Министерство высшего и среднего специального образования
РСФСР

Московский авиационный технологический институт
им. К.Э. Циолковского

Кафедра “Высшая математика”

В.М. Асеев, В.В. Горбацевич, К.Ю. Осипенко

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ ПО КУРСУ “УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ”

Часть 1

Москва – 1983

Введение

Это пособие относится к серии методических пособий, посвященных изложению различных специальных разделов математики, и предназначено для преподавателей и студентов МАТИ. Пособие отличается от имеющихся учебников и других пособий большей доступностью изложения и учетом специфики технического ВУЗа, оно может быть использовано преподавателями при подготовке к лекциям, проведению занятий, а студентами — при самостоятельной работе и подготовке к экзаменам.

Данное методическое пособие посвящено изложению вопросов, относящихся к курсу уравнений с частными производными (уравнений математической физики). Рассматриваются основные понятия и определения, связанные с уравнениями с частными производными и вопросы приведения к каноническому виду линейных уравнений второго порядка. В последующих выпусках предполагается изложить вопросы, относящиеся к аналитическим методам решения основных уравнений математической физики (гиперболических, параболических и эллиптических) и численным методам их решений.

Изложение ведется на уровне математической строгости, достаточном для решения прикладных задач в удобном для усвоения материала будущими инженерами-технологами. Иногда оказывается удобным не оговаривать подробно условия дифференцируемости, накладываемые на используемые функции. Обычно считается, что функции имеют столько производных, сколько это необходимо в рассматриваемом случае (в наиболее важных вопросах условия дифференцируемости все же явно указываются). Кроме того, все функции предполагаются заданными в их естественной области определения, которая явно не всегда оговаривается.

ГЛАВА 1

УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

§ 1. Общие понятия

Пусть имеется функция u независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. *Уравнением с частными производными* называется соотношение, связывающее переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$, функцию u и все ее частные производные до некоторого порядка

$$F(x_1, \ldots, x_n, u, u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}, u_{x_1x_1}, u_{x_1x_2}, \ldots) = 0. \qquad (1.1)$$

Порядком уравнения называется порядок старшей производной, входящей в это уравнение.

Функция $u = u(x_1, \ldots, x_n)$ называется *решением уравнения* (1.1), если при подстановке ее в это уравнение оно обращается в тождество при допустимых значениях аргументов. Совокупность всех решений уравнения называется *общим решением*.

Рассмотрим некоторые примеры уравнений с частными производными для функции, зависящей от двух переменных $u = u(x, y)$.

Пример 1.1. Пусть дано уравнение $u_x = 0$. Это уравнение фактически означает, что функция $u(x, y)$ не зависит от x. Следовательно, решениями являются, например, функции $u(x, y) = y^2 + 2y$, $u(x, y) = e^y + \sin y$. Общее решение: $u(x, y) = C(y)$, где C — произвольная функция одной переменной y.

Пример 1.2. Рассмотрим уравнение $u_x = f(x, y)$. Для нахождения решения этого уравнения проинтегрируем его по переменной x

$$\int u_x \, dx = \int f(x, y) \, dx + C. \qquad (1.2)$$

При интегрировании по x мы считаем y постоянным и поэтому произвольная постоянная C в (1.2) может зависеть от y. Тем самым общее решение имеет вид:

$$u(x, y) = \int f(x, y) \, dx + C(y).$$

Пример 1.3. Пусть дано уравнение $u_{xy} = 0$. Из примера 1.1 следует, что $u_y = C(y)$. Решая это уравнение аналогично тому, как решалось уравнение в примере 1.2, будем иметь

$$u(x, y) = \int C(y) \, dy + C_1(x).$$

Обозначим $C_2(y) = \int C(y)\,dy$. Тогда общее решения примет вид

$$u(x,y) = C_1(x) + C_2(y).$$

Заметим, что в отличие от общего решения обыкновенного дифференциального уравнения, зависящего от произвольных постоянных, общее решение уравнения с частными производными зависит от произвольных функций.

§ 2. Задача Коши

Будем рассматривать случай, когда искомая функция u зависит от двух переменных x, y. Тогда уравнение первого порядка будет иметь вид

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = 0. \tag{2.1}$$

Всякое решение уравнения (2.1) $u = u(x,y)$ будем называть *интегральной поверхностью* (график решения — поверхность в пространстве с координатами x, y, u).

Для того, чтобы из совокупности всех решений уравнений (2.1) выделить некоторое частное решение, формулируется *задача Коши*: найти решение уравнения (2.1), удовлетворяющее условию

$$u(x,y)\big|_{x=x_0} = \varphi(y),$$

где $\varphi(y)$ — некоторая заданная функция.

