Министерство высшего и среднего специального образования
РСФСР

Московский авиационный технологический институт
им. К.Э. Циолковского

Кафедра “Высшая математика”

В.М. Асеев, В.В. Горбацевич, К.Ю. Осипенко

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ ПО КУРСУ “УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ”

Часть 3

УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

Москва – 1983

ГЛАВА 3

Уравнения гиперболического типа (продолжение)

§ 15. Неоднородные уравнения

Процесс колебания струны, на которую действует внешняя сила, описывается неоднородным уравнением

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t). \tag{15.1}$$

Рассмотрим решение этого уравнения, удовлетворяющее начальным условиям

$$\begin{cases} u(x,0) = \varphi(x), \\ u_t(x,0) = \psi(x), \end{cases} \tag{15.2}$$

и однородным граничным условиям (случай закрепленных концов)

$$\begin{cases} u(0,t) = 0, \\ u(l,t) = 0. \end{cases} \tag{15.3}$$

Пусть функция $w(x,t)$ является решением однородного уравнения

$$w_{tt} = a^2 w_{xx}$$

с начальными условиями

$$\begin{cases} w(x,0) = \varphi(x), \\ w_t(x,0) = \psi(x), \end{cases}$$

и однородными граничными значениями

$$\begin{cases} w(0,t) = 0, \\ w(l,t) = 0. \end{cases}$$

Решение такой задачи было получено в § 13.

Если найти функцию $v(x,t)$, удовлетворяющую неоднородному уравнению

$$v_{tt} = a^2 v_{xx} + f(x,t) \tag{15.4}$$

с начальными условиями

$$\begin{cases} v(x,0) = 0, \\ v_t(x,0) = 0, \end{cases} \tag{15.5}$$

и граничными значениям

$$\begin{cases} v(0,t) = 0, \\ v(l,t) = 0, \end{cases} \tag{15.6}$$

то функция $u(x,t) = w(x,t) + v(x,t)$ будет являться ременном задачи (15.1–15.3). Таким образом, задача свелась к нахождению функции $v(x,t)$.

Будем искать функцию $v(x,t)$ в виде ряда Фурье по x

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x, \tag{15.7}$$

рассматривая t как параметр. Представим функцию $f(x,t)$ также в виде ряда Фурье

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad f_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x,t) \sin \frac{\pi n}{l} x \, dx.$$

Подставив функцию $v(x,t)$ в виде (15.7) в уравнение (15.4), будем иметь

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ v_n''(t) + a^2 \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 v_n(t) - f_n(t) \right\} \sin \frac{\pi n}{l} x = 0$$

(мы здесь не останавливаемся на условиях, при которых законно почленное дифференцирование).

Все коэффициенты полученного ряда Фурье должны равняться нулю. Тем самым для определения $v_n(t)$ получены обыкновенные дифференциальные уравнения

$$v_n''(t) + a^2 \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 v_n(t) = f_n(t). \tag{15.8}$$

Начальные условия (15.5) дают

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n(0) \sin \frac{\pi n}{l} x = 0; \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n'(0) \sin \frac{\pi n}{l} x = 0.$$

Отсюда получаем начальные условия для решения (15.8)

$$v_n(0) = v_n'(0) = 0, \tag{15.9}$$

которые однозначно определяют решение этого уравнения.

Уравнение (15.8) с начальными условиями (15.9) может быть решено, например, операционным методом. Переходя при преобразовании Лапласа к изображениям, имеем

$$\begin{gathered} v_n(t) \risingdotseq V_n(p), \quad f_n(t) \risingdotseq F_n(p), \\ v_n'(t) \risingdotseq pV_n(p), \quad v_n''(t) \risingdotseq p^2 V_n(p). \end{gathered}$$

Уравнение (15.8) после преобразования Лапласа запишется в виде

$$p^2 V_n(p) + a^2 \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 V_n(p) = F_n(p).$$

Отсюда

$$V_n(p) = \frac{F_n(p)}{p^2 + a^2 \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2} = \frac{l}{\pi a n} F_n(p) \frac{\frac{\pi a n}{l}}{p^2 + a^2 \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2}.$$

