

Министерство высшего и среднего специального образования
РСФСР

Московский авиационный технологический институт
им. К.Э. Циолковского

Кафедра “Высшая математика”

В.М. Асеев, В.В. Горбацевич, К.Ю. Осипенко

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ ПО КУРСУ
“УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ”

Часть 2

УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Москва – 1983

ГЛАВА 3

Уравнения гиперболического типа

Уравнения с частными производными второго порядка гиперболического типа наиболее часто встречаются в физических задачах, связанных с процессами колебаний. Простейшее уравнение гиперболического типа

$$u_{xx} - u_{yy} = 0$$

обычно называют *уравнением колебаний струны*.

§ 9. Уравнения малых поперечных колебаний струны

Рассмотрим струну длины l , расположенную на оси Ox . Будем предполагать, что выполнены следующие условия:

1. Колебания струны происходят в плоскости (x, u) .
2. Вектор смещения перпендикулярен в любой момент к оси Ox . В силу этого процесс можно описать функцией $u(x, t)$, равной отклонению от положения равновесия точки с абсциссой x в момент времени t .
3. Струна рассматривается как гибкая, абсолютно упругая нить. Это означает, что, во-первых, напряжения, возникающие в струне, направлены по касательным к ее мгновенному профилю (струна не сопротивляется изгибу) (рис. 1). Во-вторых, абсолютная упругость означает справедливость закона Гука, т.е. натяжение струны пропорционально ее удлинению.
4. Струна является однородной, т.е. имеет постоянную линейную плотность ρ .
5. Рассматриваются только малые колебания, т.е. величины порядка u_x^2 и выше отбрасываются.
6. Предполагается, что на струну действует некоторая внешняя сила, направленная перпендикулярно оси Ox , с плотностью

$$g(x, t) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta x},$$

где ΔF — сила, действующая на участок струны длиной Δx . Например, такова сила тяжести, для нее $\Delta F = g\Delta m = g\rho\Delta x$; $g(x, t) \equiv g\rho$.

При сделанных предположениях можно пренебречь удлинением струны. Действительно, т.к. $\sqrt{1 + u_x^2} \approx 1 + \frac{1}{2}u_x^2$, величиной u_x^2

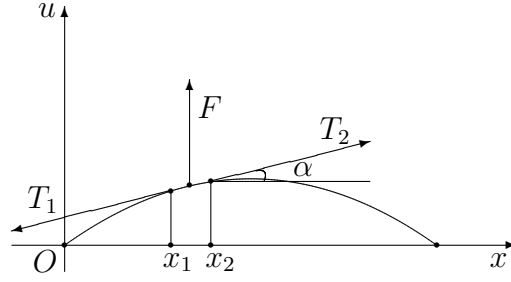


рис. 1

можно пренебречь, то для длины струны имеем

$$L(t) = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + u_x^2} dx \approx x_2 - x_1.$$

Отсюда (закон Гука) следует, что натяжение струны не зависит от времени. Покажем, что натяжение во всех точках струны можно считать постоянным. Выделим участок струны $[x_1, x_2]$. На него действуют силы натяжения, внешняя сила F и силы инерции. Сумма сил натяжения и внешней силы должна равняться силе инерции

$$T_1 + T_2 + F = ma. \quad (9.1)$$

Сумма проекций всех сил на ось Ox должна быть равна нулю, т.к. рассматриваются поперечные колебания,

$$(T_1)_x + (T_2)_x = 0.$$

Для проекций на ось Ox сил натяжения имеем

$$(T_1)_x = -T(x_1) \cos \alpha_1 = -\frac{T(x_1)}{\sqrt{1 + u_x^2}} \approx -T(x_1),$$

$$(T_2)_x = -T(x_2) \cos \alpha_2 = \frac{T(x_2)}{\sqrt{1 + u_x^2}} \approx T(x_2).$$

Следовательно, $T(x_1) = T(x_2) = T_0$ — одинакова для всех x .

Рассмотрим теперь проекцию равенства (9.1) на ось Ou

$$-T_0 \sin \alpha_1 + T_0 \sin \alpha_2 + F = ma. \quad (9.2)$$

Учтем, что из предположения 5 следует

$$\sin \alpha \approx \operatorname{tg} \alpha = u_x.$$

Кроме того, $F \approx g(x, t)(x_2 - x_1)$, $m = \rho(x_2 - x_1)$ и $a = u_{tt}$. Положим $x_1 = x$, а $x_2 = x + \Delta x$, тогда равенство (9.2) можно записать в виде

$$-T_0 u_x(x, t) + T_0 u_x(x + \Delta x, t) + g(x, t) \Delta x = \rho \Delta x u_{tt}. \quad (9.3)$$

По теореме Лагранжа

$$u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t) = u_{xx}(x + \theta \Delta x, t) \Delta x, \quad 0 < \theta < 1.$$

Учитывая последнее равенство и переходя к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$ в равенстве (9.3), будем иметь

$$T_0 u_{xx} + g(x, t) = \rho u_{tt}.$$

Введя обозначения $a = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}$, $f(x, t) = \frac{1}{\rho} g(x, t)$, получаем уравнение

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t). \quad (9.4)$$

При отсутствии внешней силы получим однородное уравнение

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}. \quad (9.5)$$

Если для плоской пленки (мембраны) считать выполненными условия, аналогичные условиям 1.–6., то уравнение поперечных колебаний мембраны запишется в виде

$$u_{tt} = a^2 (u_{xx} + u_{yy}) + f(x, y, t), \quad (9.6)$$

здесь $u(x, y, t)$ — отклонение точек мембраны.

Уравнения (9.4)–(9.6) называются волновыми уравнениями. В трехмерном случае однородное волновое уравнение имеет вид

$$u_{tt} = a^2 (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz})$$

или, используя трехмерный оператор Лапласа $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$,

$$u_{tt} = a^2 \Delta u.$$

Это уравнение описывает колебание газа, распространение звуковых волн (уравнение акустики).

§ 10. Начальные и граничные условия. Краевые задачи

Дифференциальные уравнения с частными производными имеют, вообще говоря, бесконечное множество решений. Поэтому для однозначной характеристики процесса, описываемого уравнением с частными производными, необходимо наложить еще некоторые дополнительные условия.

Рассмотрим задачу о поперечных колебаниях струны. Этот процесс, описываемый, как было показано, уравнением (9.4), зависит от начальной формы струны и распределения скоростей вдоль нее. Условия начальной формы и распределения скоростей носят название *начальных условий*:

$$\begin{cases} u(x, t_0) = \varphi(x), \\ u_t(x, t_0) = \psi(x). \end{cases}$$

Эти условия аналогичны условиям, задаваемым в задаче Коши (см. § 2).

