

# ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ ТРУБЫ ПО НЕТОЧНЫМ ИЗМЕРЕНИЯМ

Г. Г. МАГАРИЛ-ИЛЬЯЕВ, К. Ю. ОСИПЕНКО, Е. О. СИВКОВА

Аннотация. В работе рассматривается задача оптимального восстановления решения уравнения теплопроводности на многообразии, представляющим собой произведение прямой и окружности, в данный момент времени по неточным измерениям этого решения в другие моменты времени. Построено семейство оптимальных методов восстановления.

## ВВЕДЕНИЕ

Работа посвящена задаче наилучшего восстановления решения уравнения теплопроводности на многообразии  $\mathbb{R} \times \mathbb{T}$  ( $\mathbb{T}$  — единичная окружность) в данный момент времени по приближенным измерениям этого решения в другие моменты времени. Многообразие  $\mathbb{R} \times \mathbb{T}$  моделирует трубу, и в этом смысле задача состоит в том, чтобы наилучшим образом восстановить температуру трубы в момент времени  $\tau$  по приближенным ее измерениям в моменты  $t_i, i = 1, \dots, n$ . В работе найдено семейство линейных оптимальных методов восстановления температуры трубы, и при этом каждый метод использует не более двух измерений. Следует сказать, что результаты работы переносятся на случай многообразий вида  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^m$ . Но чтобы не загромождать изложение, мы ограничились случаем, когда  $n = m = 1$ . Статья примыкает к кругу проблем, связанных с задачами оптимального восстановления значений линейных операторов на классах множеств, элементы которых известны приближенно. Сама тематика возникла в 60-е годы, и начало ее было положено в работах [1]–[3]. Впоследствии основное внимание уделялось задачам восстановления функций и их производных по неточно заданному спектру и задачам оптимального восстановления решений уравнений математической физики (см., например, [4]–[11]). Настоящая работа относится ко второму циклу задач.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНОГО  
РЕЗУЛЬТАТА

Распространение тепла на многообразии  $M = \mathbb{R} \times \mathbb{T}$  описывается уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial y^2}, \quad (1)$$

где  $x \in \mathbb{R}$ ,  $y \in \mathbb{T}$  и  $t \geq 0$ , с начальной функцией  $f(\cdot)$  переменных  $(x, y)$ .

Мы предполагаем, что  $f(\cdot)$  принадлежит  $L_2(M)$ . В этом случае для каждого  $t > 0$  существует единственное решение  $u(\cdot, t)$  уравнения (1), принадлежащее  $L_2(M)$  и сходящееся к  $f(\cdot)$  в метрике  $L_2(M)$  при  $t \rightarrow 0$ .

Ставится следующая задача. Пусть в моменты времени  $0 \leq t_1 < \dots < t_n$  мы имеем возможность померить с известной погрешностью температуру трубы. Как по этой информации восстановить температуру трубы в момент времени  $\tau \neq t_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ ?

Точная постановка такова. Пусть известны функции  $g_i(\cdot) \in L_2(M)$  и числа  $\delta_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ , такие, что

$$\|u(\cdot, t_i) - g_i(\cdot)\|_{L_2(M)} \leq \delta_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Под задачей оптимального восстановления функции  $u(\cdot, \tau)$  по данной информации понимается следующее. Всякий метод восстановления является отображением  $\varphi: (L_2(M))^n \rightarrow L_2(M)$ . Погрешностью метода  $\varphi$  называется величина

$$e_\tau(\bar{g}(\cdot), \bar{\delta}, \varphi) = \sup_{\substack{f(\cdot) \in L_2(M), g_i(\cdot) \in L_2(M), i=1, \dots, n \\ \|u(\cdot, t_i) - g_i(\cdot)\|_{L_2(M)} \leq \delta_i, i=1, \dots, n}} \|u(\cdot, \tau) - \varphi(\bar{g}(\cdot))\|_{L_2(M)},$$

где  $\bar{g} = (g_1(\cdot), \dots, g_n(\cdot))$  и  $\bar{\delta} = (\delta_1, \dots, \delta_n)$ .