Применяя теорему о свертке, получаем

$$v_n(t) = \frac{l}{\pi a n} f_n(t) * \sin\frac{\pi n}{l} a t = \frac{l}{\pi a n} \int_0^t f_n(\tau) \sin\frac{\pi n}{l} a (t-\tau)\, d\tau.$$

Таким образом, учитывая вид решения $w(x,t)$, окончательно будем иметь

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\varphi_n \cos\frac{\pi n}{l} a t + \frac{l}{\pi a n} \psi_n \sin\frac{\pi n}{l} a t\right) \sin\frac{\pi n}{l} x$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l}{\pi a n} \int_0^t f_n(\tau) \sin\frac{\pi n}{l} a (t-\tau)\, d\tau \sin\frac{\pi n}{l} x; \quad (15.10)$$

здесь φ_n и ψ_n — коэффициенты Фурье для функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$.

Пример 15.1. Найти решение уравнения

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + t \sin\frac{2\pi}{l} x, \quad (15.11)$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$\begin{cases} u(x,0) = \alpha x (l - x), \\ u_t(x,0) = 0, \end{cases} \quad (15.12)$$

и граничным условиям

$$\begin{cases} u(0,t) = 0, \\ u(l,t) = 0. \end{cases} \quad (15.13)$$

Решение этой задачи, как было показано выше, представляется в виде

$$u(x,t) = w(x,t) + v(x,t),$$

где $w(x,t)$ — решение однородного уравнения

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

с теми же начальными и граничными условиями (15.12), (15.13), а $v(x,t)$ — решение уравнения (15.11) с нулевыми начальными и граничными условиями. Решение $w(x,t)$ было получено в примере 13.1 Для нахождения решения $v(x,t)$ надо функцию $t\sin\dfrac{2\pi}{l}x$ разложить в ряд Фурье по x на отрезке $[0,l]$ по синусам

$$t\sin\frac{2\pi}{l}x = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\sin\frac{\pi n}{l}x.$$

Очевидно, что

$$f_n(t) = \begin{cases} 0, & n \neq 2, \\ t, & n = 2. \end{cases}$$

Таким образом, уравнения (15.8) с начальными условиями (15.9) при $n \neq 2$ дают $v_n(t) \equiv 0$. При $n = 2$ имеем уравнение

$$v_2''(t) + a^2\left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 v_2(t) = t \tag{15.14}$$

с начальными условиями $v_2(0) = v_2'(0) = 0$.

Общее решение однородного уравнения

$$v_2''(t) + a^2\left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 v_2(t) = 0$$

имеет вид

$$v_2(t) = C_1\cos\frac{2\pi}{l}at + C_2\sin\frac{2\pi}{l}at.$$

Частное решение уравнения (15.14) будем искать в виде

$$v_2^*(t) = At + B.$$

После подстановки $v_2^*(t)$ в уравнение (15.14) получим

$$a^2\left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 (At+B) = t.$$

Отсюда $A = \dfrac{l^2}{a^2(2\pi)^2}$, $B = 0$, а общее решение уравнения (15.14) имеет вид

$$v_2(t) = C_1\cos\frac{2\pi}{l}at + C_2\sin\frac{2\pi}{l}at + \frac{l^2}{a^2(2\pi)^2}t.$$

Из условий $v_2(0) = v_2'(0) = 0$ получаем $C_1 = 0$,

$$C_2\frac{2\pi}{l}a + \frac{l^2}{a^2(2\pi)^2} = 0.$$

Итак,

$$v_2(t) = -\left(\frac{l}{2\pi a}\right)^3 \sin\frac{2\pi}{l}at + \left(\frac{l}{2\pi a}\right)^2 t.$$

Тем самым из (15.7) будем иметь

$$v(x,t) = v_2(t)\sin\frac{2\pi}{l}x.$$

Окончательно получаем

$$u(x,t) = w(x,t) + v(x,t) = \frac{8\alpha l^2}{\pi^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos \dfrac{\pi(2k+1)}{l} at \sin \dfrac{\pi(2k+1)}{l} x}{(2k+1)^3}$$

$$+ \left[-\left(\frac{l}{2\pi a}\right)^3 \sin \frac{2\pi}{l} at + \left(\frac{l}{2\pi a}\right)^2 t \right] \sin \frac{2\pi}{l} x.$$

Заметим, что при нахождения $v_2(t)$ можно было бы воспользоваться операционным методом, о котором уже говорилось, или же непосредственно применить формулу (15.10).