Процесс колебания зависит также от поведения струны на ее концах. Поэтому, кроме начальных условий, задают еще *граничные*

условия. Типы граничных условий довольно разнообразны. Здесь будут рассмотрены три типа таких условий.

1. *Граничное условие 1-го рода.* Задан закон движения конца струны (например, левого):

$$u(0, t) = \mu(t).$$

В частности, при $\mu(t) \equiv 0$ конец закреплен.

2. *Граничное условие 2-го рода.* Предположим, что левый конец струны свободен. Тогда для участка струны от 0 до Δx (рис. 2) уравнение (9.1) запишется в виде

$$T_0 + F = ma.$$

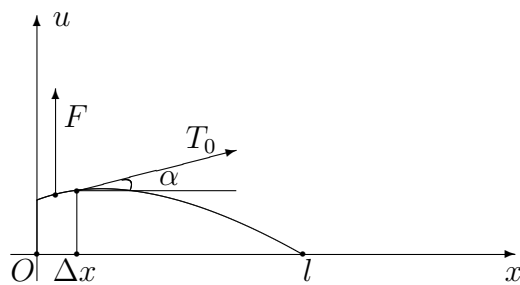


рис. 2

Рассмотрим проекцию этого равенства на ось Ou

$$T_0 \sin \alpha + F = ma.$$

В силу того, что $\sin \alpha \approx \operatorname{tg} \alpha = u_x$, $F \approx g(0, t)\Delta x$, $m = \rho\Delta x$ и $a = u_{tt}$, имеем

$$T_0 u_x + g(0, t)\Delta x = \rho\Delta x u_{tt}.$$

Отсюда при $\Delta x \rightarrow 0$ получаем

$$u_x(0, t) = 0.$$

В общем случае, когда на конец действует некоторая сила, граничное условие 2-го рода будет иметь вид

$$u_x(0, t) = \nu(t).$$

3. *Граничное условие 3-го рода.* Если на конец струны действует упругая сила, то она, согласно закону Гука, пропорциональна смещению $u(0, t)$. Граничное условие в этом случае имеет вид

$$u_x(0, t) = h_1 u(0, t), \quad h_1 > 0.$$

В случае правого конца

$$u_x(l, t) = -h_2 u(l, t), \quad h_2 > 0.$$

Если конец струны перемещаются и его отклонение от начального положения дается функцией $\theta(t)$, то граничные условия принимают вид

$$\begin{aligned}u_x(0, t) &= h_1(u(0, t) - \theta(t)), \\u_x(l, t) &= -h_2(u(l, t) - \theta(t)).\end{aligned}$$

Возможны различные комбинации перечисленных типов граничных условий.

Если функции $\mu(t)$, $\nu(t)$ или $\theta(t)$ равны нулю, то соответствующие граничные условия называются *однородными*.

Сформулируем теперь *первую краевую задачу*. Требуется найти функцию $u(x, t)$, удовлетворяющую для $0 \leq x \leq l$, $t \geq 0$, уравнению

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad (10.1)$$

начальным условиям

$$\begin{aligned}u(x, 0) &= \varphi(x), \\u_t(x, 0) &= \psi(x),\end{aligned} \quad (10.2)$$

и граничным условиям

$$\begin{aligned}u(0, t) &= \mu_1(t), \\u(l, t) &= \mu_2(t).\end{aligned}$$

Если вместо граничных значений 1-го рода рассматриваются граничные условия 2-го или 3-го рода, то соответствующие задачи называются *второй* или *третьей краевой задачами*. Краевая задача называется *смешанной*, если граничные условия при $x = 0$ и $x = l$ имеют различные типы.

Вопрос о существовании решений краевых задач решается, как правило, указанием метода нахождения решений, что и будет сделано ниже. Что касается единственности решения, то имеет место следующая теорема, которую приведем без доказательства.

ТЕОРЕМА 10.1. *Существует только одна функция, являющаяся решением первой, второй или третьей краевых задач, среди всех функций $u(x, t)$, непрерывных вместе с производными u_{xx} , u_{tt} , u_{xt} на отрезке $0 \leq x \leq l$ при $t \geq 0$.*

Если влияние границ несущественно, струну считают неограниченной, и можно рассмотреть *задачу с начальными условиями для неограниченной струны*, которая формулируется так: найти решение уравнения (10.1) для $-\infty < x < \infty$, $t \geq 0$, с начальными условиями (10.2).

Если же влияние лишь одного из концов несущественно, то мы приходим к *задаче для полугораниченной струны*: найти решение уравнения (10.1) для $0 \leq x < \infty$, $t \geq 0$, с начальными условиями (10.2) и граничным условием

$$u(0, t) = \mu(t).$$

§ 11. Метод распространяющихся волн. Формула Даламбера

Рассмотрим задачу с начальными условиями для неограниченной струны:

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad (11.1)$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = \varphi(x), \\ u_t(x, 0) = \psi(x). \end{cases} \quad (11.2)$$

Приведем уравнение (11.1) к каноническому виду (см. §§ 7,8). Характеристическое уравнение (8.2) имеет в этом случае вид

$$\lambda^2 - a^2 = 0.$$

Следовательно, прямые

$$x = at + C_1, \quad x = -at + C_2,$$

являются характеристиками. Вводя новые переменные

$$\xi = x - at, \quad \eta = x + at,$$

уравнение (11.1) преобразуется к виду

$$u_{\xi\eta} = 0.$$

Общее решение этого уравнения записывается в виде (см. пример 1.3)

$$u(\xi, \eta) = f_1(\xi) + f_2(\eta).$$

Таким образом, функция

$$u(x, t) = f_1(x - at) + f_2(x + at) \quad (11.3)$$

является общим решением уравнения (11.1).