Обозначим через l кривую в пространстве x, y, u, задаваемую уравнениями

$$x = x_0, \quad u = \varphi(y). \tag{2.2}$$

Тогда задача Коши имеет следующий геометрический смысл: среди всех интегральных поверхностей найти ту, которая проходит через заданную кривую l.

Можно поставить более общую задачу Коши, не ограничивая кривую l видом (2.2), а беря произвольную пространственную кривую. Если обозначить через λ проекцию кривой на плоскость (x,y), то эта задача Коши может быть сформулирована следующим образом: найти решение уравнения (2.1), удовлетворяющее условию

$$u(x,y)\big|_{(x,y)\in\lambda} = \varphi(x,y).$$

§ 3. Линейные однородные уравнения первого порядка

Уравнение с частными производными называется *линейным*, если искомая функция $u(x,y)$ и ее частные производные входят в уравнение линейно. Таким образом, линейное уравнение первого порядка имеет вид

$$A(x,y)u_x + B(x,y)u_y + C(x,y)u = f(x,y), \tag{3.1}$$

где A, B, C и f — заданные функции. Если $f(x,y) = 0$, то уравнение называется *однородным*.

Отметим, что основные свойства линейных уравнений с частными производными во многом аналогичны свойствам обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. Так, например, линейная комбинация решений однородного уравнения тоже является решением этого уравнения. Общее решение неоднородного уравнения может быть представлено в виде некоторого частного решения и общего решения соответствующего однородного уравнения.

Будем рассматривать сначала однородное линейное уравнение вида

$$A(x,y)u_x + B(x,y)u_y = 0. \tag{3.2}$$

Этому уравнению поставим в соответствие систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = A(x,y), \\ \dfrac{dy}{dt} = B(x,y), \end{cases} \tag{3.3}$$

которую будем называть *характеристической системой* для уравнения (3.2), а всякое решение $x(t), y(t)$ этой системы назовем *характеристикой.*

Функция $\varphi(x,y)$, не сводящаяся тождественно к постоянной, или равенство $\varphi(x,y) = C$ называется *первым интегралом системы* (3.3), если при подстановке в нее любого решения системы получается постоянная величина, зависящая лишь от выбора решения.

Теорема 3.1. *Пусть* $\varphi(x,y) = C$ *есть первый интеграл системы* (3.3). *Тогда функция* $u = \varphi(x,y)$ *удовлетворяет уравнению* (3.2).

Доказательство. Подставим в первый интеграл системы (3.3) какое-либо решение $x(t), y(t)$ этой системы. Получим

$$\varphi(x(t), y(t)) = C.$$

Возьмем производную по t от обеих частей этого равенства

$$\frac{d\varphi(x(t), y(t))}{dt} = \varphi_x \frac{dx}{dt} + \varphi_y \frac{dy}{dt} \equiv 0.$$

Поскольку $x(t), y(t)$ — решения характеристической системы (3.3), имеем

$$\varphi_x A(x,y) + \varphi_y B(x,y) = 0.$$

В силу того, что последнее равенство выполнено для любого решения системы (3.3), оно справедливо для любых x, y, входящих в область определения. Тем самым функция φ удовлетворяет уравнению (3.2). Теорема доказана. $\square$

Можно доказать и обратное утверждение.

Теорема 3.2. *Пусть функция $u = \varphi(x, y)$ удовлетворяет уравнению* (3.2). *Тогда $\varphi(x, y) = C$ есть первый интеграл системы* (3.3).

Доказательство. Подставим в функцию $\varphi(x, y)$ какое-нибудь решение системы (3.3) и возьмем полную производную по t

$$\frac{d\varphi(x(t), y(t))}{dt} = \varphi_x \frac{dx}{dt} + \varphi_y \frac{dy}{dt} = \varphi_x A(x, y) + \varphi_y B(x, y).$$

Поскольку φ — решение уравнения (3.2), имеем

$$\frac{d\varphi(x(t), y(t))}{dt} = 0.$$

Следовательно,

$$\varphi(x(t), y(t)) = C,$$

а это и означает, что $\varphi(x, y) = C$ есть первый интеграл системы системы (3.3). Теорема доказана. □

Доказанные две теоремы устанавливают эквивалентность понятий первого интеграла системы (3.3) и решения уравнения (3.2).

Если $\varphi(x, y) = C$ — первый интеграл системы (3.3), то произвольная функция $F(\varphi)$ является также первым интегралом этой системы. Следовательно, по теореме 3.1 $F(\varphi)$ удовлетворяет уравнению (3.2) при произвольной достаточно гладкой функции F.