§ 16. Общая первая краевая задача

Рассмотрим общую первую краевую задачу для уравнения колебаний струны: найти решение уравнения

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), \tag{16.1}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$\begin{cases} u(x,0) = \varphi(x), \\ u_t(x,0) = \psi(x), \end{cases}$$

и граничным условиям

$$\begin{cases} u(0,t) = \mu_1(t), \\ u(l,t) = \mu_2(t). \end{cases}$$

Положим

$$U(x,t) = \mu_1(t) + \frac{x}{l}[\mu_2(t) - \mu_1(t)]$$

и рассмотрим функцию $v(x,t)$, определенную равенством

$$u(x,t) = U(x,t) + v(x,t).$$

Если функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (16.1), то функция $v(x,t)$ будет удовлетворять уравнению

$$v_{tt} = a^2 v_{xx} + f(x,t) - (U_{tt} - a^2 U_{xx}).$$

Таким образом, функция $v(x,t)$ является решением уравнения

$$v_{tt} = a^2 v_{xx} + \overline{f}(x,t),$$

где

$$\overline{f}(x,t) = f(x,t) - \mu_1''(t) - \frac{x}{l}[\mu_2''(t) - \mu_1''(t)],$$

удовлетворяющим начальным условиям

$$v(x,0) = u(x,0) - U(x,0) = \varphi(x) - \mu_1(0) - \frac{x}{l}[\mu_2(0) - \mu_1(0)],$$

$$v_t(x,0) = u_t(x,0) - U_t(x,0) = \psi(x) - \mu_1'(0) - \frac{x}{l}[\mu_2'(0) - \mu_1'(0)],$$

и граничным условиям

$$\begin{cases} v(0,t) = u(0,t) - U(0,t) = 0, \\ v(l,t) = u(l,t) - U(l,t) = 0. \end{cases}$$

Тем самым мы свели задачу к решению неоднородного уравнения с уже однородными граничными условиями. Решение таких задач было рассмотрено в § 15.

§ 17. Метод Фурье решения двумерного волнового уравнения для прямоугольной мембраны

Процесс колебаний мембраны может быть описан уравнением

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + f(x,y,t)$$

(см. § 9). Если мембрана занимает некоторую ограниченную область D в плоскости (x,y), то для определения закона ее движения необходимо задать начальные условия

$$\begin{cases} u|_{t=0} = \varphi(x,y), \\ u_t|_{t=0} = \psi(x,y), \end{cases} \tag{17.1}$$

а также граничные условия

$$u|_{(x,y)\in\Gamma} = \alpha(x,y,t);$$

здесь кривая Γ — граница области D. Граничные условия могут быть и других типов.

Решение краевых задач на плоскости представляется более трудным, чем в случае прямой. Мы рассмотрим решение этих задач в двух частных случаях, когда мембрана является прямоугольной или круглой.

Рассмотрим решение однородного двумерного волнового уравнения для прямоугольника со сторонами l, m

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}) \tag{17.2}$$

с начальными условиями (17.1) и граничными условиями

$$u|_{x=0} = u|_{x=l} = u|_{y=0} = u|_{y=m} = 0. \tag{17.3}$$

Для решения этой задачи применим метод Фурье (метод разделения переменных). Будем искать решение уравнения (17.2) в виде

$$u(x,y,t) = X(x)Y(y)T(t).$$

Получим следующее уравнение

$$X(x)Y(y)T''(t) = a^2[X''(x)Y(y)T(t) + X(x)Y''(y)T(t)].$$

Разделив обе части на $a^2X(x)Y(y)T(t)$, будем иметь

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)}.$$

Фиксируя переменные t и y, получаем, что выражение $\dfrac{X''(x)}{X(x)}$ сохраняет постоянное значение. Обозначим его для удобства через $-\lambda$. Таким образом, для $X(x)$ имеем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0. \tag{17.4}$$

Аналогично получаем

$$Y''(y) + \mu Y(y) = 0, \tag{17.5}$$

$$T''(t) + a^2 \omega T(t) = 0, \tag{17.6}$$

где $\omega = \lambda + \mu$.