Определим функции f_1 и f_2 так, чтобы удовлетворялись начальные условия (11.2)

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= -af_1'(x) + af_2'(x) = \psi(x). \end{aligned} \quad (11.4)$$

Интегрируя второе равенство, получим

$$f_1(x) - f_2(x) = -\frac{1}{a} \int_{x_0}^x \psi(y) dy + C, \quad (11.5)$$

где x_0 и C — некоторые постоянные. Из равенств (11.4) и (11.5) находим

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(y) dy + \frac{C}{2}, \\ f_2(x) &= \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(y) dy - \frac{C}{2}. \end{aligned}$$

Подставляя найденные функции в (11.3), имеем

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(y) dy. \quad (11.6)$$

Полученная формула носит название *формулы Даламбера*. Нетрудно проверить, что функция $u(x, t)$, определенная формулой Даламбера, удовлетворяет (если потребовать от функции φ двукратной, а от функции ψ однократной дифференцируемости) уравнению (11.1) и начальным условиям (11.2). Тем самым решен вопрос о существовании решения. Единственность решения следует в данном случае, например, из того, что, как было доказано, всякое решение задачи должно удовлетворять равенству (11.6).

Рассмотрим физическую (волновую) интерпретацию общего решения (11.3). Функцию $f(x - at)$ можно интерпретировать как волну, распространяющуюся вправо со скоростью a . Действительно, при $t = 1$ график функции $f(x - a)$ получается из графика функции $f(x)$, соответствующего $t = 0$, сдвигом на a единиц вправо (рис. 3).

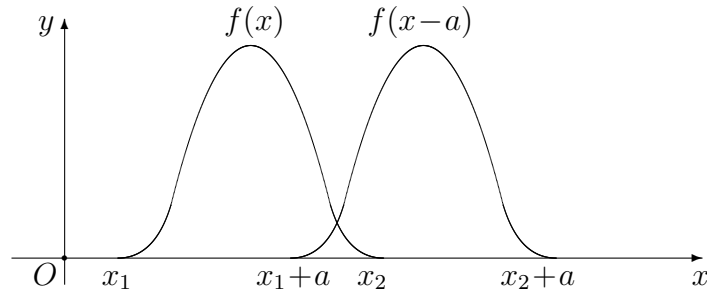


рис. 3

Аналогично, функция $f(x+at)$ представляет волну, распространяющуюся влево со скоростью a . Таким образом, общее решение (11.3) есть суперпозиция (наложение) двух волн, одна из которых распространяется направо со скоростью a , а другая — налево с той же скоростью.

Рассмотрим фазовую плоскость — плоскость переменных (x, t) и некоторую точку $M(x_0, t_0)$ на ней. Проведем из этой точки характеристики $x - at = x_0 - at_0$, $x + at = x_0 + at_0$, которые пересекут ось Ox в точках $P(x_0 - at_0, 0)$ и $Q(x_0 + at_0, 0)$ (рис. 4).

Запишем теперь формулу Даламбера (11.6) в виде

$$u(M) = \frac{\varphi(P) + \varphi(Q)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{PQ} \psi(y) dy.$$

Отсюда видно, что начальные данные, заданные вне отрезка PQ не оказывают влияния на значения функции u в точке M . Это

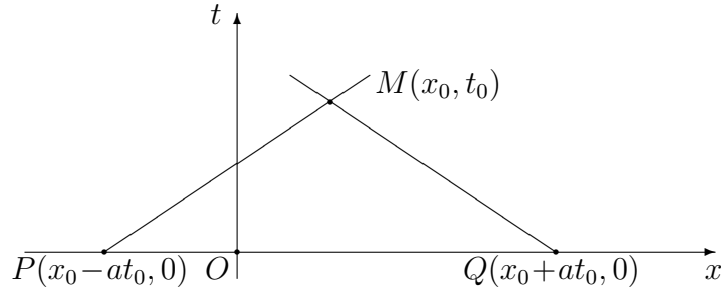


рис. 4

значение зависит лишь от значений функции φ в точках P и Q и значений функции ψ на отрезке PQ .

Решение (11.6) можно представить в виде $u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t)$, где

$$u_1(x, t) = \frac{1}{2} [\varphi(x - at) + \varphi(x + at)],$$

$$u_2(x, t) = \Phi(x + at) - \Phi(x - at),$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(y) dy.$$

Функция $u_1(x, t)$ представляет возмущение струны, создаваемое начальным отклонением, а $u_2(x, t)$ — начальной скоростью точек струны.

Пример 11.1. Пусть начальная скорость равна нулю ($\psi(x) \equiv 0$), а график начального отклонения $\varphi(x)$ задается в виде равнобедренного треугольника на отрезке $[x_1, x_2]$. Тогда

$$u(x, t) = u_1(x, t) = \frac{1}{2} [\varphi(x - at) + \varphi(x + at)],$$

т.е. отклонение $u(x, t)$ есть сумма “левой” и “правой” бегущих волн, начальная форма каждой из которых определяется функцией $\frac{1}{2}\varphi(x)$. На рис. 5 даны последовательные положения струны через промежутки времени $\Delta t = \frac{x_2 - x_1}{8a}$.

Пример 11.2. Пусть начальное отклонение $\varphi(x) = 0$, а начальная скорость отлична от нуля только на отрезке $[x_1, x_2]$, где равна постоянному значению ψ_0 (т.е. к участку $[x_1, x_2]$ прикладывается импульс, например, с помощью быстрого удара по струне молоточком). В этом случае

