям в задаче). Тогда $-\overline{u}_0(\cdot)$ также допустима в (4) и мы имеем для любого $m\colon (L_2(\mathbb{R}^d))^n \to L_2(\mathbb{R}^d)$

$$2\|P_\tau\overline{u}_0(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = \|P_\tau\overline{u}_0(\cdot) - m(0)(\cdot) + m(0)(\cdot) - P_\tau(-\overline{u}_0(\cdot))\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \le 2 \sup_{\substack{u_0(\cdot)\in L_2(\mathbb{R}^d)\\ \|P_{t_j}u_0(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\le\delta_j,\ j=1,\dots,n,}} \|P_\tau u_0(\cdot) - m(0)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \le$$
$$\le 2 \sup_{\substack{u_0(\cdot)\in L_2(\mathbb{R}^d),\ \overline{y}(\cdot)\in(L_2(\mathbb{R}^d))^n\\ \|P_{t_j}u_0(\cdot)-y_j(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\le\delta_j,\ j=1,\dots,n}} \|P_\tau u_0(\cdot) - m(\overline{y}(\cdot))(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

Переходя справа к нижней грани по всем методам m, а слева к верхней грани по всем допустимым функциям в (4), получаем, что $E(\tau,\overline{\delta}) \ge S$.

Следующий шаг — доказательство того, что $S = e^{-\theta(\tau)}$. Пусть $F\colon L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)$ — преобразование Фурье. Хорошо известно (см., например, [1]), что для любого $t \ge 0$ справедливо равенство

$$F(P_t u_0(\cdot))(\xi) = e^{-|\xi|^2 t} F u_0(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^d,$$

и поэтому по теореме Планшереля квадрат значения задачи (4) равен значению такой задачи

$$(5)\quad \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-2|\xi|^2\tau}|Fu_0(\xi)|^2\,d\xi \to \max,$$
$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-2|\xi|^2 t_j}|Fu_0(\xi)|^2\,d\xi \le \delta_j^2, \quad j=1,\dots,n, \quad u_0(\cdot)\in L_2(\mathbb{R}^d).$$

Можно показать, что в этой задаче нет решения, поэтому мы рассмотрим ее "расширение", а именно, следующую задачу (заменяя формально $(2\pi)^{-d}|Fu_0(\xi)|^2\,d\xi$ на положительную меру):

$$(6)\quad \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2|\xi|^2\tau}\,d\mu(\xi) \to \max,$$
$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-2|\xi|^2 t_j}\,d\mu(\xi) \le \delta_j^2, \quad j=1,\dots,n, \quad d\mu(\cdot)\ge 0.$$

Это выпуклая задача. Ее функция Лагранжа имеет вид

$$\mathcal{L}(d\mu(\cdot),\lambda) = \lambda_0\int_{\mathbb{R}^d} e^{-2|\xi|^2\tau}\,d\mu(\xi) + \sum_{j=1}^n \lambda_j\left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{-2|\xi|^2 t_j}\,d\mu(\xi) - \delta_j^2\right),$$

где $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1\dots,\lambda_n)$ — набор множителей Лагранжа.

Если мы найдем допустимую в (6) меру $d\widehat{\mu}(\cdot)$ и множители Лагранжа $\widehat{\lambda}_0 < 0$, $\widehat{\lambda}_j \ge 0$, $1 \le j \le n$, такие, что

$$(7)\quad \min_{d\mu(\cdot)\ge 0}\mathcal{L}(d\mu(\cdot),\widehat{\lambda}) = \mathcal{L}(d\widehat{\mu}(\cdot),\widehat{\lambda}),$$

где $\widehat{\lambda} = (\widehat{\lambda}_0, \widehat{\lambda}_1, \ldots, \widehat{\lambda}_n)$ и

$$\widehat{\lambda}_j \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{-2|\xi|^2 t_j}\, d\widehat{\mu}(\xi) - \delta_j^2 \right) = 0, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{8}$$

то $d\widehat{\mu}(\cdot)$ будет решением задачи (6). Действительно, пусть $d\mu(\cdot)$ — допустимая мера в (6). Тогда используя это обстоятельство (и учитывая, что $\widehat{\lambda}_j \geq 0$, $1 \leq j \leq n$), а затем (7) и (8), будем иметь

$$\widehat{\lambda}_0 \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2|\xi|^2\tau}\, d\mu(\xi) \geq \widehat{\lambda}_0 \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2|\xi|^2\tau}\, d\mu(\xi) + \\ + \sum_{j=1}^n \widehat{\lambda}_j \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{-2|\xi|^2 t_j}\, d\mu(\xi) - \delta_j^2 \right) \geq \widehat{\lambda}_0 \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2|\xi|^2\tau}\, d\widehat{\mu}(\xi) + \\ + \sum_{j=1}^n \widehat{\lambda}_j \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{-2|\xi|^2 t_j}\, d\widehat{\mu}(\xi) - \delta_j^2 \right) = \widehat{\lambda}_0 \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2|\xi|^2\tau}\, d\widehat{\mu}(\xi).$$

Деля на $\widehat{\lambda}_0 < 0$, получаем требуемое.

Из условий (7) и (8) видно, какими должны быть мера $d\widehat{\mu}(\cdot)$ и множители Лагранжа. В самом деле, запишем функцию Лагранжа в виде

$$\mathcal{L}(d\mu(\cdot), \lambda) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2|\xi|^2\tau} f(|\xi|^2)\, d\mu(\xi) - \sum_{j=1}^n \lambda_j \delta_j^2, \tag{9}$$

где

$$f(v) = \lambda_0 + \sum_{j=1}^n \lambda_j e^{-2v(t_j - \tau)}.$$

Отсюда видно, что если $f(|\xi|^2) \geq 0$ для всех $\xi \in \mathbb{R}^d$ и мера $d\widehat{\mu}(\cdot)$ сосредоточена в нулях этой функции, то для всех $d\mu(\cdot) \geq 0$ будем иметь: $\mathcal{L}(d\mu(\cdot), \lambda) \geq -\sum_{j=1}^n \lambda_j \delta_j^2 = \mathcal{L}(d\widehat{\mu}(\cdot), \lambda)$ т. е. выполняется условие (7). Но при любых неотрицательных $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ функция $f(\cdot)$ выпукла на $\mathbb{R}$ и поэтому если точка $v_0 \in \mathbb{R}$ такова, что $f(v_0) = f'(v_0) = 0$, то $f(v) \geq 0$ при всех $v \in \mathbb{R}$. Будем руководствоваться этими наблюдениями.

Рассмотрим отдельно три случая: (a) $\tau \geq t_1$ и справа от τ есть точка излома $\theta(\cdot)$, (b) $\tau \geq t_1$ и справа от τ нет точек излома $\theta(\cdot)$, (c) $\tau < t_1$.