Используя граничные условия (17.3), к уравнениям (17.4), (17.5) присоединяются условия

$$X(0) = X(l) = 0,$$
$$Y(0) = Y(m) = 0.$$

Подобные краевые задачи подробно были рассмотрены в § 13. Здесь получаем следующие решения

$$X_n(x) = \sin \frac{\pi n}{l} x,$$
$$Y_k(y) = \sin \frac{\pi k}{m} y,$$

при $\lambda = \lambda_n = \left(\dfrac{\pi n}{l}\right)^2$, $\mu = \mu_k = \left(\dfrac{\pi k}{m}\right)^2$.

Таким образом, имеем

$$\omega = \omega_{n,k}^2 = \lambda_n + \mu_k = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 + \left(\frac{\pi k}{m}\right)^2,$$

а общее решение уравнения (17.6) имеет вид

$$T_{n,k}(t) = A_{n,k} \cos \omega_{n,k} a t + B_{n,k} \sin \omega_{n,k} a t.$$

Рассмотрим функцию

$$u(x,y,t) = \sum_{n,k=1}^{\infty} (A_{n,k} \cos \omega_{n,k} a t + B_{n,k} \sin \omega_{n,k} a t) \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi k}{m} y. \tag{17.7}$$

Эта функция является решением уравнения (17.2) с граничными условиями (17.2) (мы не останавливается на условиях возможности почленного дифференцирования ряда (17.7)). Для удовлетворения условий (17.1) получим равенства

$$\begin{gathered}\sum_{n,k=1}^{\infty} A_{n,k} \sin\frac{\pi n}{l}x \sin\frac{\pi k}{m}y = \varphi(x,y), \\ \sum_{n,k=1}^{\infty} \omega_{n,k} B_{n,k} \sin\frac{\pi n}{l}x \sin\frac{\pi k}{m}y = \psi(x,y).\end{gathered} \tag{17.8}$$

Разложим функции $\varphi(x,y)$ и $\psi(x,y)$ в двойной ряд Фурье, т.е. в ряды вида

$$\varphi(x,y) = \sum_{n,k=1}^{\infty} \varphi_{n,k} \sin\frac{\pi n}{l}x \sin\frac{\pi k}{m}y,$$

$$\psi(x,y) = \sum_{n,k=1}^{\infty} \psi_{n,k} \sin\frac{\pi n}{l}x \sin\frac{\pi k}{m}y,$$

где коэффициенты Фурье $\varphi_{n,k}$ и $\psi_{n,k}$ вычисляются по формулам

$$\varphi_{n,k} = \frac{4}{lm}\iint_D \varphi(x,y) \sin\frac{\pi n}{l}x \sin\frac{\pi k}{m}y\, dxdy,$$
$$\psi_{n,k} = \frac{4}{lm}\iint_D \psi(x,y) \sin\frac{\pi n}{l}x \sin\frac{\pi k}{m}y\, dxdy;$$

здесь область D задается условиями $0 \le x \le l$, $0 \le y \le m$.

Отсюда следует, что условия (17.8) будут удовлетворяться, если положить в (17.7) $A_{n,k} = \varphi_{n,k}$, $B_{n,k} = \psi_{n,k}$.

§ 18. Функции Бесселя

При решении задачи о круглой мембране (как и в других важных случаях) возникает необходимость решать дифференциальное уравнение вида

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0, \tag{18.1}$$

где p — некоторый параметр. Уравнение (18.1) называется *уравнением Бесселя p-го порядка* или *уравнением цилиндрических функций p-го порядка.*

Будем искать решение уравнения (18.1) в виде ряда

$$y(x) = x^{\sigma}\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k,$$

где σ — некоторый вещественный параметр. Подставляя $y(x)$, $y'(x)$ и $y''(x)$ в (18.1) и приравнивая коэффициенты при $x^{\sigma}, x^{\sigma+1}, \ldots$ нулю, получим систему уравнений для определения $a_0, a_1, \ldots$

$$\begin{cases} a_0(\sigma^2 - p^2) = 0, \\ a_1[(\sigma+1)^2 - p^2] = 0, \\ a_2[(\sigma+2)^2 - p^2] + a_0 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_k[(\sigma+k)^2 - p^2] + a_{k-2} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \tag{18.2}$$