$$u(x, t) = u_2(x, t) = \Phi(x + at) - \Phi(x - at).$$

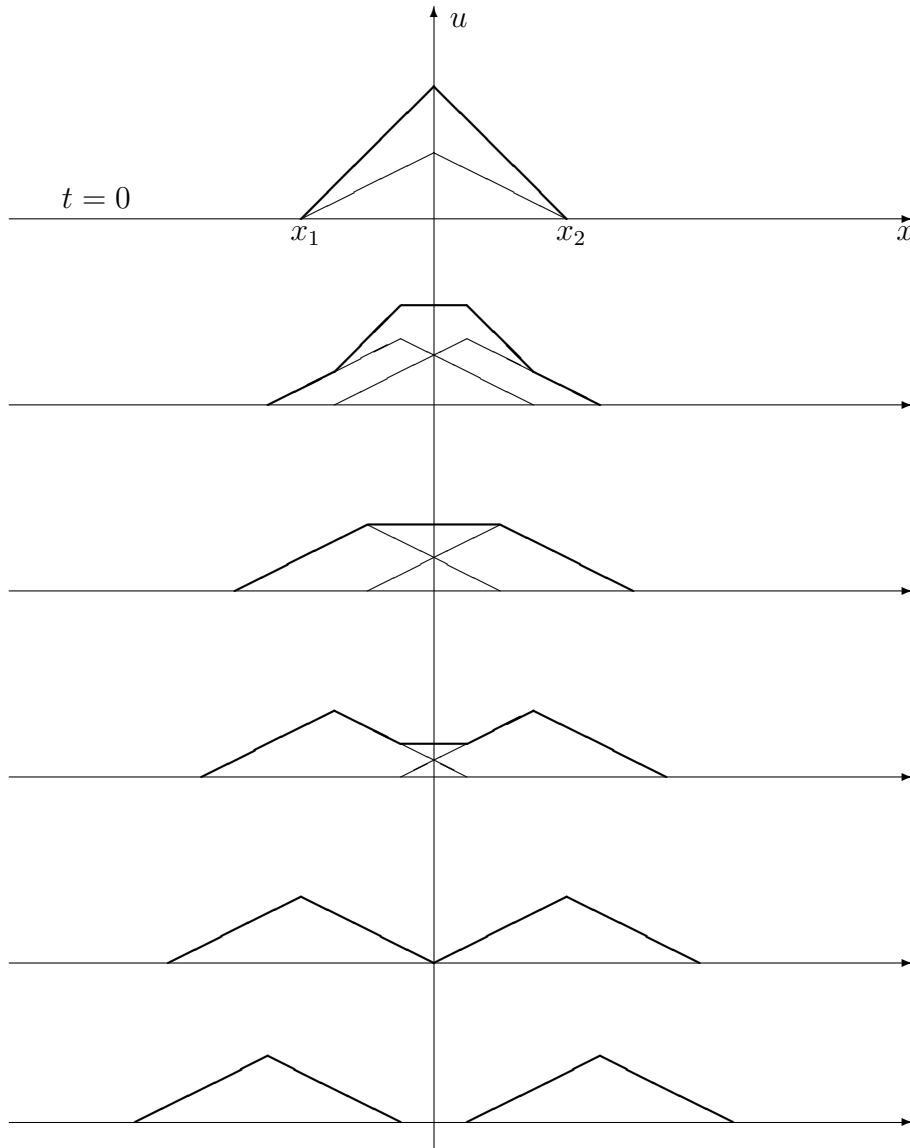


рис. 5

Положим $x_0 = 0$, тогда

$$\Phi(x) = \frac{1}{2a} \int_0^x \psi(y) dy = \begin{cases} 0, & x < x_1, \\ \frac{x - x_1}{2a} \psi_0, & x_1 \leq x \leq x_2, \\ \frac{x_2 - x_1}{2a} \psi_0, & x > x_2. \end{cases}$$

Уклонение точек струны $u(x, t)$ есть разность “левой” и “правой” волн с профилем $\Phi(x)$ в начальный момент. Последовательные положения струны через промежутки времени $\Delta t = \frac{x_2 - x_1}{8a}$ даны на рис. 6

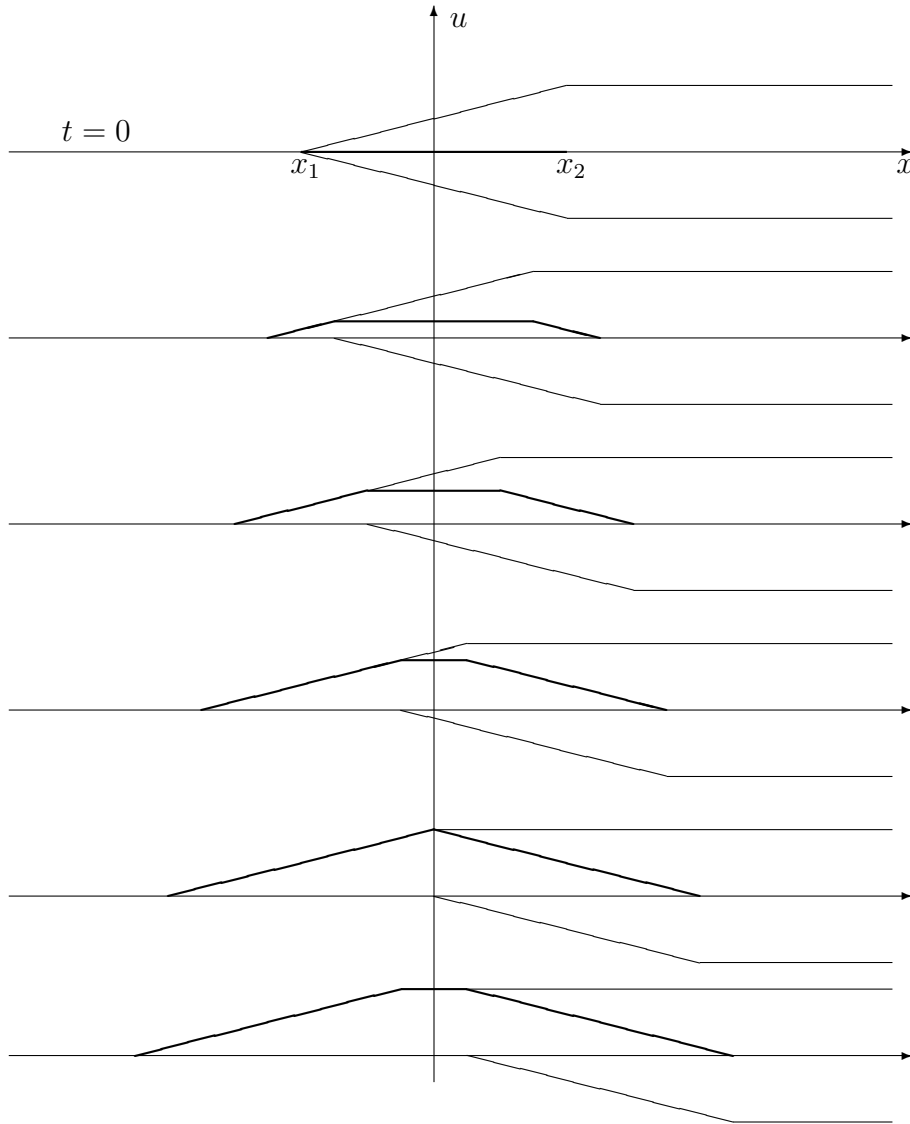


рис. 6

Профиль струны при $t > 4\Delta t$ имеет форму трапеции, расширяющейся равномерно с течением времени.

Заметим, что функции $u(x, t)$, изображенные на рис. 5, 6 не могут являться решением в обычном смысле уравнения (11.1), т.к.

они не везде являются дважды дифференцируемыми. Строго говоря, надо было рассматривать функции, у которых “сглажены углы”. Однако мы пренебрегли этим обстоятельством для упрощения рисунков.