Можно показать, что при выполнении некоторых условий всякое решение уравнения (3.2) может быть представлено в виде $u = F(\varphi)$. Отсюда вытекает следующее правило: чтобы найти общее решение уравнения (3.2), надо составить характеристическую систему (3.3) и найти первый интеграл этой системы. Общее решение уравнения (3.2) будет

$$u = F(\varphi),$$

где F — произвольная функция.

Пример 3.1. Рассмотрим уравнение

$$x u_x + y u_y = 0. \tag{3.4}$$

Характеристическая система для этого уравнения:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x, \\ \dfrac{dy}{dt} = y. \end{cases} \tag{3.5}$$

Решение этой системы (характеристики) имеет вид

$$\begin{cases} x = C_1 e^t, \\ y = C_2 e^t. \end{cases}$$

Первым интегралом системы (3.5) является функция $\varphi(x,y) = \dfrac{y}{x}$. Следовательно, общее решение уравнения (3.4) будет

$$u(x,y) = F\left(\frac{y}{x}\right),$$

т.е. произвольная однородная функция переменных x, y.

Для нахождения первого интеграла характеристической системы (3.3) можно исключить переменную t и получить обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B(x,y)}{A(x,y)}. \tag{3.6}$$

Если $y = y(x, C)$ — общее решение этого уравнения, то выразим произвольную постоянную C через x, y и получим первый интеграл системы (3.3) $\varphi(x,y) = C$. Аналогично поступим, если будет найден общий интеграл уравнения (3.6) $F(x,y,C) = 0$.

Пример 3.2. Рассмотрим уравнение

$$yu_x - xu_y = 0. \tag{3.7}$$

Характеристическая система будет иметь вид

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x. \end{cases} \tag{3.8}$$

Исключим переменную t из этой системы

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Разделяя переменные, получим

$$ydy = -xdx.$$

Проинтегрировав это уравнение, находим его общий интеграл

$$x^2 + y^2 = C.$$

Это соотношение одновременно является первым интегралом для системы (3.8). Заметим, что характеристиками в данном случае будут являться окружности с центром в начале координат. Итак, общее решение уравнения (3.7) имеет вид

$$u(x,y) = F(x^2 + y^2). \tag{3.9}$$

§ 4. Квазилинейные уравнения первого порядка

Квазилинейным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$A(x,y,u)u_x + B(x,y,u)u_y = C(x,y,u). \tag{4.1}$$

Заметим, что линейное уравнение (3.1) является частным случаем квазилинейного уравнения, в которое функция u может входить и нелинейно.

Будем искать решение уравнения (4.1) в виде неявной функции

$$\varphi(x,y,u) = C,$$

где C — произвольная постоянная. Согласно правилу дифференцирования неявной функции имеем

$$u_x = -\frac{\varphi_x}{\varphi_u}, \quad u_y = -\frac{\varphi_y}{\varphi_u}.$$

Подставляя эти выражения в (4.1), получим для φ уравнение

$$A(x,y,u)\varphi_x + B(x,y,u)\varphi_y + C(x,y,u)\varphi_u = 0. \tag{4.2}$$

Это уравнение отличается от уравнения (3.2) лишь тем, что коэффициенты и искомая функция φ, входящие в него, зависят от трёх переменных x, y, u. Поэтому уравнение (4.2) решается аналогично уравнению (3.2). Для этого рассматривается характеристическая система, состоящая уже из трёх уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = A(x,y,u), \\ \dfrac{dy}{dt} = B(x,y,u), \\ \dfrac{du}{dt} = C(x,y,u). \end{cases} \tag{4.3}$$

Если

$$\varphi_1(x,y,u) = C_1; \quad \varphi_2(x,y,u) = C_2 \tag{4.4}$$

— два *независимых* (под независимостью понимается разрешимость относительно каких-либо двух из переменных x, y, u равенства (4.4)) интеграла системы (4.3), то общее решение уравнения (4.2), а значит, и решение исходного уравнения (4.1) в виде неявной функции, будет иметь вид

$$\varphi = F(\varphi_1, \varphi_2), \tag{4.5}$$

где F — произвольная функция своих аргументов.

§ 5. Геометрическая интерпретация. Задача Коши

Пусть в пространстве с координатами (x, y, u) задано поле направлений

$$(A(x, y, u), B(x, y, u), C(x, y, u)),$$

т.е. в каждой точке пространства мы имеем направление, у которого направляющие косинусы пропорциональны A, B, C. Это поле направлений определяет семейство линий, таких, что любая линия семейства имеет в каждой своей точке касательную, совпадающую с направлением поля в этой точке. Это семейство линий получается в результате интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{A(x, y, u)} = \frac{dy}{B(x, y, u)} = \frac{du}{C(x, y, u)},$$

которая, если обозначить через dt общую величину написанных трех отношений, переходит в систему (4.3).