Нас интересует величина

$$E_\tau(\bar{g}(\cdot), \bar{\delta}) = \inf_{\varphi} e_\tau(\bar{g}(\cdot), \bar{\delta}, \varphi),$$

где нижняя грань берется по всем отображениям  $\varphi: (L_2(M))^n \rightarrow L_2(M)$ , которая называется *погрешностью оптимального восстановления* и методы  $\widehat{\varphi}$ , на которых нижняя грань достигается, называемые *оптимальными методами восстановления*, т. е. такие методы, что

$$E_\tau(\bar{g}(\cdot), \bar{\delta}) = e_\tau(\bar{g}(\cdot), \bar{\delta}, \widehat{\varphi}).$$

Аналогичная задача на прямой была рассмотрена в работе [9], и общая схема доказательства во многом похожа на используемую

здесь. Однако наличие периодической составляющей существенно меняет отдельные этапы рассуждений.

Для формулировки теоремы понадобятся некоторые определения. Напомним, что преобразование Фурье  $F$  в  $L_2(M)$  переводит функции из  $L_2(M)$  в функции из  $L_2(\widehat{M})$ , где  $\widehat{M} = \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ , и является изометрическим изоморфизмом этих пространств. Квадрат нормы функции  $a(\cdot) \in L_2(\widehat{M})$  определяется по формуле

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\widehat{M}} |a(\xi, k)|^2 d\xi dk = \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} |a(\xi, k)|^2 d\xi.$$

Если  $g(\cdot) \in L_2(M)$ , то  $F[g](\cdot)$  обозначает преобразование Фурье функции  $g(\cdot)$ .

Далее, на двумерной плоскости  $(t, x)$  рассмотрим выпуклое множество

$$A = \text{conv} \{ (t_i, \ln(1/\delta_i)), 1 \leq i \leq n \} + \{ (t, 0) : t \geq 0 \},$$

которое представляет собой алгебраическую сумму выпуклой оболочки конечного числа точек  $(t_i, \ln(1/\delta_i))$ ,  $i = 1, \dots, n$ , и положительной полупрямой.

Определим функцию  $\theta(\cdot)$  на  $[0, \infty)$  равенством:  $\theta(t) = \max \{ x : (t, x) \in A \}$ , причем  $\theta(t) = -\infty$ , если  $(t, x) \notin A$  ни для какого  $x$ . Ясно, что  $\theta(\cdot)$  — вогнутая неубывающая ломаная на  $[t_1, \infty)$ . Обозначим через  $t_{s_1} < \dots < t_{s_k}$  ее точки излома (считая  $t_1$  также точкой излома, т. е.  $t_{s_1} = t_1$ ). Понятно, что если  $k > 1$ , то на  $[t_{s_1}, t_{s_k}]$  функция  $\theta(\cdot)$  возрастает, а на  $[t_{s_k}, \infty)$  — она константа, равная  $\ln(1/\delta_{s_k})$ .

Если  $\tau \in (t_{s_i}, t_{s_{i+1}})$ ,  $1 \leq i \leq k-1$ , то положим

$$\widehat{\lambda}_{s_i} = \widehat{\lambda}_{s_i}(\tau) = \frac{t_{s_{i+1}} - \tau}{t_{s_{i+1}} - t_{s_i}} \left( \frac{\delta_{s_i}}{\delta_{s_{i+1}}} \right)^{\frac{-2(\tau - t_{s_i})}{t_{s_{i+1}} - t_{s_i}}},$$

$$\widehat{\lambda}_{s_{i+1}} = \widehat{\lambda}_{s_{i+1}}(\tau) = \frac{\tau - t_{s_i}}{t_{s_{i+1}} - t_{s_i}} \left( \frac{\delta_{s_i}}{\delta_{s_{i+1}}} \right)^{\frac{2(t_{s_{i+1}} - \tau)}{t_{s_{i+1}} - t_{s_i}}}.$$

Легко видеть, что это положительные числа, причем  $\widehat{\lambda}_{s_i} < 1$ .

Для данного  $\tau$  определим еще положительное число

$$r_i = r_i(\tau) = -\frac{\ln \widehat{\lambda}_{s_i}}{\tau - y_{s_i}}$$

и обозначим  $B(r_i) = \{ (\xi, k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z} : \xi^2 + k^2 \leq r_i \}$ .