§ 12. Полуограниченная струна. Метод продолжений

Рассмотрим следующую задачу для полуограниченной струны: найти решение уравнения (11.1) при $x \geq 0, t \geq 0$, удовлетворяющее начальным условиям (11.2) и граничному условию

$$u(0, t) = 0. \quad (12.1)$$

Функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ в начальных условиях (11.2) заданы теперь лишь при $x \geq 0$. Продолжим их нечетным образом, положим

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \geq 0, \\ -\varphi(-x), & x < 0, \end{cases}$$

$$\Psi(x) = \begin{cases} \psi(x), & x \geq 0, \\ -\psi(-x), & x < 0. \end{cases}$$

Будем считать, что полученная после этого продолжения функция $\Phi(x)$ является двукратно дифференцируемой, а функция $\Psi(x)$ — однократно дифференцируемой на всей числовой оси. Для этого, кроме соответствующих свойств функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, достаточно потребовать выполнения равенств $\varphi(0) = \psi(0) = 0, \varphi''(0) = 0$ (заметим, что условие $\varphi(0) = \psi(0) = 0$ вытекает из (12.1)).

Рассмотрим функцию

$$u(x, t) = \frac{\Phi(x - at) + \Phi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \Psi(y) dy. \quad (12.2)$$

В силу того, что функция $u(x, t)$ представлена формулой Даламбера, она удовлетворяет уравнению (11.1) при $-\infty < x < \infty, t \geq 0$, а потому, в частности, и при $x \geq 0, t \geq 0$. Нетрудно убедиться, что при $x = 0$ выполнены начальные условия (12.2).

При $x = 0$ имеем

$$u(0, t) = \frac{\Phi(-at) + \Phi(at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{-at}^{at} \Psi(y) dy.$$

Из того, что $\Phi(x)$ — нечетная функция, следует равенство $\Phi(-at) = -\Phi(at)$. Поскольку интеграл от нечетной функции в пределах, симметричных относительно начала координат, равен нулю, имеем

$$\int_{-at}^{at} \Psi(y) dy = 0.$$

Отсюда следует, что для функции $u(x, t)$, определенной равенством (12.2), выполняется граничное условие (12.1). Тем самым доказано, что функция $u(x, t)$ является решением поставленной задачи.

Рассмотрим аналогичную задачу для свободного конца струны, расположенного в точке $x = 0$, т.е. граничное условие (12.1) заменим на условие

$$u_x(0, t) = 0. \quad (12.3)$$

В этом случае продолжим на всю прямую функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ четным образом

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \geq 0, \\ \varphi(-x), & x < 0, \end{cases}$$

$$\Psi(x) = \begin{cases} \psi(x), & x \geq 0, \\ \psi(-x), & x < 0. \end{cases}$$

Функция $u(x, t)$, определенная формулой Даламбера (12.2), будет решением поставленной задачи, если доказать выполнение граничного условия (12.3).

Действительно,

$$u_x(0, t) = \frac{\Phi'(-at) + \Phi'(at)}{2} + \frac{1}{2a}(\Psi(at) - \Psi(-at)).$$

Из четности $\Psi(x)$ следует, что $\Psi(at) = \Psi(-at)$. Кроме того, геометрически очевидно, что производная четной функции является нечетной функцией (это также видно из равенств $\Phi'(x) = [\Phi(-x)]' = -\Phi'(-x)$), и следовательно, $\Phi'(at) = -\Phi'(-at)$. Тем самым функция $u(x, t)$ удовлетворяет граничному условию (12.3).

Итак, для решения задачи о колебании полуограниченной струны с граничными условиями (12.2) или (12.3) надо продолжить начальные данные на всю прямую нечетным или четным образом, соответственно, и воспользоваться формулой Даламбера.

Пример 12.1. Рассмотрим задачу о колебании полуограниченной струны с граничным условием $u(0, t) = 0$ (т.е. закрепленной в точке $x = 0$) и начальными условиями: $\psi(x) = 0$, а $\varphi(x)$ отлична от нуля в промежутке $[x_1, x_2]$, $x_2 > x_1 > 0$, и ее график имеет там вид равнобедренного треугольника (см. замечание в конце § 11). Для решения этой задачи надо начальные данные продолжить нечетно на всю прямую. Процесс распространения волн вначале происходит так же, как и на неограниченной прямой. Заданное отклонение разбивается на две волны, движущиеся в противоположные стороны с постоянной скоростью (см. пример 11.1). Но это происходит лишь до тех пор, пока полуволна, идущая налево, не дойдет до точки $x = 0$. В этот момент с левой стороны, на которой происходили аналогичные процессы, к точке $x = 0$ подходит полуволна с “обратной фазой”. Дальнейший процесс изображен на рис. 7 с $\Delta t = \frac{x_2 - x_1}{8a}$.

Пример 12.2. Пусть в примере 12.1 в точке $x = 0$ имеем свободный конец, т.е. зададим другое граничное условие: $u_x(0, t) = 0$.