(a) Пусть $\tau \in [t_{s_j}, t_{s_{j+1}})$. Положим $d\widehat{\mu}(\xi) = A\delta(\xi - \xi_0)$, где $\delta(\cdot - \xi_0)$ — дельта-функция в точке ξ_0, а A и ξ_0 выберем из условий

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-2|\xi|^2 t_k}\, d\widehat{\mu}(\xi) = A e^{-2|\xi_0|^2 t_k} = \delta_k^2, \quad k = s_j, s_{j+1}. \tag{10}$$

Отсюда нетрудно вывести, что

$$A = \delta_{s_j}^{\frac{2t_{s_{j+1}}}{t_{s_{j+1}} - t_{s_j}}} \delta_{s_{j+1}}^{-\frac{2t_{s_j}}{t_{s_{j+1}} - t_{s_j}}}$$

и
$$|\xi_0|^2 = \frac{\ln(\delta_{s_j}/\delta_{s_{j+1}})}{t_{s_{j+1}} - t_{s_j}} = \frac{\ln 1/\delta_{s_{j+1}} - \ln 1/\delta_{s_j}}{t_{s_{j+1}} - t_{s_j}}.$$
Такая точка $\xi_0 \in \mathbb{R}^d$ существует, так как из построения ломаной $\theta(\cdot)$ следует, что угловой коэффициент прямой, проходящей через точки $(t_{s_j}, \ln 1/\delta_{s_j})$ и $(t_{s_{j+1}}, \ln 1/\delta_{s_{j+1}})$, положителен.

Положим $\widehat{\lambda}_0 = -1$, $\widehat{\lambda}_k = 0$, $k \neq s_j, s_{j+1}$, а числа $\widehat{\lambda}_{s_j}$ и $\widehat{\lambda}_{s_{j+1}}$ выберем так, чтобы $f(|\xi_0|^2) = f'(|\xi_0|^2) = 0$, т. е. как решение линейной системы:
$$\begin{aligned}\lambda_{s_j} e^{-2|\xi_0|^2(t_{s_j}-\tau)} + \lambda_{s_{j+1}} e^{-2|\xi_0|^2(t_{s_{j+1}}-\tau)} &= 1,\\ \lambda_{s_j}(t_{s_j}-\tau) e^{-2|\xi_0|^2(t_{s_j}-\tau)} + \lambda_{s_{j+1}}(t_{s_{j+1}}-\tau) e^{-2|\xi_0|^2(t_{s_{j+1}}-\tau)} &= 0.\end{aligned}$$
Откуда
$$\widehat{\lambda}_{s_j} = \frac{t_{s_{j+1}} - \tau}{t_{s_{j+1}} - t_{s_j}} \left(\frac{\delta_{s_{j+1}}}{\delta_{s_j}}\right)^{\frac{2(\tau - t_{s_j})}{t_{s_{j+1}} - t_{s_j}}},$$
$$\widehat{\lambda}_{s_{j+1}} = \frac{\tau - t_{s_j}}{t_{s_{j+1}} - t_{s_j}} \left(\frac{\delta_{s_j}}{\delta_{s_{j+1}}}\right)^{\frac{2(t_{s_{j+1}} - \tau)}{t_{s_{j+1}} - t_{s_j}}}.$$
Таким образом, $f(|\xi|^2) \geq 0$ для всех $\xi \in \mathbb{R}^d$ и положительная мера $d\widehat{\mu}(\cdot)$ сосредоточена в точке ξ_0, где $f(|\xi_0|^2) = 0$. Следовательно, условие (7) выполняется.

Если $\tau \in (t_{s_j}, t_{s_{j+1}})$, то, очевидно, $\widehat{\lambda}_{s_j} > 0$ и $\widehat{\lambda}_{s_{j+1}} > 0$, а если $\tau = t_{s_j}$, то $\widehat{\lambda}_{s_j} = 1$ и $\widehat{\lambda}_{s_{j+1}} = 0$, так что в силу (10) условие (8) также выполняется. Осталось лишь проверить допустимость меры $d\widehat{\mu}(\cdot)$ в задаче (6).

По построению ломаной $\theta(\cdot)$ все точки $(t_i, \ln 1/\delta_i)$, $i = 1, \ldots, n$, лежат не выше ее графика, а так как эта ломаная вогнута, то ее график лежит не выше прямой
$$p(t) = \frac{\ln 1/\delta_{s_{j+1}} - \ln 1/\delta_{s_j}}{t_{s_{j+1}} - t_{s_j}}(t - t_{s_j}) + \ln\frac{1}{\delta_{s_j}} = \ln \delta_{s_j}^{-\frac{t_{s_{j+1}} - t}{t_{s_{j+1}} - t_{s_j}}} \delta_{s_{j+1}}^{-\frac{t - t_{s_j}}{t_{s_{j+1}} - t_{s_j}}},$$
соединяющей точки $(t_{s_j}, \ln 1/\delta_{s_j})$ и $(t_{s_{j+1}}, \ln 1/\delta_{s_{j+1}})$. Тогда (учитывая выражения для A и $|\xi_0|^2$) будем иметь
$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-2|\xi|^2 t_i}\, d\widehat{\mu}(\xi) = A e^{-2|\xi_0|^2 t_i} = \delta_{s_j}^{2\frac{t_{s_{j+1}} - t_i}{t_{s_{j+1}} - t_{s_j}}} \delta_{s_{j+1}}^{2\frac{t_i - t_{s_j}}{t_{s_{j+1}} - t_{s_j}}} &= \\ = e^{-2p(t_i)} \leq e^{-2\ln\frac{1}{\delta_i}} = \delta_i^2, \quad i = 1, \ldots, n.&\end{aligned}$$
т. е. $\widehat{\mu}(\cdot)$ — допустимая мера в задаче (6) и тем самым является ее решением.

Подставляя $\widehat{\mu}(\cdot)$ в максимизируемый функционал, получаем значение задачи (6)

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-2|\xi|^2\tau}\, d\widehat{\mu}(\xi) = Ae^{-2|\xi_0|^2\tau} = \delta_{s_j}^{2\frac{t_{s_{j+1}}-\tau}{t_{s_{j+1}}-t_{s_j}}} \delta_{s_{j+1}}^{2\frac{\tau-t_{s_j}}{t_{s_{j+1}}-t_{s_j}}} = e^{-2p(\tau)} = e^{-2\theta(\tau)}.$$

Аппроксимируя стандартным образом δ-функцию последовательностью δ-образных функций, получаем, что таково же значение задачи (5). Но тогда $e^{-\theta(\tau)}$ — значение задачи (4), т. е. $S = e^{-\theta(\tau)}$.