**Теорема.** Для любого  $\tau > 0$  справедливо равенство

$$E_\tau(\bar{g}(\cdot), \bar{\delta}) = e^{-\theta(\tau)}.$$

Если  $\tau \in (t_{s_i}, t_{s_{i+1}})$ ,  $1 \leq i \leq k-1$ , то множество функций  $a(\cdot)$  на  $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ , измеримых для каждого  $k \in \mathbb{Z}$ , и таких, что

$$\frac{|b(\xi, k)|^2}{\widehat{\lambda}_{s_i}} + \frac{|a(\xi, k)|^2}{\widehat{\lambda}_{s_{i+1}}} \leq 1, \quad (2)$$

где  $b(\xi, k) = e^{-(\xi^2+k^2)(\tau-y_{s_i})} - a(\xi, k)e^{-(\xi^2+k^2)(t_{s_{i+1}}-t_{s_i})}$ , если  $(\xi, k) \in B(r_i)$  и равных нулю вне  $B(r_i)$ , не пусто. Для каждой такой функции  $a(\cdot)$  метод  $\widehat{\varphi}_a$ , определенный формулой

$$\widehat{\varphi}_a(g_1(\cdot), \dots, g_n(\cdot)) = (K_b * g_{s_i})(\cdot) + (K_a * g_{s_{i+1}})(\cdot), \quad (3)$$

где  $F[K_b](\xi, k) = b(\xi, k)$  и  $F[K_a](\xi, k) = a(\xi, k)$ , является оптимальным.

Если  $\tau > t_{s_k}$ , то метод  $\widehat{\varphi}$ , определенный формулой  $\widehat{\varphi}(g_1(\cdot), \dots, g_n(\cdot)) = (K * g_{s_k})(\cdot)$ , где  $F[K](\xi) = e^{-(\xi^2+k^2)t_{s_k}}$ , оптимален.

Заметим, что определение оптимальных методов корректно. Действительно, функция  $a(\cdot)$  ограничена (как следует из (2)) и обращается в ноль за пределами некоторого шара. Следовательно, она принадлежит  $L_2(\widehat{M})$  и значит, является образом некоторой функции  $K_a \in L_2(M)$ . Аналогично получаем, что  $K_b \in L_2(M)$  и поэтому свертка имеет смысл.

Отметим, что если  $t_1 > 0$  и  $0 < \tau < t_1$ , то, по определению,  $\theta(\tau) = -\infty$  и тем самым  $E_\tau(\bar{g}(\cdot), \bar{\delta}) = +\infty$ , т. е. “прошлое нельзя восстановить по неточному настоящему”.

Отметим еще, что оптимальные методы линейны, “сглаживают” наблюдения и используют информацию о не более чем двух измерениях.

#### ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

Общая схема дальнейших рассуждений такова. Мы получим оценку снизу для величины  $E_\tau(\bar{g}(\cdot), \bar{\delta})$  при любом  $\tau > 0$ , а затем покажем, что погрешность любого из методов (3) не превосходит этой оценки. Отсюда, очевидно, будет следовать, что данные методы оптимальны. Потом установим, что множество таких методов не пусто.

Как уже отмечалось, для каждого  $t > 0$  решение уравнения (1) однозначно определяется начальной функцией  $f(\cdot)$ , поэтому далее удобно писать  $u(\cdot, t, f)$  вместо  $u(\cdot, t)$ .

**Оценка снизу**  $E_\tau(\bar{g}(\cdot), \bar{\delta})$ . Для погрешности оптимального восстановления справедлива следующая оценка

$$E_\tau(\bar{g}(\cdot), \bar{\delta}) \geq \sup_{\substack{f(\cdot) \in L_2(M), \\ \|u(\cdot, t_i, f)\|_{L_2(M)} \leq \delta_i, i=1, \dots, n}} \|u(\cdot, \tau, f)\|_{L_2(M)}. \quad (4)$$

Это общий факт, верный в значительно более общей ситуации, чем рассматривается здесь. Доказательство его не приводим (см., например, [9]).

Нас интересует точное значение величины справа в (4). Оно есть значение следующей экстремальной задачи

$$\|u(\cdot, \tau, f)\|_{L_2(M)} \rightarrow \max, \quad \|u(\cdot, t_i, f)\|_{L_2(M)} \leq \delta_i, \quad i = 1, \dots, n, \\ f(\cdot) \in L_2(M), \quad (5)$$

т. е. верхней грани максимизируемого функционала при данных ограничениях.

Если искать решение уравнения (1) методом Фурье (см., например, [12]), то нетрудно проверить, что

$$F[u(\cdot, t, f)](\xi, k) = e^{-(\xi^2 + k^2)t} F[f](\xi, k)$$

для любого  $t > 0$ , п. в.  $\xi \in \mathbb{R}$  и всех  $k \in \mathbb{Z}$ .