Если имеется некоторая поверхность $u = u(x, y)$, то величины u_x, u_y и -1 пропорциональны направляющим косинусам нормали к этой поверхности. Таким образом, уравнение (4.1) выражает условие перпендикулярности нормали и поверхности $u = u(x, y)$ с направлением поля, т.е. уравнение (4.1) сводится к требованию, чтобы в каждой точке искомой поверхности $u = u(x, y)$ направление, определяемое полем (A, B, C), находилось в касательной плоскости к поверхности.

Пусть некоторая поверхность $u = u(x, y)$ состоит из характеристик системы (4.3). Тогда в каждой точке этой поверхности касательная к характеристике, проходящей через эту точку, лежит в касательной плоскости к поверхности, и следовательно, эта поверхность удовлетворяет уравнению (4.1), т.е. является интегральной поверхностью этого уравнения.

Можно показать, что верно и обратное: если некоторая *гладкая поверхность* (предполагается существование и непрерывность производных u_x, u_y) удовлетворяет уравнению (4.1), то ее можно полностью заполнить характеристиками.

Из (4.5) следует, что общее уравнение интегральных поверхностей для уравнения (4.1) будет иметь вид:

$$F(\varphi_1, \varphi_2) = 0 \tag{5.1}$$

(постоянную C можно не писать в силу произвольности F).

Если выбрать некоторую функцию F, то поверхность (5.1) будет геометрическим местом тех характеристик системы (4.3), у которых значения постоянных в равенствах (4.4) связаны соотношением:

$$F(C_1, C_2) = 0. \tag{5.2}$$

Решение уравнения (4.1) становится, вообще говоря, однозначно определенным, если потребовать, чтобы искомая поверхность проходила через заданную в пространстве кривую l, т.е. если решать задачу Коши. Искомая поверхность будет образована теми характеристиками, которые выходят из точек кривой l.

Исключительным является тот случай, когда сама кривая l является характеристикой. В этом случае через линию l проходит, вообще говоря, бесчисленное множество поверхностей.

Пример 5.1. Рассмотрим уравнение

$$xuu_x + yuu_y = -(x^2 + y^2). \tag{5.3}$$

Соответствующая характеристическая система будет такова:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = xu, \\ \dfrac{dy}{dt} = yu, \\ \dfrac{du}{dt} = -(x^2 + y^2). \end{cases} \tag{5.4}$$

Из первых двух уравнений имеем

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}.$$

Отсюда $\ln|y| = \ln|C_1 x|$, что равносильно соотношению

$$\frac{y}{x} = C_1. \tag{5.5}$$

Чтобы найти второй интеграл системы (5.4), разделим последнее ее уравнение на второе:

$$\frac{du}{dy} = -\frac{x^2 + y^2}{yu}.$$

Пользуясь равенством (5.5), получаем

$$\frac{du}{C_1 dx} = -\frac{x^2(1 + C_1^2)}{C_1 xu}.$$

Отсюда

$$udu = -x(1 + C_1^2)dx.$$

Интегрируя это равенство, имеем

$$u^2 + x^2(1 + C_1^2) = C_2.$$

Подставив C_1 из (5.5), получим второй интеграл

$$x^2 + y^2 + u^2 = C_2. \tag{5.6}$$

Уравнения (5.5) определяют плоскости, проходящие через ось Ou, а уравнения (5.6) — сферы с центром в начале координат. Тем самым характеристики системы (5.4) — это семейство окружностей, лежащих в указанных плоскостях и имеющих центр в начале координат. Общее решение уравнения (5.3) будет

$$F\left(\frac{y}{x}, x^2+y^2+u^2\right), \tag{5.7}$$

где F — произвольная функция двух аргументов.

Пример 5.2. Решим задачу Коши для уравнения (5.3). Среди интегральных поверхностей этого уравнения найдем ту, которая проходит через прямую

$$x = 1, \quad y = u. \tag{5.8}$$

Исключим x, y и u из уравнений (5.5), (5.6) и (5.8). Уравнения (5.5) и (5.8) дают

$$x = 1, \quad y = C_1, \quad u = C_1.$$

Подставляя в уравнение (5.6), получаем

$$1 + 2C_1^2 - C_2 = 0.$$

Таким образом,

$$F(C_1, C_2) = 1 + 2C_1^2 - C_2.$$

Отсюда искомая интегральная поверхность имеет вид

$$1 + 2\left(\frac{y}{x}\right)^2 - (x^2+y^2+u^2) = 0.$$

Пример 5.3. Будем искать интегральную поверхность для уравнения (3.7), проходящую через окружность $x^2 + y^2$ в плоскости (x, y). Из общего решения (3.9) видно что таковой будет любая поверхность

$$u = F(x^2+y^2) - F(1).$$

Например, параболоид

$$u = x^2 + y^2 - 1$$

или конус

$$u = \sqrt{x^2+y^2} - 1,$$

наконец, просто плоскость $u = 1$. Неоднозначность решения связана здесь с тем, что заданная кривая, через которую должна проходить интегральная поверхность, является характеристикой.