(b) Пусть $\tau \geq t_{s_k}$ (в частности, $t_{s_k} = t_1$, если $\theta(\cdot)$ — прямая). Положим $\widehat{\lambda}_0 = -1$, $\widehat{\lambda}_{s_k} = 1$, $\widehat{\lambda}_{s_j} = 0$, $j \neq k$, и $d\widehat{\mu}(\cdot) = \delta_{s_k}^2 \delta(\cdot)$ ($\delta(\cdot)$ — δ-функция в нуле). Тогда, очевидно, выполняется (8). Поскольку для всех $\xi \in \mathbb{R}^d$ справедливо неравенство

$$f(|\xi|^2) = -1 + e^{-2|\xi|^2(t_{s_k}-\tau)} \geq 0$$

и $f(0) = 0$, то выполняется (7). На участке $[t_{s_k}, \infty)$ функция $\theta(\cdot)$ тождественно равна $\ln(1/\delta_{s_k})$ и ясно, что $\ln(1/\delta_i) \leq \ln(1/\delta_{s_k})$, $1 \leq i \leq n$. Следовательно,

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-2|\xi|^2 t_i}\, d\widehat{\mu}(\xi) = \delta_{s_k}^2 = e^{-2\ln\frac{1}{\delta_{s_k}}} \leq e^{-2\ln\frac{1}{\delta_i}} = \delta_i^2, \quad i = 1, \ldots, n,$$

т. е. мера $d\widehat{\mu}(\xi)$ допустима в задаче (6) и значит, является ее решением.

Значение задачи (6) таково

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-2|\xi|^2\tau}\, d\widehat{\mu}(\xi) = \delta_{s_k}^2 = e^{-2\ln\frac{1}{\delta_{s_k}}} = e^{-2\theta(\tau)}$$

и значит, по тем же соображениям, что и в предыдущем случае, значение задачи (4) равно $e^{-\theta(\tau)}$.

(c) Пусть $\tau < t_1$. Покажем, что в этом случае значение задачи (6) равно $+\infty$. Пусть $x_0 > 0$. Существует, очевидно, прямая $x = at + b$, $a > 0$, которая разделяет точку $(\tau, -x_0)$ и множество M, в частности,

$$-a\tau - x_0 \geq b \geq -at_i + \ln\frac{1}{\delta_i}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Обозначая $A = e^{-2b}$ и подбирая $\xi_0 \in \mathbb{R}^d$ так, чтобы $|\xi_0|^2 = a$, получаем из этих неравенств, что $A\exp(-2|\xi_0|^2 t_i) \leq \delta_i^2$, $1 \leq i \leq n$, т. е. мера $d\mu(\cdot) = \delta(\cdot - \xi_0)$ допустима в задаче (6) и $A\exp(-2|\xi_0|^2\tau) \geq \exp(2x_0)$. В силу произвольности x_0 значение задачи (6) равно $+\infty$. Отсюда, как и в предыдущих случаях, следует, что значение задачи (4) равно $+\infty$.

Итак, доказано, что для всех $\tau \geq 0$ погрешность оптимального восстановления $E(\tau, \overline{\delta}) \geq e^{-\theta(\tau)}$.

2. *Оценка сверху величины* $E(\tau, \overline{\delta})$ *и оптимальный метод.* Пусть $\tau \geq t_1$ и $\widehat{\lambda}_j$, $1 \leq j \leq n$, — множители Лагранжа, которые были найдены для задачи (6) при данном τ. Оценка сверху $E(\tau, \overline{\delta})$ и

нахождение оптимального метода будут опираться на следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть функция* $\overline{y}(\cdot) = (y_1(\cdot), \ldots, y_n(\cdot)) \in (L_2(\mathbb{R}^d))^n$ *такова, что существует решение* $\widehat{u}_0(\cdot) = \widehat{u}_0(\cdot, \overline{y}(\cdot))$ *задачи*

$$\sum_{j=1}^{n} \widehat{\lambda}_j \|P_{t_j} u_0(\cdot) - y_j(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \to \min, \quad u_0(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d). \tag{11}$$

Тогда для любых $\gamma_j > 0$, $1 \le j \le n$, *значение задачи*

$$\|P_\tau u_0(\cdot) - P_\tau \widehat{u}_0(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \to \max, \quad \|P_{t_j} u_0(\cdot) - y_j(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \le \gamma_j, \quad 1 \le j \le n, \quad u_0(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d) \tag{12}$$

не больше значения задачи

$$\|P_\tau u_0(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \to \max, \quad \sum_{j=1}^{n} \widehat{\lambda}_j \|P_{t_j} u_0(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \le \sum_{j=1}^{n} \widehat{\lambda}_j \gamma_j^2, \quad u_0(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d). \tag{13}$$

Доказательство. Минимизируемый функционал в (11) является гладким выпуклым функционалом на $L_2(\mathbb{R}^d)$ и, следовательно, необходимые и достаточные условия того, что функция $\widehat{u}_0(\cdot)$ — его минимум заключаются в равенстве нулю производной этого функционала в точке $\widehat{u}_0(\cdot)$, т. е. для любого $u_0(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$ должно выполняться равенство

$$\operatorname{Re} \sum_{j=1}^{n} \widehat{\lambda}_j \int_{L_2(\mathbb{R}^d)} (P_{t_j} \widehat{u}_0(x) - y_j(x)) \overline{P_{t_j} u_0(x)}\, dx = 0. \tag{14}$$

Учитывая это, легко проверить, что для всех $u_0(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$ справедливо такое равенство

$$\sum_{j=1}^{n} \widehat{\lambda}_j \|P_{t_j} u_0(\cdot) - y_j(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} = \sum_{j=1}^{n} \widehat{\lambda}_j \|P_{t_j} u_0(\cdot) - P_{t_j} \widehat{u}_0(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \sum_{j=1}^{n} \widehat{\lambda}_j \|P_{t_j} \widehat{u}_0(\cdot) - y_j(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

Пусть $u_0(\cdot)$ — допустимая функция в (12). Тогда из последнего соотношения следует, что

$$\sum_{j=1}^{n} \widehat{\lambda}_j \|P_{t_j}(u_0(\cdot) - \widehat{u}_0(\cdot))\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \le \sum_{j=1}^{n} \widehat{\lambda}_j \|P_{t_j} u_0(\cdot) - y_j(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \le \sum_{j=1}^{n} \widehat{\lambda}_j \gamma_j^2$$

и тем самым $u_0(\cdot) - \widehat{u}_0(\cdot)$ — допустимая функция в (13). При этом значения максимизируемых функционалов в (12) и (13) соответственно на элементах $u_0(\cdot)$ и $u_0(\cdot)-\widehat{u}_0(\cdot)$ совпадают. Отсюда следует требуемое. $\square$

Схема использования данной леммы состоит в следующем. Мы сначала докажем, что при $\gamma_j = \delta_j$, $1 \le j \le n$, значения задач (4) и (13) совпадают (т. е. значение задачи (13) равно $e^{-\theta(\tau)}$). Если предположить, что для каждого $\overline{y}(\cdot) \in (L_2(\mathbb{R}^d))^n$ существует решение задачи (11), то утверждение леммы означает, что погрешность $e(\tau, \overline{\delta}, \widehat{m})$ метода $\widehat{m}\colon \overline{y}(\cdot) \mapsto P_\tau \widehat{u}_0(\cdot, \overline{y}(\cdot))$ не превосходит $e^{-\theta(\tau)}$ и тем более $E(\tau, \overline{\delta}) \le e^{-\theta(\tau)}$. Вместе с доказанной оценкой снизу, отсюда будет следовать, что $e(\tau, \overline{\delta}, \widehat{m}) = E(\tau, \overline{\delta})$ и значит, $\widehat{m}$ — оптимальный метод.