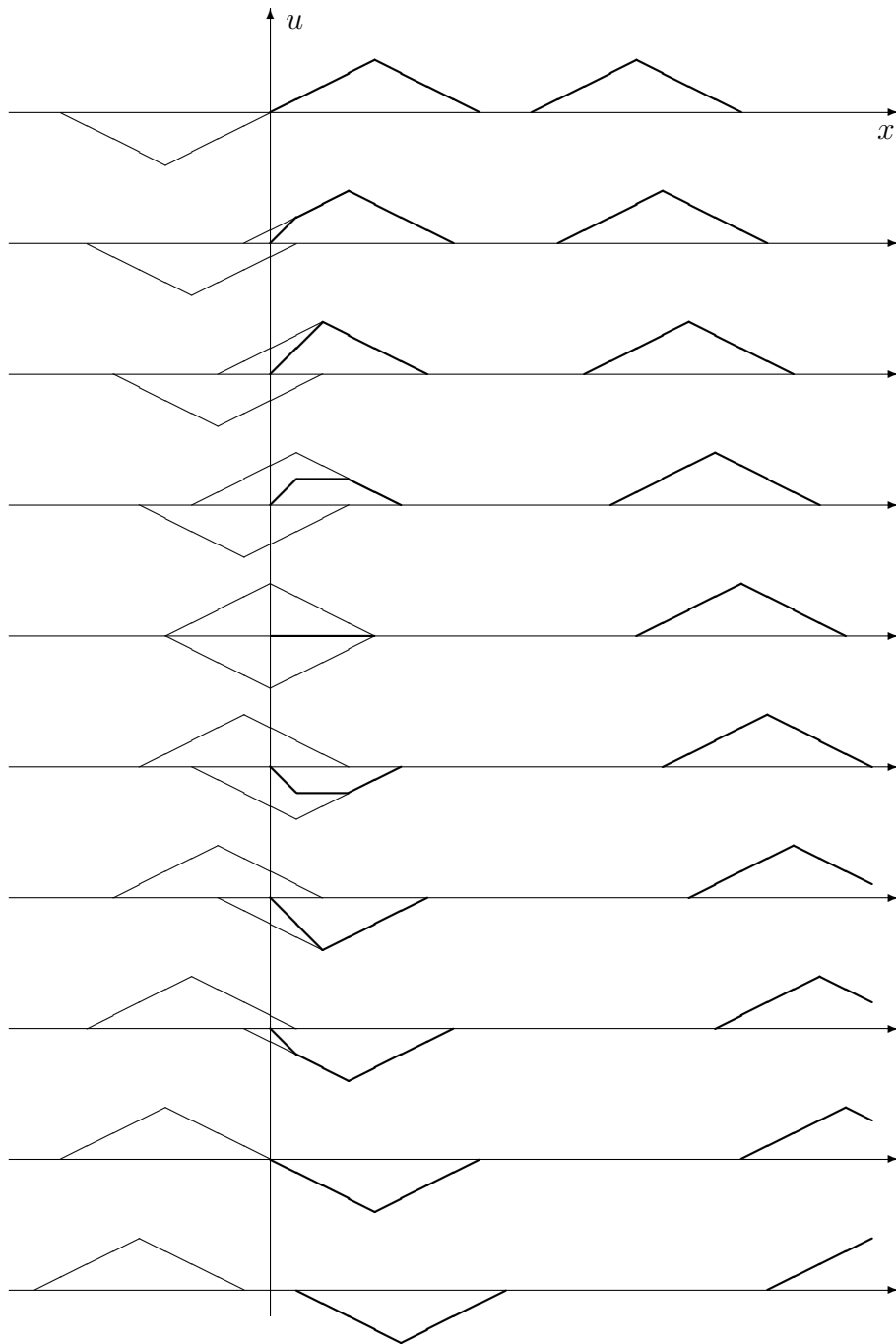


рис. 7

Тогда начальные данные надо продолжить четным образом на всю прямую. До момента времени, начиная с которого даны изображения на рис. 7, процессы в рассматриваемых примерах будут проходить одинаково. Затем картина для случая свободного конца будет

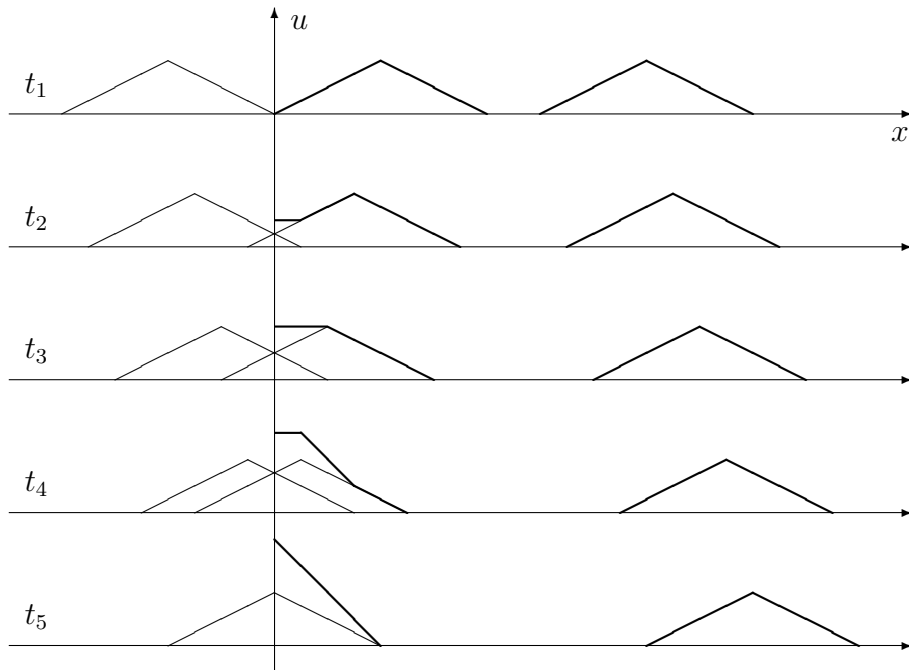


рис. 8

отличаться от поведения струны с закрепленным концом. Эти отличия можно проследить на рис. 8, где по-прежнему $\Delta t = \frac{x_2 - x_1}{8a}$.

После момента времени t_5 правая полуволна продолжает движение вправо, а левая полуволна принимает те же последовательные положения, что и в моменты t_4, t_3, t_2, t_1 , а затем начинает движение вправо.

Задача 12.1. (для самостоятельного решения). Нарисовать рисунки, аналогичные рисункам 7, 8, для полуограниченной струны с начальными условиями: $\varphi(x) = 0$,

$$\psi(x) = \begin{cases} \psi_0, & x \in [x_1, x_2], \\ 0, & x \notin [x_1, x_2], \end{cases} \quad 0 < x_1 < x_2.$$

Рассмотреть случаи закрепленного и свободного конца.

§ 13. Ограниченная струна. Метод Фурье

Одним из наиболее распространенных точных методов решения уравнений с частными производными является *метод разделения переменных* или *метод Фурье*. Мы рассмотрим этот метод на примере решения задачи о колебании струны, закрепленной на обоих концах.