ГЛАВА 2

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§ 6. Классификация линейных уравнений второго порядка

Будем рассматривать уравнения с частными производными второго порядка, линейные относительно старших производных, т.е. имеющие вид

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}uxy + a_{22}u_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0, \tag{6.1}$$

где a_{11}, a_{12}, a_{22} являются функциями x и y.

С помощью преобразования переменных

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x.y),$$

допускающего обратное преобразование (для этого достаточно потребовать, чтобы функциональный определитель

$$D = \begin{vmatrix} \varphi_x & \psi_x \\ \varphi_y & \psi_y \end{vmatrix}$$

был отличен от нуля), можно получить уравнение, эквивалентное исходному. Нас будет интересовать вопрос: как выбрать новые переменные ξ и η, чтобы относительно них уравнение имело наиболее простой (канонический) вид.

Перейдя к новым переменным, будем иметь

$$\begin{aligned} u_x =& u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x, \\ u_y =& u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y, \\ u_{xx} =& (u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x)_\xi \xi_x + (u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x)_\eta \eta_x = u_{\xi\xi}\xi_x^2 + u_\xi (\xi_x)_\xi \xi_x \\ &+ u_{\eta\xi}\eta_x \xi_x + u_\eta (\eta_x)_\xi \xi_x + u_{\xi\eta}\xi_x \eta_x + u_\xi (\xi_x)_\eta \eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 \\ &+ u_\eta (\eta_x)_\eta \eta_x = u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x \eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 \\ &+ u_\xi ((\xi_x)_\xi \xi_x + (\xi_x)_\eta \eta_x) + u_\eta ((\eta_x)_\xi \xi_x + (\eta_x)_\eta \eta_x) = u_{\xi\xi}\xi_x^2 \\ &+ 2u_{\xi\eta}\xi_x \eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx}. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Аналогично получаем

$$\begin{aligned} u_{xy} =& u_{\xi\xi}\xi_x \xi_y + u_{\xi\eta}(\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_x) + u_{\eta\eta}\eta_x \eta_y + u_\xi \xi_{xy} + u_\eta \eta_{xy}, \\ u_{yy} =& u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y \eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy}. \end{aligned} \tag{6.3}$$

После подстановки полученных производных в (6.1) получим уравнение

$$\overline{a}_{11}u_{\xi\xi} + 2\overline{a}_{12}u_{\xi\eta} + \overline{a}_{22}u_{\eta\eta} + F_1(\xi, \eta, u_\xi, u_\eta, u) = 0, \tag{6.4}$$

где

$$\begin{aligned} \overline{a}_{11} &= a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2, \\ \overline{a}_{12} &= a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \eta_x\xi_y) + a_{22}\xi_y\eta_y, \\ \overline{a}_{22} &= a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2. \end{aligned} \tag{6.5}$$

Заметим, что если исходное уравнение линейно, т.е.

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = b_1u_x + b_2u_y + cu + f,$$

то F_1 имеет вид

$$F_1(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = \beta_1u_\xi + \beta_2u_\eta + \gamma u + \delta.$$

Таким образом, уравнение в этом случае снова получается линейным.

Попытаемся выбрать переменную $\xi = \varphi(x, y)$ так, чтобы коэффициент $\overline{a}_{11}$ в уравнении (6.4) был равен нулю. Для этого необходимо, чтобы $\xi = \varphi(x, y)$ было решением уравнения

$$a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 = 0. \tag{6.6}$$

Уравнение (6.6) можно записать в виде произведения

$$\left[a_{11}\xi_x - \left(-a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}\right)\xi_y\right] \times \left[a_{11}\xi_x - \left(-a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}\right)\xi_y\right] = 0.$$

Таким образом, решение уравнения (6.6) свелось к решению двух линейных однородных уравнений первого порядка

$$a_{11}\xi_x - \left(-a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}\right)\xi_y = 0. \tag{6.7}$$

Из § 3 следует, что для решения уравнений (6.7) надо найти общий интеграл каждого из уравнений

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}. \tag{6.8}$$

На вид решений уравнений (6.8) существенно влияет знак подкоренного выражения $a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$. По знаку этого выражения определяется тип уравнения (6.1).