Однако, решение задачи (11) существует не для всех $\overline{y}(\cdot) \in (L_2(\mathbb{R}^d))^n$, и это потребует некоторой коррекции приведенных рассуждений.

Итак, докажем совпадение значений задач (4) и (13) при $\gamma_j = \delta_j$, $1 \le j \le n$. Точно так же, как мы перешли от задачи (4) к задаче (6) (используя теорему Планшереля, а затем заменяя $(2\pi)^{-d}|Fu_0(\xi)|^2\, d\xi$ на положительную меру), переходим от задачи (13) к задаче

$$(15) \quad \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2|\xi|^2\tau}\, d\mu(\xi) \to \max,$$

$$\sum_{j=1}^n \widehat{\lambda}_j \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2|\xi|^2 t_j}\, d\mu(\xi) \le \sum_{j=1}^n \widehat{\lambda}_j \delta_j^2, \quad d\mu(\cdot) \ge 0.$$

Это выпуклая задача. Ее функция Лагранжа имеет вид

$$\mathcal{L}_1(d\mu(\cdot), \nu) = \nu_0 \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2|\xi|^2\tau}\, d\mu(\xi) + \\ + \nu_1 \left(\sum_{j=1}^n \widehat{\lambda}_j \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2|\xi|^2 t_j}\, d\mu(\xi) - \sum_{j=1}^n \widehat{\lambda}_j \delta_j^2 \right),$$

где $\nu = (\nu_0, \nu_1)$ — набор множителей Лагранжа.

Покажем, что решение $d\widehat{\mu}(\cdot)$ задачи (6) является решением и этой задачи. Для этого (аналогично тому как это было сделано для задачи (6)) достаточно проверить, что мера $d\widehat{\mu}(\cdot)$ допустима в (15) и что для некоторых $\widehat{\nu}_0 < 0$ и $\widehat{\nu}_1 \ge 0$ выполняются аналоги условий (7) и (8) для данной задачи, а именно,

$$\min_{d\mu(\cdot)\ge 0} \mathcal{L}_1(d\mu(\cdot), \widehat{\nu}) = \mathcal{L}_1(d\widehat{\mu}(\cdot), \widehat{\nu}),$$

где $\widehat{\nu} = (\widehat{\nu}_0, \widehat{\nu}_1)$ и

$$\widehat{\nu}_1 \left(\sum_{j=1}^{n} \widehat{\lambda}_j \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2|\xi|^2 t_j} \, d\widehat{\mu}(\xi) - \sum_{j=1}^{n} \widehat{\lambda}_j \delta_j^2 \right) = 0.$$

Из допустимости меры $d\widehat{\mu}(\cdot)$ в задаче (6) сразу следует ее допустимость в задаче (15). Положим $\widehat{\nu}_0 = -1$ и $\widehat{\nu}_1 = 1$. Тогда $\mathcal{L}_1(d\mu(\cdot), \widehat{\nu}) = \mathcal{L}(d\mu(\cdot), \widehat{\lambda})$ и, следовательно, первое из выписанных соотношений равносильно (7) и тем самым выполняется. Второе соотношение сразу следует из (8). Итак, $d\widehat{\mu}(\cdot)$ — решение задачи (15) и значит, ее значение совпадает со значением задачи (6).

Далее, как и раньше, аппроксимируя δ-функцию δ-образной последовательностью, получаем, что квадрат значения задачи (13) равен значению задачи (15) и значит, значения задач (4) и (13) совпадают.

Теперь воспользуемся леммой. Для этого найдем сначала значение задачи (11) для функции $\overline{y}(\cdot) = (y_1(\cdot), \ldots, y_n(\cdot)) \in (L_2(\mathbb{R}^d))^n$, для которой функции $Fy_i(\cdot)$, $1 \le i \le n$, финитны.

Пусть $\tau \in [t_{s_j}, t_{s_{j+1}})$. В этом случае, как было доказано, лишь множители Лагранжа $\widehat{\lambda}_{s_j}$ и $\widehat{\lambda}_{s_{j+1}}$ могут быть отличны от нуля (и одновременно не равны нулю) и поэтому задача (11) имеет вид

$$\widehat{\lambda}_{s_j} \| P_{t_{s_j}} u_0(\cdot) - y_{s_j}(\cdot) \|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \widehat{\lambda}_{s_{j+1}} \| P_{t_{s_{j+1}}} u_0(\cdot) - y_{s_{j+1}}(\cdot) \|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \to \min, \quad u_0(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d).$$

Если $\widehat{u}_0(\cdot) = \widehat{u}_0(\cdot, \overline{y}(\cdot))$ — решение этой задачи, то выполняется условие (14), которое в образах Фурье, согласно теореме Планшереля, запишется в виде

$$\operatorname{Re} \sum_{k=j}^{j+1} \widehat{\lambda}_{s_k} \int_{L_2(\mathbb{R}^d)} (e^{-|\xi|^2 t_{s_k}} F\widehat{u}_0(\xi) - Fy_{s_k}(\xi)) e^{-|\xi|^2 t_{s_k}} \overline{Fu_0(\xi)} \, d\xi = 0.$$

Легко убедиться, что это соотношение будет выполняться для всех $u_0(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$, если функция $\widehat{u}_0(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$ такова, что ее преобразование Фурье имеет вид

$$F\widehat{u}_0(\xi) = \frac{\widehat{\lambda}_{s_j} e^{-|\xi|^2 t_{s_j}} Fy_{s_j}(\xi) + \widehat{\lambda}_{s_{j+1}} e^{-|\xi|^2 t_{s_{j+1}}} Fy_{s_{j+1}}(\xi)}{\widehat{\lambda}_{s_j} e^{-2|\xi|^2 t_{s_j}} + \widehat{\lambda}_{s_{j+1}} e^{-2|\xi|^2 t_{s_{j+1}}}}. \tag{16}$$

Но выражение справа принадлежит $L_2(\mathbb{R}^d)$, поскольку функции $Fy_{s_j}(\cdot)$ и $Fy_{s_{j+1}}(\cdot)$ финитны и поэтому $\widehat{u}_0(\cdot) = \widehat{u}_0(\cdot, \overline{y}(\cdot)) \in L_2(\mathbb{R}^d)$. В силу достаточности условия (14) функция $\widehat{u}_0(\cdot)$, определенная соотношением (16), является решением задачи (11).