Будем искать решение уравнения

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad (13.1)$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$\begin{cases} u(x, 0) = \varphi(x), \\ u_t(x, 0) = \psi(x), \end{cases} \quad (13.2)$$

и однородным граничным условиям

$$\begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u(l, t) = 0. \end{cases} \quad (13.3)$$

Попробуем сначала найти решение уравнения (13.1), не равное тождественно нулю, удовлетворяющее граничным условиям (13.3) и представимое в виде

$$u(x, t) = X(x)T(t). \quad (13.4)$$

Подставляя функцию $u(x, t)$, представимую в виде (13.4), в уравнение (13.1), имеем для функций $X(x)$ и $T(t)$ уравнение

$$X(x)T''(t) = a^2 X''(x)T(t).$$

Разделив на $a^2 X(x)T(t)$, получаем

$$\frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}. \quad (13.5)$$

Фиксируя некоторое значение x и меняя t (или наоборот), получим, что правые и левые части равенства (13.5) сохраняют постоянное значение, которое обозначим для удобства через $-\lambda$ (относительно знака λ пока ничего не предполагается)

$$\frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda.$$

Таким образом, для $X(x)$ и $T(t)$ получаем обыкновенные дифференциальные уравнения

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad (13.6)$$

$$T''(t) + a^2 \lambda T(t) = 0. \quad (13.7)$$

Граничные условия (13.3) дают

$$u(0, t) = X(0)T(t) = 0,$$

$$u(l, t) = X(l)T(t) = 0.$$

Отсюда следует, что функция $X(x)$ должна удовлетворять условиям

$$X(0) = X(l) = 0, \quad (13.8)$$

т.к. иначе $T(t) \equiv 0$, и, значит, $u(x, t) \equiv 0$, а мы ищем решение, отличное от тождественного нуля.

Тем самым мы приходим к следующей задаче (краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения):

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \\ X(0) = X(l) = 0. \end{cases} \quad (13.9)$$

Значения параметра λ , при которых задача имеет нетривиальное решение, называются *собственными значениями*, а сами решения — *собственными функциями*. Задача (13.9) носит название *задачи Штурма–Лиувилля*.

Рассмотрим теперь следующие три случая:

1. Пусть $\lambda < 0$. Тогда общее решение уравнения (13.6) имеет вид

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}.$$

Условие (13.8) дает

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 &= 0, \\ C_1 e^{\sqrt{-\lambda}l} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}l} &= 0, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} C_1 &= -C_2, \\ C_1 (e^{\sqrt{-\lambda}l} - e^{-\sqrt{-\lambda}l}) &= 0. \end{aligned}$$

Поскольку $e^{\sqrt{-\lambda}l} \neq e^{-\sqrt{-\lambda}l}$, то $C_1 = C_2 = 0$ и $X(x) \equiv 0$. Тем самым в этом случае не существует нетривиальных решений задачи (13.9).

2. Пусть $\lambda = 0$. Тогда общее решение уравнения (13.6) имеет вид

$$X(x) = C_1 x + C_2.$$

Граничные условия дают

$$\begin{aligned} X(0) &= C_2 = 0, \\ X(l) &= C_1 l = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, и в этом случае решения лишь тривиальные.

3. Пусть теперь $\lambda > 0$. Общее решение уравнения (13.6) тогда имеет вид

$$X(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda}x + C_2 \sin \sqrt{\lambda}x.$$

Граничные условия дают

$$\begin{aligned} X(0) &= C_1 = 0, \\ X(l) &= C_2 \sin \sqrt{\lambda}l = 0. \end{aligned}$$

Если функция $X(x)$ не равна тождественно нулю, то $C_2 \neq 0$, поэтому $\sin \sqrt{\lambda}l = 0$, откуда $\sqrt{\lambda}l = \pi n$, где $n = 1, 2, \dots$. Итак, нетривиальные решения задачи (13.9) возможны лишь при

$$\lambda = \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2.$$

Причем соответствующие решения имеют вид

$$X_n(x) = \sin \frac{\pi n}{l} x$$

и определяются с точностью до постоянного множителя, который возьмем равным единице. Решая для этих же значений λ_n уравнение (13.7), получим

$$T_n(t) = A_n \cos \frac{\pi n}{l} at + B_n \sin \frac{\pi n}{l} at,$$

где A_n и B_n — произвольные постоянные.

Таким образом, мы получили, что функции

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = \left(A_n \cos \frac{\pi n}{l} at + B_n \sin \frac{\pi n}{l} at \right) \sin \frac{\pi n}{l} x$$

удовлетворяют уравнению (13.1) и граничным условиям (13.3). В силу линейности и однородности уравнения (13.1) ряд

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{\pi n}{l} at + B_n \sin \frac{\pi n}{l} at \right) \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad (13.10)$$

если он допускает двукратное почленное дифференцирование, также удовлетворяют уравнению (13.1) (условиям (13.3) он удовлетворяет всегда). Для двукратной дифференцируемости ряда (13.10) достаточно потребовать равномерную сходимость продифференцированных рядов, а для этого по признаку Вейерштрасса достаточно потребовать сходимость мажорантного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2(|A_n| + |B_n|). \quad (13.11)$$

В выражении для функции $u(x, t)$, определенной равенством (13.10), мы еще не определили величины A_n и B_n . Подберем эти значения так, чтобы удовлетворялись начальные условия (13.2)

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{\pi n}{l} x = \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n}{l} a B_n \sin \frac{\pi n}{l} x = \psi(x). \end{aligned} \quad (13.12)$$

Пусть функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ могут быть разложены в ряды Фурье на отрезке $[0, l]$

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin \frac{\pi n}{l} x, & \varphi_n &= \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{\pi n}{l} x dx, \\ \psi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin \frac{\pi n}{l} x, & \psi_n &= \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{\pi n}{l} x dx. \end{aligned} \quad (13.13)$$

Из равенств (13.13) следует, что если положить $A_n = \varphi_n$, а $B_n = \frac{l}{\pi na} \psi_n$, то будут выполнены равенства (13.12).

Условие (13.11), гарантирующее возможность почленного дифференцирования ряда (13.10), переходит при таком выборе A_n и B_n в условие сходимости рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 |\varphi_n|, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n |\psi_n|.$$

Для сходимости этих рядов, как можно показать, достаточно потребовать от функции $\varphi(x)$ непрерывности второй производной, кусочной непрерывности третьей производной и выполнения равенств

$$\varphi(0) = \varphi(l) = \varphi''(0) = \varphi''(l) = 0,$$

а от функции $\psi(x)$ непрерывности первой производной, кусочной непрерывности второй производной и выполнения равенства

$$\psi(0) = \psi(l) = 0.$$

Итак, решением задачи (13.1–13.3) является функция

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\varphi_n \cos \frac{\pi n}{l} at + \frac{l}{\pi na} \sin \frac{\pi n}{l} at \right) \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad (13.14)$$

где φ_n и ψ_n определены равенствами (13.13).

Используя другой метод построения решения, можно показать, что функция $u(x, t)$, определенная равенством (13.14), будет решением рассматриваемой задачи и в случае, если отбросить условия кусочной непрерывности соответствующих производных функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$.