Можно считать, что $a_0 \neq 0$ (иначе можно просто изменить σ), поэтому $\sigma = \pm p$. Рассмотрим сначала случай $\sigma = p$. Из уравнений (18.2) получаем, что все нечетные коэффициенты равны нулю, а для четных справедливо равенство

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m a_0}{2^{2m} m!(p+1)(p+2)\ldots(p+m)}. \tag{18.3}$$

Далее нам удобно будет использовать гамма-функцию

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1}\, dx.$$

Легко убедиться, что $\Gamma(1) = 1$. Одно из основных свойств гамма-функции:

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s).$$

Отсюда следует, что при целых n

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \ldots = n!.$$

Тем самым гамма-функция распространяет понятие факториала на нецелые значения аргумента. С помощью равенства

$$\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+1)}{s}$$

гамма-функция может быть распространена и на отрицательные нецелые значения s.

Положив (для удобства записи последующих формул)

$$a_0 = \frac{1}{2^p \Gamma(p+1)},$$

из формулы (18.3) получим

$$a_{2m} = (-1)^m \frac{1}{2^{2m+p}\Gamma(m+1)\Gamma(p+m+1)}.$$

Поэтому ряд

$$J_p(x) = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p}$$

является решением уравнения (18.1). Функция $J_p(x)$ называется *функцией Бесселя (или цилиндрической) первого рода p-го порядка.*

Ряд
$$J_{-p}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-p+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-p} \tag{18.4}$$
соответствующий $\sigma=-p$, если p — нецелое, является вторым решением уравнения (18.1), причем линейно независимым от $J_p(x)$.

Тем самым, если p — нецелое, то общее решение уравнения (18.1) имеет вид
$$y(x)=C_1J_p(x)+C_2J_{-p}(x).$$
Заметим, что функция $J_{-p}(x)$ неограничена в окрестности нуля (т.е. $\lim\limits_{x\to 0}J_{-p}(x)=\infty$), поэтому общий вид ограниченных решений уравнения (18.1) будет таков:
$$y(x)=C_1J_p(x).$$

При целых $p=n$ функция $J_{-n}(x)$ может быть определена равенством (18.4), если считать, что суммирование начинается со значения $k=n$ (ибо $\Gamma(k-n+1)=\infty$ для $k\le n-1$). В этом случае легко показать, что $J_{-n}(x)=(-1)^nJ_n(x)$, т.е. эти функции являются линейно зависимыми.

Положим при нецелом p
$$N_p(x)=\frac{J_p(x)\cos\pi p-J_{-p}(x)}{\sin\pi p}.$$
Функция $N_p(x)$ носит название *функции Неймана* или *функции Бесселя второго рода 2-го порядка.* При целых $p=n$ функция Неймана определяется предельным переходом:
$$N_n(x)=\lim_{p\to n}N_p(x).$$
Функция Неймана является линейно независимой с функцией Бесселя первого рода $J_n(x)$, следовательно, общее решение уравнения (18.1) при целых $p=n$ имеет вид
$$y(x)=C_1J_n(x)+C_2N_n(x). \tag{18.5}$$
Функция $N_n(x)$ неограничена в окрестности нуля и для нахождения ограниченных решений в (18.5) следует положить $C_2=0$.

Выпишем в качестве примера ряды для функций Бесселя первого рода нулевого и первого порядков
$$J_0(x)=1-\left(\frac{x}{2}\right)^2+\frac{1}{(2!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^4-\frac{1}{(3!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^6+\ldots,$$
$$J_1(x)=\frac{x}{2}-\frac{1}{2!}\left(\frac{x}{2}\right)^3+\frac{1}{2!3!}\left(\frac{x}{2}\right)^5-\ldots.$$
Функция Бесселя часто встречаются в приложениях и для них имеются подробные таблицы.