Будем называть уравнение (6.1) в точке M

гиперболического типа, если $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$,

эллиптического типа, если $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$,

параболического типа, если $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$.

Можно убедиться в справедливости равенства

$$\overline{a}_{12}^2 - \overline{a}_{11}\overline{a}_{22} = (a_{12}^2 - a_{11}a_{22})D^2,$$

из которого следует, что тип уравнения не меняется при преобразовании переменных.

Следует отметить также, что тип уравнения зависит от точки M и в разных точках может быть разным.

Пример 6.1. Рассмотрим уравнение

$$u_{xx} + xu_{yy} = 0, \tag{6.9}$$

здесь $a_{11} = 1$, $a_{12} = 0$ и $a_{22} = x$, следовательно,

$$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -x.$$

Тем самым при $x < 0$ уравнение (6.9) гиперболического типа, при $x = 0$ — параболического типа, а при $x > 0$ — эллиптического типа.

§ 7. Приведение линейных уравнений второго порядка к канонической форме

Уравнение

$$a_{11}dy^2 - 2a_{12}dxdy + a_{22}dx^2 = 0 \tag{7.1}$$

будем называть *характеристическим* для уравнения (6.1), а его интегралы — *характеристиками*. Уравнение (6.1) распадается на два уравнения (6.8) и играет основную роль в задаче приведения к каноническому виду уравнения (6.1). Заметим, что для уравнения гиперболического типа характеристики действительные и различные, для уравнений эллиптического типа — комплексные и различные, а для уравнений параболического типа обе характеристики действительные и совпадают.

Разберем каждый из этих случаев в отдельности.

1. Для уравнений гиперболического типа $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$ и правые части уравнений (6.8) действительные и различные. Общие интегралы их $\varphi(x, y) = C$ и $\psi(x, y) = C$ определяют семейства характеристик.

Положим

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y),$$

тогда коэффициенты $\overline{a}_{11}$ и $\overline{a}_{22}$ (6.5) обратятся в нуль и уравнение (6.4) после деления на коэффициент при $u_{\xi\eta}$ приведется к виду

$$u_{\xi\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta), \tag{7.2}$$

где $\Phi = -\dfrac{F_1}{2\overline{a}_{12}}$. Это — так называемая *каноническая* форма уравнений гиперболического типа. Часто пользуется другой канонической формой. Положим

$$\alpha = \frac{\xi + \eta}{2}, \quad \beta = \frac{\xi - \eta}{2},$$

где α и β — новые переменные. Тогда

$$u_\xi = \frac{1}{2}(u_\alpha + u_\beta), \quad u_\eta = \frac{1}{2}(u_\alpha - u_\beta), \quad u_{\xi\eta} = \frac{1}{4}(u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta})$$

и уравнение (7.2) примет вид

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = \Phi_1,$$

где $\Phi_1 = 4\Phi$.

2. Для уравнений параболического типа $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$, и уравнение (6.8) дает один общий интеграл $\varphi(x,y) = C$. Положим в этом случае

$$\xi = \varphi(x,y), \quad \eta = \psi(x,y),$$

где $\psi(x,y)$ — любая функция, допускающая вместе с $\varphi(x,y)$ обратное преобразование переменных. Тогда

$$\overline{a}_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 = a_{11}\left[\xi_x + \frac{a_{12}}{a_{11}}\xi_y\right]^2 = 0,$$

$$\overline{a}_{12} = a_{11}\left[\xi_x + \frac{a_{12}}{a_{11}}\xi_y\right]\left[\eta_x + \frac{a_{12}}{a_{11}}\eta_y\right] = 0,$$

т.к. $a_{12}^2 = a_{11}a_{22}$. После деления уравнения (6.4) на коэффициент при $u_{\xi\eta}$ получим каноническую форму для уравнения параболического типа

$$u_{\eta\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta),$$

где $\Phi = -\dfrac{F_{11}}{\overline{a}_{22}}$.

3. Для уравнения эллиптического типа $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$ и правые части уравнения (6.8) комплексно сопряженные, поэтому общие интегралы этих уравнений будут также комплексно сопряженными

$$\varphi(x,y) = C, \quad \overline{\varphi}(x,y) = C.$$

Чтобы не иметь дела с комплексными переменными и функциями, введем новые, уже вещественные, переменные α и β

$$\alpha = \frac{\varphi + \overline{\varphi}}{2}, \quad \beta = \frac{\varphi - \overline{\varphi}}{2i},$$