Более того, мы можем построить функцию $u(x, t)$, определенную равенством (13.14), по функциям $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, не обладающим требуемой гладкостью. В этом случае функция $u(x, t)$, не являясь обычным решением уравнения (13.1), является предельной для решений этого уравнения с немного сглаженными начальными условиями. Полученные таким предельным переходом функции называются *обобщенными решениями*. В дальнейшем мы не будем принимать во внимание разницу между этими решениями и решениями в обычном смысле.

Пример 13.1. Определить отклонение $u(x, t)$ струны, закрепленной на концах $x = 0$ и $x = l$, имеющей в начальный момент времени форму параболы $\varphi(x) = \alpha x(l - x)$ и нулевую начальную скорость $\psi(x) = 0$.

Отклонение $u(x, t)$ является решением задачи (13.1–13.3) и дается, как было показано, формулой (13.14). Остается найти коэффициенты Фурье φ_n и ψ_n . Поскольку $\psi(x) \equiv 0$, то $\psi_n = 0$. Для φ_n

имеем

$$\begin{aligned}
\varphi_n &= \frac{2}{l} \int_0^l \alpha x(l-x) \sin \frac{\pi n}{l} x dx = -\frac{2\alpha}{\pi n} \int_0^l x(l-x) d \cos \frac{\pi n}{l} x \\
&= -\frac{2\alpha}{\pi n} \left(x(l-x) \cos \frac{\pi n}{l} x \Big|_0^l - \int_0^l (l-2x) \cos \frac{\pi n}{l} x dx \right) \\
&= \frac{2\alpha l}{(\pi n)^2} \int_0^l (l-2x) d \sin \frac{\pi n}{l} x = \frac{2\alpha l}{(\pi n)^2} \left((l-2x) \sin \frac{\pi n}{l} x \Big|_0^l \right. \\
&\quad \left. + 2 \int_0^l \sin \frac{\pi n}{l} x dx \right) = -\frac{4\alpha l^2}{(\pi n)^3} \cos \frac{\pi n}{l} x \Big|_0^l = \frac{4\alpha l^2}{(\pi n)^3} (1 - (-1)^n) \\
&= \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ \frac{8\alpha l^2}{(\pi n)^3}, & n = 2k + 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

Подставляя это выражение для φ_n в формулу (13.14), получаем

$$u(x, t) = \frac{8\alpha l^2}{\pi^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^3} \cos \frac{\pi(2k+1)}{l} at \sin \frac{\pi(2k+1)}{l} x.$$

Пример 13.2. Струна, закрепленная на концах $x = 0$ и $x = l$, находится в начальный момент времени в положении равновесия и приводится в движение воздействием, дающим ей начальную скорость

$$\psi(x) = \begin{cases} \psi_0, & 0 \leq x \leq h, \\ 0, & h < x \leq l. \end{cases}$$

Определить отклонение $u(x, t)$.

Из условия задачи и формулы (13.14) следует, что необходимо найти лишь коэффициенты Фурье ψ_n для функции $\psi(x)$. Имеем

$$\begin{aligned}
\psi_n &= \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{\pi n}{l} x dx = \frac{2}{l} \int_0^h \psi_0 \sin \frac{\pi n}{l} x dx = -\frac{2\psi_0}{\pi n} \cos \frac{\pi n}{l} x \Big|_0^h \\
&= \frac{2\psi_0}{\pi n} \left(1 - \cos \frac{\pi n}{l} h \right) = \frac{4\psi_0}{\pi n} \sin^2 \frac{2\pi n h}{2l}.
\end{aligned}$$

Тем самым

$$u(x, t) = \frac{4\psi_0 l}{\pi^2 a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{2\pi n h}{2l}}{n^2} \sin \frac{\pi n}{l} at \sin \frac{\pi n}{l} x.$$

Задача 13.1. (для самостоятельного решения). Применить метод Фурье к задаче о колебании струны со свободными концами.

§ 14. Стоячие волны

Функции $u_n(x, t)$, из которых состоит решение $u(x, t)$ (13.10), можно представить в виде

$$\begin{aligned} u_n(x, t) &= \left(A_n \cos \frac{\pi n}{l} at + B_n \sin \frac{\pi n}{l} at \right) \sin \frac{\pi n}{l} x \\ &= \alpha_n \sin \left(\frac{\pi n}{l} at + \varphi_n \right) \sin \frac{\pi n}{l} x, \end{aligned}$$

где

$$\alpha_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}, \quad \varphi_n = \operatorname{arctg} \frac{A_n}{B_n}.$$

Решение $u_n(x, t)$ описывает движение струны, при котором каждая точка струны x_0 совершает гармонические колебания с частотой $\omega_n = \frac{\pi n}{l} a$ и амплитудой

$$\alpha_n \sin \frac{\pi n}{l} x_0.$$

Движение струны такого типа называется *стоячей волной*. При таком колебании струна издает звук, высота которого зависит от частоты колебания ω_n , а сила от наибольшей амплитуды α_n .

Точки $x = \frac{l}{n} m$, $m = 1, 2, \dots, n - 1$, в которых $\sin \frac{\pi n}{l} x = 0$, называются *узлами* стоячей волны $u_n(x, t)$, а точки $x = \frac{l}{2n} (2m + 1)$, $m = 0, 1, \dots, n - 1$, в которых $\sin \frac{\pi n}{l} x = \pm 1$, совершают колебания с максимальной амплитудой α_n и называются *пучностями* стоячей волны.

Из формулы для решения $u(x, t)$ (13.10) следует, что звук, издаваемый струной, является наложением простых тонов, соответствующих стоячим волнам. Самый низкий тон, задаваемый струной, определяется самой низкой частотой $\omega_1 = \frac{\pi}{l} a$ (при условии $\alpha_1 \neq 0$) и называется *основным тоном* струны. Остальные тона соответствуют частотам, кратным ω_1 , и называются *обертонами*. Они влияют на тембр звука.

Основной тон струны и ее тембр зависит от способа возбуждения колебаний. Если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ в начальных условиях таковы, что $A_1 = B_1 = 0$, а $A_2^2 + B_2^2 \neq 0$, то основной тон будет соответствовать частоте ω_2 .

Содержание

ГЛАВА 3. Уравнения гиперболического типа	1
§ 9. Уравнения малых поперечных колебаний струны	1
§ 10. Начальные и граничные условия. Краевые задачи	3
§ 11. Метод распространяющихся волн. Формула Даламбера	6
§ 12. Полуограниченная струна. Метод продолжений	11
§ 13. Ограниченная струна. Метод Фурье	14
§ 14. Стоячие волны	20