Отметим, что если $\tau = t_{s_j}$, то $\widehat{\lambda}_{s_j} = 1$, $\widehat{\lambda}_{s_{j+1}} = 0$, и решение уравнения (11) в этом случае очевидно (и, конечно, следует из (16)) и имеет вид

$$F\widehat{u}_0(\xi) = e^{|\xi|^2 t_{s_j}} F y_{s_j}(\xi). \tag{17}$$

Как хорошо известно, финитные функции плотны в $L_2(\mathbb{R}^d)$. Тогда из теоремы Планшереля следует, что и функции, у которых преобразование Фурье финитно, также плотны в $L_2(\mathbb{R}^d)$.

Пусть теперь $\widetilde{u}_0(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$ и $\overline{y}(\cdot) = (y_1(\cdot), \ldots, y_n(\cdot)) \in (L_2(\mathbb{R}^d))^n$ таковы, что $\|P_{t_j}\widetilde{u}_0(\cdot) - y_j(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \le \delta_j$, $1 \le j \le n$. Пусть далее $\overline{y}_k(\cdot) = (y_{1k}(\cdot), \ldots, y_{nk}(\cdot)) \in (L_2(\mathbb{R}^d))^n$, $k \in \mathbb{N}$, — последовательность, обладающая тем свойством, что функции $Fy_{jk}(\cdot)$ финитны и $\|y_j(\cdot) - y_{jk}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \le 1/k$, $1 \le j \le n$, $k \in \mathbb{N}$.

Фиксируем $k \in \mathbb{N}$. По доказанному для $\overline{y}_k(\cdot)$ существует решение $\widehat{u}_0(\cdot, \overline{y}_k(\cdot))$ задачи (11). Поскольку $\|P_{t_j}\widetilde{u}_0(\cdot) - y_{jk}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \le \|P_{t_j}\widetilde{u}_0(\cdot) - y_j(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \|y_j(\cdot) - y_{jk}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \le \delta_j + 1/k$, $1 \le j \le n$, то функция $\widetilde{u}_0(\cdot)$ допустима в задаче (12) с $\gamma_j = \gamma_j(k) = \delta_j + 1/k$, $1 \le j \le n$. Согласно утверждению леммы значение этой задачи не превосходит значения задачи (13), которая после замены $u_0(\cdot) = a(k)v_0(\cdot)$, где $a(k) = \sqrt{\sum_{j=1}^n \widehat{\lambda}_j \gamma_j^2(k) / \sum_{j=1}^n \widehat{\lambda}_j \delta_j^2}$, примет вид

$$a(k)\|P_\tau v_0(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \to \max, \quad \sum_{j=1}^n \widehat{\lambda}_j \|P_{t_j} v_0(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \le \sum_{j=1}^n \widehat{\lambda}_j \delta_j^2,$$
$$v_0(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d).$$

Значение же этой задачи, как уже доказано, совпадает со значением задачи (4), умноженному на $a(k)$, т. е. равно $a(k)e^{-\theta(\tau)}$. В частности (в силу допустимости $\widetilde{u}_0(\cdot)$ в (12)), получаем, что

$$\|P_\tau\widetilde{u}_0(\cdot) - P_\tau\widehat{u}_0(\cdot, \overline{y}_k(\cdot))\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \le a(k)e^{-\theta(\tau)}. \tag{18}$$

Пусть $\tau \in (t_{s_j}, t_{s_{j+1}})$. Преобразования Фурье функций $K_{s_j}(\cdot)$ и $K_{s_{j+1}}(\cdot)$ из формулировки теоремы принадлежат пространству бесконечно дифференцируемых быстро убывающих функций на $\mathbb{R}^d$. Преобразование Фурье в этом пространстве является изоморфизмом и поэтому ему принадлежат и сами функции $K_{s_j}(\cdot)$ и $K_{s_{j+1}}(\cdot)$. В частности, они ограничены и тогда согласно неравенству Юнга, метод $\widehat{m}$ из формулировки теоремы — линейный непрерывный оператор из $(L_2(\mathbb{R}^d))^n$ в $L_2(\mathbb{R}^d)$.

Из вида метода $\widehat{m}$, выражений для функций $FK_{s_j}(\cdot)$ и $FK_{s_{j+1}}(\cdot)$ и формулы (16) следует, что

$$F\widehat{m}(\overline{y}_k(\cdot))(\xi) = FK_{s_j}(\xi)Fy_{s_j k}(\xi) + FK_{s_{j+1}}(\xi)Fy_{s_{j+1}k}(\xi) =$$
$$= e^{-|\xi|^2\tau}F\widehat{u}_0(\cdot, \overline{y}_k(\cdot))(\xi),$$

т. е.

$$\widehat{m}(\overline{y}_k(\cdot))(\cdot) = P_\tau\widehat{u}_0(\cdot, \overline{y}_k(\cdot)). \tag{19}$$

Если $\tau = t_{s_j}$, то из вида метода $\widehat{m}$ следует, что

$$F\widehat{m}(\overline{y}_k(\cdot))(\xi) = Fy_{s_jk}(\xi) = e^{-|\xi|^2\tau}F\widehat{u}_0(\cdot,\overline{y}_k(\cdot))(\xi),$$

т. е. снова справедливо соотношение (19).

Возвращаясь к $\widetilde{u}_0(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$ и $\overline{y}(\cdot) = (y_1(\cdot),\dots,y_n(\cdot)) \in (L_2(\mathbb{R}^d))^n$ таким, что $\|P_{t_j}\widetilde{u}_0(\cdot) - y_j(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \le \delta_j$, $1 \le j \le n$, будем иметь согласно (19) и (18)

$$\begin{aligned}\|P_\tau\widetilde{u}_0(\cdot) - \widehat{m}(\overline{y}(\cdot))(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} &\le \|P_\tau\widetilde{u}_0(\cdot) - P_\tau\widehat{u}_0(\cdot,\overline{y}_k(\cdot))\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \\ &+ \|\widehat{m}(\overline{y}_k(\cdot))(\cdot) - \widehat{m}(\overline{y}(\cdot))(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \le \\ &\le a(k)e^{-\theta(\tau)} + \|\widehat{m}(\overline{y}_k(\cdot) - y(\cdot))(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned}$$

Это верно для любого $k \in \mathbb{N}$. Переходя к пределу при $k \to \infty$ (учитывая, что $a(k) \to 1$ и что метод $\widehat{m}$ непрерывен) получаем неравенство

$$\|P_\tau\widetilde{u}_0(\cdot) - \widehat{m}(\overline{y}(\cdot))(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \le e^{-\theta(\tau)}.$$

Переходя здесь к верхней грани по всем $\widetilde{u}_0(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$ и $\overline{y}(\cdot) = (y_1(\cdot),\dots,y_n(\cdot)) \in (L_2(\mathbb{R}^d))^n$ таким, что $\|P_{t_j}\widetilde{u}_0(\cdot) - y_j(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \le \delta_j$, $1 \le j \le n$, получаем, что $e(\tau,\overline{\delta},\widehat{m}) \le e^{-\theta(\tau)}$. Отсюда, вместе с доказанной оценкой снизу, следует, что

$$e^{-\theta(\tau)} \le E(\tau,\overline{\delta}) \le e(\tau,\overline{\delta},\widehat{m}) \le e^{-\theta(\tau)},$$

т. е. $E(\tau,\overline{\delta}) = e^{-\theta(\tau)}$ и $\widehat{m}$ — оптимальный метод.