Тогда согласно теореме Планшереля

$$\int_M |u(x, y, t, f)|^2 dx dy = \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} e^{-2(\xi^2 + k^2)t} |F[f](\xi, k)|^2 d\xi.$$

Отсюда следует, что в образах Фурье квадрат значения задачи (5) равен значению такой задачи:

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} e^{-2(\xi^2 + k^2)\tau} |F[f](\xi, k)|^2 d\xi \rightarrow \max, \\ \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} e^{-2(\xi^2 + k^2)t_i} |F[f](\xi, k)|^2 d\xi \leq \delta_i^2, \quad i = 1, \dots, n, \\ f(\cdot) \in L_2(M). \quad (6)$$

При каждом  $k \in \mathbb{Z}$  интегралы можно рассматривать как интегрирование по положительным мерам  $d\mu_k(\xi) = (2\pi)^{-2} |F[f](\xi, k)|^2 d\xi$  на  $\mathbb{R}$ , порожденным функциями  $f(\cdot) \in L_2(M)$ . Для нахождения значения данной задачи удобно рассмотреть более общую постановку, а именно, задачу на множестве всех положительных борелевских

мер на  $\mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} e^{-2(\xi^2+k^2)\tau} d\mu_k(\xi) &\rightarrow \max, \\ \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} e^{-2(\xi^2+k^2)t_i} d\mu_k(\xi) &\leq \delta_i^2, \quad i = 1, \dots, n, \quad d\mu_k \geq 0, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (7)$$

Мы найдем значение этой задачи, которое, очевидно, не меньше значения задачи (6), а потом покажем, что, на самом деле, значения этих задач совпадают.

Задача (7) относительно переменной  $\{d\mu_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  представляет собой задачу максимизации линейного функционала на выпуклом множестве. Для нахождения ее решения воспользуемся стандартными приемами.

Сопоставим этой задаче следующую функцию Лагранжа

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\{d\mu_k\}_{k \in \mathbb{Z}}, \lambda) &= - \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} e^{-2(\xi^2+k^2)\tau} d\mu_k(\xi) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \lambda_i \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} e^{-2(\xi^2+k^2)t_i} d\mu_k(\xi) - \delta_i^2 \right), \end{aligned}$$

которая определена на всех наборах  $\{d\mu_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ , где  $d\mu_k$  — борелевские меры на  $\mathbb{R}$ , принимающие значения в  $\mathbb{R}$  и всех наборах  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ , называемых множителями Лагранжа.

Согласно достаточным условиям в теореме Каруша–Куна–Таккера (см., например, [13]), если существует допустимый в задаче (7) набор  $\{d\hat{\mu}_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  и набор множителей Лагранжа  $\hat{\lambda} = (\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \dots, \hat{\lambda}_n)$  такие, что выполняются условия

$$(a) \quad \min_{\{d\mu_k \geq 0\}_{k \in \mathbb{Z}}} \mathcal{L}(\{d\mu_k\}_{k \in \mathbb{Z}}, \hat{\lambda}) = \mathcal{L}(\{d\hat{\mu}_k\}_{k \in \mathbb{Z}}, \hat{\lambda});$$

$$(b) \quad \hat{\lambda}_i \geq 0, \quad 1 \leq i \leq n;$$

$$(c) \quad \hat{\lambda}_i \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} e^{-2(\xi^2+k^2)t_i} d\hat{\mu}_k(\xi) - \delta_i^2 \right) = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

то  $\{d\hat{\mu}_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  — решение задачи (7).

Анализируя условия (a), (b) и (c), можно понять какие должны быть  $\{d\hat{\mu}_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  и  $\hat{\lambda}$ . Но, не проводя здесь этого анализа, предъявим сразу допустимый набор  $\{d\hat{\mu}_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  и набор множителей Лагранжа  $\hat{\lambda} = (\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \dots, \hat{\lambda}_n)$ , удовлетворяющих условиям (a), (b) и (c).

Пусть  $\tau > 0$  и  $\tau \neq t_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Тогда либо  $\tau \in (t_{s_i}, t_{s_{i+1}})$  для некоторого  $1 \leq i \leq k-1$ , либо  $\tau > t_{s_k}$ , либо  $\tau < t_1$ , если  $t_1 > 0$ . Рассмотрим первый случай.