Отметим следующие свойства функций Бесселя:

1. Уравнение

$$J_n(\mu) = 0$$

имеет бесконечное множество положительных корней

$$0 < \mu_1^{(n)} < \mu_2^{(n)} < \ldots < \mu_m^{(n)} < \ldots.$$

Для чисел $\mu_m^{(n)}$ составлены таблицы. При больших m корни могут быть приближенно вычислены по формуле

$$\mu_m^{(n)} \approx \frac{\pi}{4}(2n - 1 + 4m) - \frac{4n^2 - 1}{\pi(2n - 1 + 4m)}.$$

2. Функции $J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}r\right)$ ортогональны с весом r на отрезке $[0, r_0]$, т.е. при $m_1 \neq m_2$

$$\int_0^{r_0} rJ_n\left(\frac{\mu_{m_1}^{(n)}}{r_0}r\right) J_n\left(\frac{\mu_{m_2}^{(n)}}{r_0}r\right) dr = 0.$$

3. Нормы этих функций равны

$$\|J_n\|_m^2 = \int_0^{r_0} rJ_n^2\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}r\right) dr = \frac{r_0^2}{2}\left[J_n'(\mu_m^{(n)})\right]^2. \tag{18.6}$$

4. Имеют место рекуррентные формулы

$$\begin{cases} \dfrac{nJ_n(x)}{x} - J_n'(x) = J_{n+1}(x), \\ \dfrac{nJ_n(x)}{x} + J_n'(x) = J_{n-1}(x). \end{cases} \tag{18.7}$$

Кроме того, из равенств (18.7) вытекают соотношения

$$\left[J_n'(\mu_m^{(n)})\right]^2 = \left[J_{n-1}(\mu_m^{(n)})\right]^2 = \left[J_{n+1}(\mu_m^{(n)})\right]^2,$$

$$J_{n+1}(x) = -J_{n-1}(x) + \frac{2nJ_n(x)}{x}.$$

Из последнего равенства следует, что, зная значения функций $J_0(x)$ и $J_1(x)$, можно получить значения $J_n(x)$ при любом n.

5. Всякая непрерывная в интервале $(0, r_0)$ функция $f(r)$, имеющая кусочно-непрерывные первую и вторую производные, ограниченная в окрестности точки $r = 0$ и обращающаяся в нуль при $r = r_0$ может быть разложена в равномерно сходящийся ряд

$$f(r) = \sum_{m=1}^{\infty} f_m J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}r\right), \tag{18.8}$$

где

$$f_m = \frac{\displaystyle\int_0^{r_0} rf(r)J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}r\right) dr}{\|J_n\|_m^2}.$$

§ 19. Колебания круглой мембраны

При изучении свободных колебаний круглой мембраны в уравнении (17.2) полезно перейти к полярным координатам

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$$

В силу того, что

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2}, \\ \varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, \end{cases}$$

имеем

$$r_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \cos\varphi, \quad r_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sin\varphi,$$

$$\varphi_x = -\frac{y}{x^2+y^2} = -\frac{\sin\varphi}{r}, \quad \varphi_y = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{\cos\varphi}{r}.$$

Отсюда

$$r_{xx} = \frac{\sin^2\varphi}{r}, \quad r_{yy} = \frac{\cos^2\varphi}{r},$$

$$\varphi_{xx} = \frac{\sin 2\varphi}{r^2}, \quad \varphi_{yy} = -\frac{\sin 2\varphi}{r^2}.$$

Подставляя эти выражения в (6.2), (6.3), получим (роль переменных ξ, η здесь играют переменные r, φ)

$$u_{xx} = u_{rr}\cos^2\varphi - u_{r\varphi}\frac{\sin 2\varphi}{r} + u_{\varphi\varphi}\frac{\sin^2\varphi}{r^2} + u_r\frac{\sin^2\varphi}{r} + u_\varphi\frac{\sin 2\varphi}{r^2},$$

$$u_{yy} = u_{rr}\sin^2\varphi + u_{r\varphi}\frac{\sin 2\varphi}{r} + u_{\varphi\varphi}\frac{\cos^2\varphi}{r^2} + u_r\frac{\cos^2\varphi}{r} - u_\varphi\frac{\sin 2\varphi}{r^2}.$$