Итак, для случая, когда $\tau \in [t_{s_j}, t_{s_{j+1}})$ теорема доказана.

Пусть $\tau \ge t_{s_k}$. Если $\tau = t_{s_k}$, то рассуждая точно так же как и для случая $\tau = t_{s_j}$, получаем нужную оценку и оптимальный метод.

Пусть $\tau > t_{s_k}$. Здесь рассуждения так же аналогичны предыдущим, но несколько проще и поэтому будем кратки. В данном случае $\widehat{\lambda}_{s_k} = 1$, а остальные множители Лагранжа равны нулю, поэтому задача (11) принимает вид

$$\|P_{t_{s_k}}u_0(\cdot) - y_{s_k}(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \to \min, \quad u_0(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d).$$

Если $\overline{y}(\cdot) = (y_1(\cdot),\dots,y_n(\cdot))$ таково, что функции $Fy_j(\cdot)$, $1 \le j \le n$, финитны, то решение $\widehat{u}_0(\cdot) = \widehat{u}_0(\cdot,\overline{y}(\cdot))$ данной задачи существует и $F\widehat{u}_0(\xi) = e^{|\xi|^2t_{s_k}}Fy_{s_k}(\xi)$.

Далее дословно повторяя предыдущие рассуждения, приходим к неравенству (18).

Метод $\widehat{m}$ из формулировки теоремы, по самому определению, есть линейный непрерывный оператор из $(L_2(\mathbb{R}^d))^n$ в $L_2(\mathbb{R}^d)$. Если $\overline{y}(\cdot) = \overline{y}_k(\cdot)$, то ясно, что $F\widehat{m}(\overline{y}_k(\cdot))(\xi) = e^{-|\xi|^2(\tau - t_{s_k})}Fy_{s_k}(\xi) = e^{-|\xi|^2\tau}F\widehat{u}_0(\cdot,\overline{y}_k(\cdot))(\xi)$, т. е. $\widehat{m}(\overline{y}_k(\cdot))(\cdot) = P_\tau\widehat{u}_0(\cdot,\overline{y}_k(\cdot))(\cdot)$. Дальнейшие рассуждения ровно те же самые, что и в предыдущем случае. Теорема доказана.

4. Оптимальное восстановление при наличии априорной информации

Мы снова рассматриваем задачу (1)–(2) и моменты времени $0 \le t_1 < \ldots < t_n$. Пусть A и B — подмножества $\{1, \ldots, n\}$ (одно из которых может быть пустым) такие, что $A \cap B = \emptyset$ и $A \cup B = \{1, \ldots, n\}$. Поставим следующую задачу. Известна следующая априорная информация: в моменты времени t_i, $i \in A$, температура не может выходить за определенные пределы, т. е. известно, что $\|u(t_i, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \le \delta_i$, где $\delta_i > 0$, $i \in A$.

Пусть $B \ne \emptyset$ и в моменты времени t_i, $i \in B$, приближенно известны распределения температур $u(t_i, \cdot)$, т. е. известны функции $y_i(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$ такие, что $\|u(t_i, \cdot) - y_i(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \le \delta_i$, где $\delta_i > 0$. Как и раньше, мы хотим каждому такому набору функций сопоставить функцию из $L_2(\mathbb{R}^d)$, которая бы в некотором смысле наилучшим образом аппроксимировала истинное распределение температуры в $\mathbb{R}^d$ в фиксированный момент времени τ.

Если $B \ne \emptyset$ и $\operatorname{card} B = l$, то снова любое отображение m из $(L_2(\mathbb{R}^d))^l$ в $L_2(\mathbb{R}^d)$ объявляется методом восстановления. Погрешностью этого метода называем величину

$$e(\tau, A, B, \overline{\delta}, m) = \sup_{\substack{u_0(\cdot),\ \overline{y}_B(\cdot) \in (L_2(\mathbb{R}^d))^l \\ \|u(t_i,\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \le \delta_i,\ i \in A \\ \|u(t_i,\cdot) - y_i(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \le \delta_i,\ i \in B}} \|u(\tau, \cdot) - m(\overline{y}_B(\cdot))(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)},$$

где $\overline{y}_B(\cdot) = \{y_i(\cdot)\}_{i \in B}$ и $\overline{\delta} = (\delta_1, \ldots, \delta_n)$.

Нас интересует величина

$$E(\tau, A, B, \overline{\delta}) = \inf_{m\colon (L_2(\mathbb{R}^d))^l \to L_2(\mathbb{R}^d)} e(\tau, \overline{\delta}, m),$$

которую также назовем *погрешностью оптимального восстановления* и метод $\widehat{m}$, на котором нижняя грань достигается, т. е. для которого

$$E(\tau, A, B, \overline{\delta}) = e(\tau, A, B, \overline{\delta}, \widehat{m}),$$

называемый *оптимальным методом восстановления* (температуры в $\mathbb{R}^d$ в момент времени τ по данной информации).

Отметим, что если $A = \emptyset$, то мы приходим к прежней постановке. Если $B = \emptyset$, то никаких измерений не производится и тем самым нет смысла говорить о каком-либо методе восстановления. Но можно говорить об оценке температуры в момент времени τ, т. е. об определении тех границ, за которые температура заведомо не может выйти при данной априорной информации. В качестве такой оценки естественно взять чебышевский радиус множества $\{\, u(\tau, \cdot)(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d) \mid \|u(t_i, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \le \delta_i,\ 1 \le i \le n \,\}$, т. е. минимальный из радиусов шаров, содержащих данное множество. Поскольку множество центрально симметрично, то легко убедиться, что эта величина такова

$$E(\tau, A, \emptyset, \overline{\delta}) = \sup_{\substack{u_0(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d) \\ \|u(t_i,\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \le \delta_i,\ i=1,\dots,n}} \|u(\tau,\cdot)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

Приведенная постановка, как уже отмечено, обобщает исходную задачу и можно было бы с самого начала рассматривать именно задачу с априорной информацией. Но мы хотели сохранить простоту исходной постановки, тем более, что доказательство более общего результата по-существу такое же и мы только укажем те изменения, которые надлежит сделать в предыдущих рассуждениях.