Пусть  $\tau \in (t_{s_i}, t_{s_{i+1}})$ ,  $1 \leq i \leq k-1$ . Определим вектор  $\widehat{\lambda} = (\widehat{\lambda}_1, \dots, \widehat{\lambda}_n)$  так, что  $\widehat{\lambda}_{s_i}$  и  $\widehat{\lambda}_{s_{i+1}}$  — положительные числа, определенные перед формулировкой теоремы и  $\widehat{\lambda}_j = 0$ , если  $j \neq s_i, s_{i+1}$ ,

Набор мер  $\{d\widehat{\mu}_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  определим следующим образом:  $d\widehat{\mu}_k = 0$ , если  $k \neq 0$  и  $d\widehat{\mu}_0 = A\delta_{\xi_0}$ , где  $\delta_{\xi_0}$  — мера Дирака в точке  $\xi_0$  такой, что

$$\xi_0^2 = \frac{\ln(1/\delta_{s_{i+1}}) - \ln(1/\delta_{s_i})}{t_{s_{i+1}} - t_{s_i}}, \quad (8)$$

а

$$A = \delta_{s_i}^{\frac{2t_{s_{i+1}}}{t_{s_{i+1}} - t_{s_i}}} \delta_{s_{i+1}}^{\frac{2t_{s_i}}{t_{s_{i+1}} - t_{s_i}}}. \quad (9)$$

Так как функция  $\theta(\cdot)$ , определенная выше, возрастает на  $[t_{s_1}, t_{s_k}]$ , то числитель в формуле (8) положителен.

Нетрудно убедиться, что с такими  $\{d\widehat{\mu}_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  и  $\widehat{\lambda}$  выполнено условие (с), которое в данном случае имеет вид

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-2\xi^2 t_j} d\widehat{\mu}_0(\xi) = Ae^{-2\xi_0^2 t_j} = \delta_j^2, \quad j = s_i, s_{i+1}. \quad (10)$$

Проверим, что набор  $\{d\widehat{\mu}_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  допустим в задаче (7). Действительно, точки  $(t_i, \ln 1/\delta_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$  лежат не выше графика  $\theta(\cdot)$ , а так как эта вогнутая функция, то ее график лежит не выше прямой

$$p(t) = \frac{\ln 1/\delta_{s_{i+1}} - \ln 1/\delta_{s_i}}{t_{s_{i+1}} - t_{s_i}}(t - t_{s_i}) + \ln \frac{1}{\delta_{s_i}} = \ln \delta_{s_i}^{-\frac{t_{s_{i+1}} - t}{t_{s_{i+1}} - t_{s_i}}} \delta_{s_{i+1}}^{-\frac{t - t_{s_i}}{t_{s_{i+1}} - t_{s_i}}},$$

соединяющей точки  $(t_{s_i}, \ln 1/\delta_{s_i})$  и  $(t_{s_{i+1}}, \ln 1/\delta_{s_{i+1}})$ . Тогда, учитывая выражения для  $\xi_0^2$  и  $A$ , будем иметь

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} e^{-2\xi^2 t_i} d\widehat{\mu}_0(\xi) &= Ae^{-2\xi_0^2 t_i} = \delta_{s_i}^{\frac{2t_{s_{i+1}} - t_i}{t_{s_{i+1}} - t_{s_i}}} \delta_{s_{i+1}}^{\frac{2t_i - t_{s_i}}{t_{s_{i+1}} - t_{s_i}}} = \\ &= e^{-2p(t_i)} \leq e^{-2 \ln \frac{1}{\delta_i}} = \delta_i^2, \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

т. е. набор  $\{d\widehat{\mu}_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  допустим в задаче (7).

Осталось проверить условие (a), т. е. проверить, что

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\{d\mu_k\}_{k \in \mathbb{Z}}, \widehat{\lambda}) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} e^{-2(\xi^2+k^2)\tau} (-1 + \widehat{\lambda}_{s_i} e^{-2(\xi^2+k^2)(t_{s_i}-\tau)} \\ &+ \widehat{\lambda}_{s_{i+1}} e^{-2(\xi^2+k^2)(t_{s_{i+1}}-\tau)}) d\mu_k(\xi) - \widehat{\lambda}_{s_i} \delta_{s_i}^2 - \widehat{\lambda}_{s_{i+1}} \delta_{s_{i+1}}^2 \geq \mathcal{L}(\{d\widehat{\mu}_k\}_{k \in \mathbb{Z}}, \widehat{\lambda}) \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-2\xi^2\tau} (-1 + \widehat{\lambda}_{s_i} e^{-2\xi^2(t_{s_i}-\tau)} + \widehat{\lambda}_{s_{i+1}} e^{-2\xi^2(t_{s_{i+1}}-\tau)}) d\mu_0(\xi) \\ &\quad - \widehat{\lambda}_{s_i} \delta_{s_i}^2 - \widehat{\lambda}_{s_{i+1}} \delta_{s_{i+1}}^2 \quad (11) \end{aligned}$$

для всех наборов положительных мер  $\{d\mu_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ .

Множители Лагранжа  $\widehat{\lambda}_{s_i}$  и  $\widehat{\lambda}_{s_{i+1}}$  выбраны так (и в этом нетрудно убедиться), что выпуклая функция  $\omega \mapsto -1 + \widehat{\lambda}_{s_i} e^{-2\omega(t_{s_i}-\tau)} + \widehat{\lambda}_{s_{i+1}} e^{-2\omega(t_{s_{i+1}}-\tau)}$  на прямой обращается в ноль вместе со своей производной в точке  $\omega_0 = \xi_0^2$ . Это означает, что данная функция всюду неотрицательна и тем самым  $\mathcal{L}(\{d\mu_k\}_{k \in \mathbb{Z}}, \widehat{\lambda}) \geq -\widehat{\lambda}_{s_i} \delta_{s_i}^2 - \widehat{\lambda}_{s_{i+1}} \delta_{s_{i+1}}^2$ . Так как  $d\mu_0$  — мера Дирака в точке  $\xi_0$ , то интеграл справа в (11) равен нулю и значит,  $\mathcal{L}(\{d\widehat{\mu}_k\}_{k \in \mathbb{Z}}, \widehat{\lambda}) = -\widehat{\lambda}_{s_i} \delta_{s_i}^2 - \widehat{\lambda}_{s_{i+1}} \delta_{s_{i+1}}^2$ . Этим доказано условие (a).

Итак,  $\{d\widehat{\mu}_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  — решение задачи (7). Подставляя  $\{d\widehat{\mu}_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  в максимизируемый функционал, получаем значение этой задачи

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-2\xi^2\tau} d\widehat{\mu}_0(\xi) = A e^{-2\xi_0^2\tau} = \delta_{s_i}^{2 \frac{t_{s_{i+1}}-\tau}{t_{s_{i+1}}-t_{s_i}}} \delta_{s_{i+1}}^{2 \frac{\tau-t_{s_i}}{t_{s_{i+1}}-t_{s_i}}} = e^{-2p(\tau)} = e^{-2\theta(\tau)}.$$

С другой стороны, ясно, что величина  $\mathcal{L}(\{d\widehat{\mu}_k\}_{k \in \mathbb{Z}}, \widehat{\lambda})$  (в силу условия (c)) равна  $-\int_{\mathbb{R}} e^{-2\xi^2\tau} d\widehat{\mu}_0(\xi)$  и поэтому

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-2\xi^2\tau} d\widehat{\mu}_0(\xi) = e^{-2\theta(\tau)} = \widehat{\lambda}_{s_i} \delta_{s_i}^2 + \widehat{\lambda}_{s_{i+1}} \delta_{s_{i+1}}^2. \quad (12)$$

Рассмотрим теперь последовательность функций  $\varphi_m(\cdot) \in L_2(M)$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , преобразование Фурье которых имеет вид

$$F[\varphi_m](\xi, k) = \begin{cases} \sqrt{2\pi m} \delta_{s_i}^{\frac{t_{s_{i+1}}}{t_{s_{i+1}}-t_{s_i}}} \delta_{s_{i+1}}^{\frac{-t_{s_i}}{t_{s_{i+1}}-t_{s_i}}}, & \xi \in [\xi_0, \xi_0 + 1/m], k = 0; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Непосредственный подсчет показывает, что эти функции допустимы в задаче (6), а максимизируемый функционал на них сходится к  $e^{-2\theta(\tau)}$  при  $m \rightarrow \infty$ .