т.е. $\varphi = \alpha + i\beta$, $\overline{\varphi} = \alpha - i\beta$. Таким образом,

$$0 = a_{11}\varphi_x^2 + 2a_{12}\varphi_x\varphi_y + a_{22}\varphi_y^2 = a_{11}(\alpha_x + i\beta_x)^2 + 2a_{12}(\alpha_x + i\beta_x)(\alpha_y + i\beta_y)$$
$$+ a_{22}(\alpha_y + i\beta_y)^2 = (a_{11}\alpha_x^2 + 2a_{12}\alpha_x\alpha_y + a_{22}\alpha_y^2) - (a_{11}\beta_x^2 + 2a_{12}\beta_x\beta_y + a_{22}\beta_y^2)$$
$$+ 2i(a_{11}\alpha_x\beta_x + a_{12}(\alpha_x\beta_y + \alpha_y\beta_x) + a_{22}\alpha_y\beta_y).$$

Отсюда следует (см. (6.5)), что $\overline{a}_{11} = \overline{a}_{22}$ и $\overline{a}_{12} = 0$. Уравнение (6.4) после деления на коэффициент при $u_{\alpha\alpha}$ принимает вид

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = \Phi(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta),$$

где $\Phi = -\dfrac{F_1}{\overline{a}_{11}}$.

Итак, в зависимости от знака выражения $a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$ (т.е. от типа уравнения) получаем следующие канонические формы уравнения (6.1):

1. Гиперболический тип: $u_{\xi\eta} = \Phi$ или $u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = \Phi$.
2. Параболический тип: $u_{\eta\eta} = \Phi$.
3. Эллиптический тип: $u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = \Phi$.

§ 8. Канонические формы линейных уравнений с постоянными коэффициентами

Линейное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu + f(x,y) = 0. \tag{8.1}$$

Решая уравнение (6.8) получаем характеристики, которые будут прямыми линиями

$$y = \lambda_1 x + C_1, \quad y = \lambda_2 x + C_2,$$

где λ_1 и λ_2 корни уравнения (его удобно в данном случае тоже называть характеристическим)

$$a_{11}\lambda^2 - 2a_{12}\lambda + a_{22} = 0. \tag{8.2}$$

Теперь с помощью соответствующего преобразования переменных, а именно:

1. Если λ_1 и λ_2 вещественные и различные (гиперболический тип)

$$\xi = y - \lambda_1 x, \quad \eta = y - \lambda_2 x \quad \text{или} \quad \xi = y - \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}x, \quad \eta = \frac{\lambda_2 - \lambda_2}{2}x;$$

2. Если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ (параболический тип)

$$\xi = y - \lambda x, \quad \eta = x;$$

3. Если $\lambda_{1,2} = a \pm ib$ $(b \neq 0)$ (эллиптический тип)

$$\xi = y - ax, \quad \eta = bx;$$

уравнение (8.1) приводится к одному из следующих видов:

1. $u_{\xi\eta} + \Phi = 0$ или $u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + \Phi = 0$;
2. $u_{\eta\eta} + \Phi = 0$;
3. $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \Phi = 0$;

здесь $\Phi = \beta_1 u_\xi + \beta_2 u_\eta + cu + f$.

Пример 8.1. Привести к каноническому виду уравнение

$$u_{xx} + 3u_{xy} + 2u_{yy} = 0. \tag{8.3}$$

Напишем характеристическое уравнение (8.2)

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0.$$

Следовательно, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. Уравнение — гиперболического типа, поэтому делаем замену

$$\xi = y - x, \quad \eta = y - 2x \quad \text{или} \quad \xi = y - \frac{3}{2}x, \quad \eta = x.$$

После замены переменных уравнение имеет вид $u_{\xi\eta} = 0$ или $u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} = 0$. Заметим, что решение уравнения $u_{\xi\eta} = 0$ рассматривалось в примере 1.3. Тем самым мы можем выписать общее решение уравнения (8.3)

$$u = \varphi(\xi) + \psi(\eta) = \varphi(y - x) + \psi(y - 2x).$$

Пример 8.2. Привести к каноническому виду уравнение

$$u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + u_x + u_y = 0. \tag{8.4}$$

Решая характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0,$$

получаем $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Следовательно, уравнение (8.4) параболического типа. Делаем замену $\xi = y - x$, $\eta = x$. Имеем

$$\begin{aligned}
u_x &= u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = u_\eta - u_\xi,\\
u_y &= u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = u_\xi,\\
u_{xx} &= (u_\eta - u_\xi)_\xi \xi_x + (u_\eta - u_\xi)_\eta \eta_x = -(u_{\eta\xi} - u_{\xi\xi}) + (u_{\eta\eta} - u_{\xi\eta})\\
&\qquad = u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta},\\
u_{yy} &= (u_\xi)_\xi \xi_y + (u_\xi)_\eta \eta_y = u_{\xi\xi},\\
u_{xy} &= (u_\eta - u_\xi)_\xi \xi_y + (u_\eta - u_\xi)_\eta \eta_y = u_{\eta\eta} - u_{\xi\xi}.
\end{aligned}$$