Теорема 2. *Для любых A и B и любого $\tau \ge 0$ справедливо равенство*

$$E(\tau, A, B, \overline{\delta}) = e^{-\theta(\tau)}.$$

Пусть $B \neq \emptyset$. Тогда

(1) *если $t_1 > 0$, $0 \le \tau < t_1$, то любой метод является оптимальным;*

(2) *если $\tau = t_{s_j}$, $1 \le j \le k$, и $s_j \in B$, то метод $\widehat{m}$, определенный равенством $\widehat{m}(\overline{y}(\cdot))(\cdot) = y_{s_j}(\cdot)$, является оптимальным, а если $s_j \notin B$, то нулевое отображение — оптимальный метод;*

(3) *если $k \ge 2$, $\tau \in (t_{s_j}, t_{s_{j+1}})$, $1 \le j \le k-1$, и $s_j, s_{j+1} \in B$, то метод $\widehat{m}$, определенный в пункте (3) теоремы 1, является оптимальным; если $s_j \in B$, а $s_{j+1} \notin B$, то $\widehat{m}(\overline{y}(\cdot))(\cdot) = (K_{s_j} * y_{s_j})(\cdot)$ — оптимальный метод ($K_{s_j}(\cdot)$ из теоремы 1); если $s_j \notin B$, а $s_{j+1} \in B$, то оптимальным является метод $\widehat{m}(\overline{y}(\cdot))(\cdot) = (K_{s_{j+1}} * y_{s_{j+1}})(\cdot)$ ($K_{s_{j+1}}(\cdot)$ из теоремы 1); если, наконец, $s_j, s_{j+1} \notin B$, то нулевое отображение — оптимальный метод;*

(4) *если $\tau > t_{s_k}$ и $s_k \in B$, то метод $\widehat{m}$, определенный в пункте (4) теоремы 1, является оптимальным, если $s_k \notin B$, то нулевое отображение — оптимальный метод.*

Доказательство. Пусть $B = \emptyset$. Тогда $E(\tau, A, \emptyset, \overline{\delta})$ совпадает со значением задачи (4) (которое, как доказано, равно $e^{-\theta(\tau)}$ для всех $\tau \ge 0$) и значит, $E(\tau, A, \emptyset, \overline{\delta}) = e^{-\theta(\tau)}$.

Пусть $B \neq \emptyset$. Тогда дословно повторяя рассуждения из начала доказательства теоремы 1, получаем, что $E(\tau, A, B, \overline{\delta})$ не меньше значения задачи (4) и тем самым справедлива оценка снизу $E(\tau, A, B, \overline{\delta}) \ge e^{-\theta(\tau)}$ для любых множеств A и B и всех $\tau \ge 0$.

Перейдем к доказательству оценки сверху и предъявлению соответствующих оптимальных методов. Здесь мы будем опираться на следующее утверждение, которое формально обобщает лемму 1, но доказывается точно так же.

Лемма 2. *Пусть функция* $\overline{y}_B(\cdot) = \{y_j(\cdot)\}_{j\in B}$ *такова, что существует решение* $\widehat{u}_0(\cdot) = \widehat{u}_0(\cdot, \overline{y}_B(\cdot))$ *задачи*

$$\sum_{j\in A} \widehat{\lambda}_j \|P_{t_j} u_0(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \sum_{j\in B} \widehat{\lambda}_j \|P_{t_j} u_0(\cdot) - y_j(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \to \min, \quad u_0(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d).$$

Тогда для любых $\gamma_j > 0$, $1 \le j \le n$, *значение задачи*

$$\|P_\tau u_0(\cdot) - P_\tau \widehat{u}_0(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \to \max, \quad \|P_{t_j} u_0(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \le \gamma_j,\ j \in A,$$
$$\|P_{t_j} u_0(\cdot) - y_j(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \le \gamma_j,\ j \in B, \quad u_0(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d),$$

не больше значения задачи

$$\|P_\tau u_0(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \to \max, \quad \sum_{j=1}^n \widehat{\lambda}_j \|P_{t_j} u_0(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \le \sum_{j=1}^n \widehat{\lambda}_j \gamma_j^2, \quad u_0(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d).$$

Пусть $\tau \in [t_{s_j}, t_{s_{j+1}})$. Если $s_j, s_{j+1} \in B$, то ровно те же рассуждения, что и в теореме 1 доказывают оптимальность соответствующих методов.

Пусть $s_j \in B$ и $s_{j+1} \notin B$. В этом случае аналог задачи (11) согласно лемме 2 имеет вид

$$\widehat{\lambda}_{s_j} \|P_{t_{s_j}} u_0(\cdot) - y_{s_j}(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \widehat{\lambda}_{s_{j+1}} \|P_{t_{s_{j+1}}} u_0(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \to \min, \quad u_0(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d).$$

Снова, те же рассуждения, что и в теореме 1 (с $y_{s_{j+1}}(\cdot) = 0$) приводят к доказательству оптимальности соответствующих методов.

Если $s_j \notin B$ и $s_{j+1} \notin B$, то аналог задачи (11) имеет вид

$$\widehat{\lambda}_{s_j} \|P_{t_{s_j}} u_0(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \widehat{\lambda}_{s_{j+1}} \|P_{t_{s_{j+1}}} u_0(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \to \min, \quad u_0(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$$

и решением здесь является, очевидно, нулевая функция. Оптимальность нулевого метода следует непосредственно из леммы 2.

Остальные случаи разбираются аналогично. $\square$

5. Комментарии

Решенные в этой работе задачи оптимального восстановления укладываются в следующую общую схему. Пусть X — векторное пространство, W — подмножество (класс) в X, $Y_1, \dots, Y_r$ и Z — нормированные пространства, $I_i\colon X \to Y_i$, $1 \le i \le r$, — линейные операторы. Ставится задача об оптимальном восстановлении линейного оператора $\Lambda\colon X \to Z$ на классе W по следующей информации об элементах из этого класса: про каждый элемент $x \in W$ известен вектор $\overline{y} = (y_1, \ldots, y_r) \in Y_1 \times \ldots \times Y_r$ такой, что $\|I_i x - y_i\|_{Y_i} \le \delta_i$, $\delta_i \ge 0$, $1 \le i \le r$.

Под оптимальным восстановлением Λ на W по данной информации понимается следующее. Любое отображение m из $Y_1 \times \ldots \times Y_r$ в Z объявляется методом восстановления (Λ на W по данной информации). Погрешностью этого метода называем величину

$$e(\Lambda, W, \overline{I}, \overline{\delta}, m) = \sup_{\substack{x \in W,\ \overline{y} \in Y_1 \times \ldots \times Y_r \\ \|I_i x - y_i\|_{Y_i} \le \delta_i,\ i=1,\ldots,r}} \|\Lambda x - m(\overline{y})\|_Z,$$

где $\overline{I} = (I_1, \ldots, I_r)$ и $\overline{\delta} = (\delta_1, \ldots, \delta_r)$.