Итак, значения задач (6) и (7) совпадают. Тогда из формулы (12) и оценки (4) получаем, что

$$E_\tau(\bar{g}(\cdot), \bar{\delta}) \geq e^{-\theta(\tau)} = \sqrt{\widehat{\lambda}_{s_i} \delta_{s_i}^2 + \widehat{\lambda}_{s_{i+1}} \delta_{s_{i+1}}^2}. \quad (13)$$

**Оценка сверху  $E_\tau(\bar{g}(\cdot), \bar{\delta})$  и оптимальные методы.** Пусть  $\widehat{\varphi}_a$  — метод вида (3). Оценим его погрешность, которая, по определению, есть значение следующей задачи

$$\begin{aligned} & \|u(\cdot, \tau, f) - (K_b * g_{s_i})(\cdot) - (K_a * g_{s_{i+1}})(\cdot)\|_{L_2(M)} \rightarrow \max, \\ & \|u(\cdot, t_{s_j}, f) - g_{s_j}(\cdot)\|_{L_2(M)} \leq \delta_{s_j}, \quad z_{s_j}(\cdot) \in L_2(M), \quad j = i, i+1, \\ & f(\cdot) \in L_2(M). \end{aligned} \quad (14)$$

По теореме Планшереля квадрат максимизируемого функционал в этой задаче равен такой величине

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} |e^{-(\xi^2+k^2)\tau} F[f](\xi, k) - b(\xi, k)F[g_{s_i}](\xi, k) \\ & \quad - a(\xi, k)F[g_{s_{i+1}}](\xi, k)|^2 d\xi \\ & = \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} |b(\xi, k)z_i(\xi, k) + a(\xi, k)z_{i+1}(\xi, k)|^2, \end{aligned} \quad (15)$$

где  $z_j(\xi, k) = e^{-(\xi^2+k^2)t_{s_j}} F[f](\xi, k) - F[g_{s_j}](\xi, k)$ ,  $j = i, i+1$ .

Выражение под знаком интеграла справа в (15) оценим по неравенству Коши–Буняковского ( $\widehat{\lambda}_{s_i}$  и  $\widehat{\lambda}_{s_{i+1}}$  — множители Лагранжа, определенные выше).

$$\begin{aligned} & \left| \frac{b(\xi, k)}{\sqrt{\widehat{\lambda}_{s_i}}} \sqrt{\widehat{\lambda}_{s_i}} z_i(\xi, k) + \frac{a(\xi, k)}{\sqrt{\widehat{\lambda}_{s_{i+1}}}} \sqrt{\widehat{\lambda}_{s_{i+1}}} z_{i+1}(\xi, k) \right|^2 \\ & \leq \left( \frac{|b(\xi, k)|^2}{\widehat{\lambda}_{s_i}} + \frac{|a(\xi, k)|^2}{\widehat{\lambda}_{s_{i+1}}} \right) (\widehat{\lambda}_{s_i} |z_i(\xi, k)|^2 + \widehat{\lambda}_{s_{i+1}} |z_{i+1}(\xi, k)|^2). \end{aligned}$$

Первый сомножитель справа не превосходит единицы для п. в.  $\xi \in \mathbb{R}$  и всех  $k \in \mathbb{Z}$ . Действительно, если  $(\xi, k) \in B(r_i)$ , то это верно по условию (см. (2)). Если  $(\xi, k) \notin B(r_i)$ , то, снова по условию,  $a(\cdot) = 0$  и этот сомножитель равен  $c(\xi, k) = e^{-(\xi^2+k^2)(\tau-t_{s_i})}/\widehat{\lambda}_{s_i}$ . Но то, что  $(\xi, k) \notin B(r_i)$  равносильно, согласно определению  $r_i$ , неравенству  $c(\xi, k) \leq 1$ .

Итак, получаем, что выражение справа в (15) не превосходит величины

$$\widehat{\lambda}_{s_i} \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} |z_i(\xi, k)|^2 d\xi + \widehat{\lambda}_{s_{i+1}} \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} |z_{i+1}(\xi, k)|^2 d\xi.$$

Функция  $z_j(\cdot)$  есть преобразование Фурье функции  $u(\cdot, t_{s_j}, f) - g_{s_j}(\cdot)$ , норма которой в  $L_2(M)$  не превосходит  $\delta_j$ ,  $j = i, i+1$  согласно (14). Следовательно, по теореме Планшереля, норма последнего выражения не превосходит  $\widehat{\lambda}_{s_i} \delta_{s_i}^2 + \widehat{\lambda}_{s_{i+1}} \delta_{s_{i+1}}^2$ .