Таким образом, двумерный оператор Лапласа в полярных координатах имеет вид

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = u_{rr} + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} + \frac{1}{r}u_r.$$

Тем самым уравнение (17.2) в полярных координатах будет иметь следующий вид

$$u_{tt} = a^2\left(u_{rr} + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} + \frac{1}{r}u_r\right). \tag{19.1}$$

Начальные условия (17.1) при переходе к полярным координатам запишутся следующим образом

$$\begin{cases} u(r,\varphi,0) = \Phi(r,\varphi), \\ u_t(r,\varphi,0) = \Psi(r,\varphi). \end{cases} \tag{19.2}$$

Пусть мембрана представляет собой круг радиуса r_0 и края мембраны закреплены. Это означает, что мы имеем граничные условия

$$u(r_0, \varphi, t) = 0. \tag{19.3}$$

Для решения задачи (19.1–19.3) воспользуемся методом Фурье, т.е. будем искать решение уравнения (19.1), удовлетворяющее граничному условию (19.3), в виде произведения

$$u(r, \varphi, t) = R(r)\Theta(\varphi)T(t).$$

Подставив это выражение в уравнение (19.1) и поделив на $a^2R(r)\Theta(\varphi)T(t)$, будем иметь (см. § 17)

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{R''(r)}{R(r)} + \frac{1}{r}\frac{R'(r)}{R(r)} + \frac{1}{r^2}\frac{\Theta''(\varphi)}{\Theta(\varphi)} = -\lambda.$$

Отсюда вытекают следующие уравнения

$$T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, \tag{19.4}$$

$$r^2\frac{R''(r)}{R(r)} + r\frac{R'(r)}{R(r)} + \lambda r^2 = -\frac{\Theta''(\varphi)}{\Theta(\varphi)} = \mu.$$

Из последнего равенства в свою очередь вытекают уравнения

$$\Theta''(\varphi) + \mu\Theta(\varphi) = 0, \tag{19.5}$$

$$r^2R''(r) + rR'(r) + (\lambda r^2 - \mu)R(r) = 0. \tag{19.6}$$

Будем считать, что $\lambda > 0$, тогда общее решение уравнения (19.4)

$$T(t) = C_1 \cos a\sqrt{\lambda}t + C_2 \sin a\sqrt{\lambda}t. \tag{19.7}$$

В силу периодичности функции $\Theta(\varphi)$ нетривиальные решения уравнения (19.5) существуют лишь при $\mu = n^2$ и имеют вид

$$\Theta_n(\varphi) = D_{1n} \cos n\varphi + D_{2n} \sin n\varphi. \tag{19.8}$$

Займемся решением уравнения (19.6). Граничное условие (19.3) дает условие

$$R(r_0) = 0. \tag{19.9}$$

Кроме того, из физического смысла задачи величина $R(0)$ должна быть ограничена, т.е.

$$|R(0)| < \infty. \tag{19.10}$$

Введем новую переменную $x = \sqrt{\lambda}r$ и обозначим

$$y(x) = R(r) = R\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right).$$

Тогда

$$y'(x) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}R'\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right), \quad y''(x) = \frac{1}{\lambda}R''\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right),$$

и уравнение (19.6) преобразуется к виду

$$x^2y''(x) + xy'(x) + (x^2 - n^2)y(x) = 0.$$

Последнее уравнение является уравнением Бесселя и в силу требования (19.10) его решение с точностью до множителя, который можно положить равным единице, совпадает с функцией Бесселя первого рода n-го порядка $J_n(x)$.

Условие (19.9) дает $J_n(\sqrt{\lambda}r_0) = 0$. Отсюда

$$\lambda = \lambda_{n,m} = \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}\right)^2,$$

где $\mu_m^{(n)}$ — нули функции Бесселя $J_n(x)$. Итак, найдены решения уравнения (19.6)

$$R_{n,m}(r) = J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}r\right). \tag{19.11}$$