Величину

$$E(\Lambda, W, \overline{I}, \overline{\delta}) = \inf_{m\colon Y_1 \times \ldots \times Y_r \to Z} e(\Lambda, W, \overline{I}, \overline{\delta}, m),$$

назовем *погрешностью оптимального восстановления*, а метод $\widehat{m}$, на котором нижняя грань достигается, т. е. для которого

$$E(\Lambda, W, \overline{I}, \overline{\delta}) = e(\Lambda, W, \overline{I}, \overline{\delta}, \widehat{m}),$$

оптимальным методом восстановления (Λ на W по данной информации).

В соответствии с этими обозначениями, например, в задаче с априорной информацией и когда $B \ne \emptyset$ ($\operatorname{card} B = l$) имеем: $r = l$, $X = Y_1 = \ldots = Y_l = Z = L_2(\mathbb{R}^d)$,

$$W = \{\, u_0(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d) \mid \|P_{t_i} u_0(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \le \delta_i,\ i \in A \,\}$$

(если $A = \emptyset$, то полагаем $W = X = L_2(\mathbb{R}^d)$), $I_i = P_{t_i}$, $i \in B$, $\Lambda = P_\tau$.

Указанный подход к определению оптимального метода (в абстрактной задаче) идеологически восходит к работам А. Н. Колмогорова тридцатых годов прошлого века, посвященных нахождению наилучшего средства приближения сразу для всех функций из данного класса. Приведенная здесь постановка для случая, когда $r = 1$, X и Y — конечномерные пространства, $Z = \mathbb{R}$ (задача о восстановлении линейного функционала) и $\delta_1 = 0$ (информация задана точно) впервые была рассмотрена С. А. Смоляком [2]. Он доказал, что если W — выпуклое центрально симметричное множество, то среди оптимальных методов есть линейный. Распространению этого факта на более общие ситуации посвящено достаточно много работ (см. [3]–[7]), но окончательный, в определенном смысле, результат в этом направлении, а именно, необходимые и достаточные условия существования оптимального линейного метода, был получен в работе авторов [8]. Задачам оптимального восстановления линейных функционалов посвящена довольно обширная литература. Единый подход к решению подобных задач, основанный на стандартных методах теории экстремума, изложен в [9]. В монографиях [10]–[14] можно найти множество конкретных результатов и дополнительные ссылки.

Общий результат, касающийся существования линейного метода для операторов (Z — гильбертово пространство) был доказан в работе [15] и там же получены первые конкретные результаты о восстановлении линейных операторов. Дальнейшее развитие эта тематика получила в работах авторов [16]–[18], где используются иные подходы, основанные на общих принципах теории экстремума.

Применение теории оптимального восстановления линейных операторов к задачам математической физики можно найти в работах [19]–[23].

Список литературы

[1] Колмогоров А. Н., Фомин С. В. *Элементы теории функций и функционального анализа*, М.: Наука, 1972.

[2] Смоляк С. А. *Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них*, Канд. дисс. М.: МГУ, 1965.

[3] Марчук А. Г., Осипенко К. Ю. "Наилучшее приближение функций, заданных с погрешностью в конечном числе точек", *Матем. заметки*, **17**:3 (1975), 359–368.

[4] Осипенко К. Ю. "Наилучшее приближение аналитических функций по информации об их значениях в конечном числе точек", *Матем. заметки*, **19**:1 (1976), 29–40.

[5] Micchelli C. A., Rivlin T. J. "A survey of optimal recovery". In: Optimal Estimation in Approximation Theory (C. A. Micchelli and T. J. Rivlin, eds.). Plenum Press, New York, 1977, 1–54.

[6] Магарил-Ильяев Г. Г., Чан Тхи Ле. "К задаче оптимального восстановления функционалов", *Успехи мат. наук*, **42**:2(254) (1987), 237–238.

[7] Арестов В. В. "Наилучшее восстановление операторов и родственные задачи", *Тр. Мат. ин-та АН СССР*, **189** (1989), 3–20.

[8] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. "Об оптимальном восстановлении функционалов по неточным данным", *Матем. заметки*, **50**:6 (1991), 85–93.

[9] Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М. "О неравенствах для производных колмогоровского типа" *Матем. сб.*, **187**:12 (1997), 73–106.

[10] Traub J. F., Woźniakowski H. *A General Theory of Optimal Algorithms*, New York: Academic Press, 1980.

[11] Plaskota L. *Noisy Information and Computational Complexity*, Cambridge University Press, 1996.

[12] Osipenko K. Yu. *Optimal Recovery of Analytic Functions*, Nova Science Publ., Inc., Huntington, New York 2000.

[13] Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М. *Выпуклый анализ и его приложения*, М.: Эдиториал УРСС, 2003.

[14] Magaril-Il'yaev G. G., Tichomirov V. M. *Convex Analysis: Theory and Applications*, Translations of Math. Monographs, vol. 222, AMS, Providence, RI, 2003.

[15] Melkman A. A., Micchelli C. A. "Optimal estimation of linear operators in Hilbert spaces from inaccurate data", *SIAM J. Numer. Anal.*, **16** (1979) 87–105.

[16] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю., "Оптимальное восстановление функций и их производных по коэффициентам Фурье, заданным с погрешностью", *Матем. сб.*, **193**:3 (2002), 79–100.

[17] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю., "Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных", *Функц. анализ и его прилож.*, **37** (2003), 51–64.

[18] Осипенко К. Ю., "Неравенство Харди–Литтлвуда–Полиа для аналитических функций из пространств Харди–Соболева", *Матем. сб.*, **197**:3 (2006), 15–34.

[19] Осипенко К. Ю. "О восстановлении решения задачи Дирихле по неточным исходным данным", *Владикавказский мат. журн.*, **6**:4 (2004), 55–62.

[20] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю., Тихомиров В. М. "On optimal recovery of heat equation solutions". In: Approximation Theory: A volume dedicated to B. Bojanov (D. K. Dimitrov, G. Nikolov, and R. Uluchev, Eds.), 163–175, Sofia: Marin Drinov Academic Publishing House, 2004.

[21] Выск Н. Д., Осипенко К. Ю. "Оптимальное восстановление решения волнового уравнения по неточным начальным данным", *Матем. заметки*, **81**:6 (2007), 803–815.

[22] Балова Е. А. "Об оптимальном восстановлении решений задачи Дирихле по неточным исходным данным", *Матем. заметки*, **82**:3 (2007), 323–334.

[23] Osipenko K. Yu., Wedenskaya E. V. "Optimal recovery of solutions of the generalized heat equation in the unit ball from inaccurate data", *J. Complexity*, **23**:4–6 (2007), 653–661.

Московский государственный институт радиотехники, электроники и автоматики (технический университет)

МАТИ — Российский государственный технологический университет им. К. Э. Циолковского