Подставляя полученные выражения в уравнение (8.4) и приводя подобные члены, будем иметь

$$u_{\eta\eta} + u_\eta = 0.$$

Заметим, что мы получили уравнение, которое можно рассматривать и как обыкновенное дифференциальное уравнение, зависящее от параметра ξ. Решая его, получаем

$$u = C_1(\xi) + C_2(\xi)e^{-\eta} = C_1(y - x) + C_2(y - x)e^{-x}.$$

Пример 8.3. Привести к каноническому виду уравнение

$$u_{xx} - 2u_{xy} + 2u_{yy} + u_x + u_y = 0. \tag{8.5}$$

Для корней характеристического уравнения

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$$

имеем $\lambda_{1,2} = -1 \pm i$. Уравнение — эллиптического типа, поэтому делаем замену

$$\xi = x + y, \quad \eta = x.$$

Подставляя выражения

$$
\begin{aligned}
u_x &= u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = u_\xi + u_\eta, \\
u_y &= u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = u_\xi, \\
u_{xx} &= u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}, \\
u_{xy} &= u_{\xi\xi} + u_{\xi\eta}, \quad u_{yy} = u_{\xi\xi},
\end{aligned}
$$

в уравнение (8.5), получаем

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + 2u_\xi + u_\eta = 0. \tag{8.6}$$

Для линейных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами возможны дальнейшие упрощения канонической формы уравнений. Введем для этого вместо u новую функцию v:

$$u = e^{\lambda\xi+\mu\eta} v,$$

где λ и μ — некоторые постоянные. Тогда

$$
\begin{aligned}
u_\xi &= e^{\lambda\xi+\mu\eta}(v_\xi + \lambda v), \\
u_\eta &= e^{\lambda\xi+\mu\eta}(v_\eta + \mu v), \\
u_{\xi\xi} &= e^{\lambda\xi+\mu\eta}(v_{\xi\xi} + 2\lambda v_\xi + \lambda^2 v), \\
u_{\xi\eta} &= e^{\lambda\xi+\mu\eta}(v_{\xi\eta} + 2\lambda v_\eta + \mu v_\xi + \lambda\mu v), \\
u_{\eta\eta} &= e^{\lambda\xi+\mu\eta}(v_{\eta\eta} + 2\mu v_\eta + \mu^2 v).
\end{aligned}
\tag{8.7}
$$

Подставляем эти выражения, например, в уравнение

$$u_{\xi\eta} + \beta_1 u_\xi + \beta_2 u_\eta + cu + f = 0$$

и сокращая затем на $e^{\lambda\xi+\mu\eta}$, получим

$$v_{\xi\eta} + (\mu + \beta_1)v_\xi + (\lambda + \beta_2)v_\eta + (\lambda\mu + \beta_1\lambda + \beta_2\mu + c)v + f_1 = 0.$$

Выберем параметры λ и μ так, чтобы коэффициенты при первых производных обратились в нуль ($\lambda = -\beta_2$, $\mu = -\beta_1$). В результате получим

$$v_{\xi\eta} + \gamma v + f_1 = 0,$$

где $\gamma = \lambda\mu + \beta_1\lambda + \beta_2\mu + c = c - \beta_1\beta_2$, $f_1 = fe^{\lambda\xi+\mu\eta}$.

Аналогично упрощения проводятся и для других канонических форм. Окончательно приходим к следующим каноническим формам для уравнений с постоянными коэффициентами:

1. Гиперболический тип

$$v_{\xi\eta} + \gamma v + f_1 = 0 \quad \text{или} \quad v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} - \gamma v + f_1 = 0.$$

2. Параболический тип

$$v_{\eta\eta} + \beta_1 v_\xi + f_1 = 0.$$

3. Эллиптический тип

$$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + \gamma v + f_1 = 0.$$

Пример 8.4. Упростим уравнение (8.6), полученное в примере 8.3. Подставляя выражения для производных (8.7) и сокращая на $e^{\lambda\xi+\mu\eta}$, будем иметь

$$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + 2(\lambda+1)v_\xi + (2\mu+1)v_\eta + (\lambda^2+\mu^2-2\lambda+\mu)v = 0.$$

Выберем $\lambda = -1$, $\mu = -\dfrac{1}{2}$. Тогда уравнение будет иметь вид

$$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} - \frac{5}{4}v = 0.$$

Содержание