Таким образом, погрешность любого метода вида (3) не превосходит величины  $\sqrt{\widehat{\lambda}_{s_i} \delta_{s_i}^2 + \widehat{\lambda}_{s_{i+1}} \delta_{s_{i+1}}^2}$ . Вместе с оценкой (13) это означает, что все такие методы оптимальны и  $E_\tau(\bar{g}(\cdot), \bar{\delta}) = e^{-\theta(\tau)}$ .

Нетрудно показать, выделяя полный квадрат, что неравенство (2) равносильно такому неравенству

$$\left| a(\xi, k) - \frac{\widehat{\lambda}_{s_{i+1}} e^{-(\xi^2+k^2)(\tau-t_{s_i})}}{\widehat{\lambda}_{s_i} e^{(\xi^2+k^2)(t_{s_{i+1}}-t_{s_i})} + \widehat{\lambda}_{s_{i+1}} e^{-(\xi^2+k^2)(t_{s_{i+1}}-t_{s_i})}} \right| \leq \frac{\sqrt{\widehat{\lambda}_{s_i} \widehat{\lambda}_{s_{i+1}}} e^{(\xi^2+k^2)t_{s_{i+1}}}}{\widehat{\lambda}_{s_i} e^{(\xi^2+k^2)(t_{s_{i+1}}-t_{s_i})} + \widehat{\lambda}_{s_{i+1}} e^{-(\xi^2+k^2)(t_{s_{i+1}}-t_{s_i})}} \sqrt{h(\xi, k)},$$

где  $h(\xi, k) = -e^{-2(\xi^2+k^2)\tau} + \widehat{\lambda}_{s_i} e^{-2(\xi^2+k^2)t_{s_i}} + \widehat{\lambda}_{s_{i+1}} e^{-2(\xi^2+k^2)t_{s_{i+1}}}$ , и эта функция неотрицательна, как было установлено выше.

Из полученного неравенства, очевидно, следует, что множество функций  $a(\cdot)$ , удовлетворяющих условию теоремы, не пусто, и тем самым теорема доказана для случая, когда  $\tau \in (t_1, t_{s_k})$ . Ситуации  $0 < \tau < t_1$  или  $\tau > t_{s_k}$  рассматриваются аналогично, но технически значительно проще, и поэтому останавливаться здесь на этом не будем.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Смоляк С. А. Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них. Канд. дисс. Москва: МГУ, 1965.
- [2] Micchelli C. A., Rivlin T. J. A survey of optimal recovery. In: Optimal Estimation in Approximation Theory (C. A. Micchelli and T. J. Rivlin, Eds.). P. 1–54. New York: Plenum Press, 1977.
- [3] Melkman A. A., Micchelli C. A. "Optimal estimation of linear operators in Hilbert spaces from inaccurate data", *SIAM J. Numer. Anal.*, **16** (1979) 87–105.
- [4] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и

- неравенства для производных // Функц. анализ и его прил. 2003. Т. 37. С. 51–64.
- [5] G. G. Magaril-Ilyayev, K. Yu. Osipenko, V. M. Tikhomirov, *On Optimal Recovery of Heat Equation Solutions*. In Approximation Theory: A Volume Dedicated to V. Bojanov, Ed. by D. K. Dimitrov, G. Nikolov, and R. Uluchev (Marin Drinov Acad. Publ. House, Sofia, (2004), 163–175.
- [6] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Об оптимальном гармоническом синтезе по неточно заданному спектру // Функц. анализ и его прил. 2010. Т. 44. С. 76–79.
- [7] Магарил-Ильяев Г. Г., Сивкова Е. О. Наилучшее восстановление оператора Лапласа функции по ее неточно заданному спектру // Матем. сб., 203:4 (2012), 119–130.
- [8] Балова Е. А. Об оптимальном восстановлении решений задачи Дирихле по неточным исходным данным // Матем. заметки, 82:3 (2007), 323–334.
- [9] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Оптимальное восстановление решения уравнения теплопроводности по неточным измерениям // Матем. сб., 200:5 (2009), 37–54.
- [10] Абрамова Е. В. Восстановление решения задачи Дирихле по неточным граничным данным // Владикавк. матем. журн., 17:1 (2015), 3–13.
- [11] G. G. Magaril-Ilyayev, E. O. Sivkova. Optimal recovery of the semi-group operators from inaccurate data // Eurasian Mathematical Journal, 10:4 (2019), 75–84.
- [12] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976.
- [13] Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М. Выпуклый анализ и его приложения, изд. 5-е, доп. М.: УРСС, 2020.

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА

ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ ИМ. А. А. ХАРКЕВИЧА РАН