Приняв во внимание полученные частные решения (19.7), (19.8) и (19.11), будем искать, решение задачи (19.1–19.3) в виде

$$u(r,\varphi,t) = \sum_{\substack{n=0\\m=1}}^{\infty}\left(\alpha_{n,m}^{(1)}\cos\frac{a\mu_m^{(n)}}{r_0}t + \alpha_{n,m}^{(2)}\sin\frac{a\mu_m^{(n)}}{r_0}t\right)\cos n\varphi$$

$$\times J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}r\right) + \sum_{\substack{n=0\\m=1}}^{\infty}\left(\beta_{n,m}^{(1)}\cos\frac{a\mu_m^{(n)}}{r_0}t + \beta_{n,m}^{(2)}\sin\frac{a\mu_m^{(n)}}{r_0}t\right)\sin n\varphi$$

$$\times J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}r\right).$$

Для удовлетворения начальных условий (19.2) необходимо выполнение равенств

$$\sum_{\substack{n=0\\m=1}}^{\infty}\left(\alpha_{n,m}^{(1)}\cos n\varphi + \beta_{n,m}^{(1)}\sin n\varphi\right)J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}r\right) = \Phi(r,\varphi),$$

$$\frac{a}{r_0}\sum_{\substack{n=0\\m=1}}^{\infty}\mu_m^{(n)}\left(\alpha_{n,m}^{(2)}\cos n\varphi + \beta_{n,m}^{(2)}\sin n\varphi\right)J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}r\right) = \Psi(r,\varphi). \tag{19.12}$$

Разложим функцию $\Phi(r,\varphi)$ в ряд Фурье на отрезке $[-\pi,\pi]$ при фиксированном r

$$\Phi(r,\varphi) = \frac{c_0(r)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n(r)\cos n\varphi + d_n(r)\sin n\varphi\right),$$

$$c_n(r) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi(r,\varphi)\cos n\varphi\,d\varphi,$$

$$d_n(r) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi(r,\varphi)\sin n\varphi\,d\varphi.$$

Разлагая в ряд (18.8) каждую из функций $c_n(r)$, $d_n(r)$ и сравнивая полученное разложение функции $\Phi(r,\varphi)$ с разложением (19.12), находим коэффициенты

$$\alpha_{n,m}^{(1)} = \frac{\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{r_0} \Phi(r,\varphi) J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r\right) \cos n\varphi \, r dr d\varphi}{\pi\varepsilon_n \|J_n\|_m^2}, \tag{19.13}$$

$$\beta_{n,m}^{(1)} = \frac{\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{r_0} \Phi(r,\varphi) J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r\right) \sin n\varphi \, r dr d\varphi}{\pi\varepsilon_n \|J_n\|_m^2}. \tag{19.14}$$

Совершенно аналогично получаем

$$\alpha_{n,m}^{(2)} = \frac{r_0\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{r_0} \Psi(r,\varphi) J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r\right) \cos n\varphi \, r dr d\varphi}{\pi a \mu_m^{(n)} \varepsilon_n \|J_n\|_m^2},$$

$$\beta_{n,m}^{(2)} = \frac{r_0\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{r_0} \Psi(r,\varphi) J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r\right) \sin n\varphi \, r dr d\varphi}{\pi a \mu_m^{(n)} \varepsilon_n \|J_n\|_m^2};$$

здесь $\varepsilon_n = \begin{cases} 2, & n = 0, \\ 1, & n \neq 0, \end{cases}$ а $\|J_n\|_m^2$ определена равенством (18.6).

Для случая радиальных колебаний (т.е. в случае, когда начальные условия и, соответственно, решение не зависит от угла φ, а зависит лишь от r) задача значительно упрощается. В этом случае решение может быть представлено в виде

$$u(r,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\alpha_m \cos \frac{a\mu_m^{(0)}}{r_0} t + \beta_m \sin \frac{a\mu_m^{(0)}}{r_0} t \right) J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{r_0} r\right),$$

где

$$\alpha_m = \frac{\displaystyle\int_0^{r_0} \Phi(r) J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{r_0} r\right) r\, dr}{\dfrac{r_0^2}{2} J_1^2(\mu_m^{(0)})},$$

$$\beta_m = \frac{\displaystyle\int_0^{r_0} \Psi(r) J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{r_0} r\right) r\, dr}{\dfrac{a\mu_m^{(0)} r_0^2}{2} J_1^2(\mu_m^{(0)})}.$$

Содержание