

Министерство высшего и среднего специального образования
РСФСР

Московский авиационный технологический институт
им. К.Э. Циолковского

Кафедра “Высшая математика”

В.М. Асеев, В.В. Горбачевич, К.Ю. Осипенко

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ ПО КУРСУ
“УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ”

Часть 4

УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Москва – 1984

ГЛАВА 4

Уравнения параболического типа

Уравнения с частными производными второго порядка параболического типа встречаются во многих физических задачах, касающихся процессов распространения тепла, электрического заряда, диффузии и др. Простейшее уравнение параболического типа

$$u_t = u_{xx}$$

обычно называется (одномерным) уравнением теплопроводности.

§ 20. Уравнение распространения тепла в стержне

Рассмотрим стержень длины l , расположенный вдоль оси OX . Будем предполагать, что выполнены следующие условия:

1. Стержень является тонким. Точнее, если $u(x, t)$ — температура точек стержня в сечении с абсциссой x в момент времени t , то будем предполагать, что в пределах этого сечения температура во всех точках одинакова (это выполнено, например, для достаточно тонкого стержня).

2. Боковая поверхность стержня теплоизолирована (к торцам это, вообще говоря, не относится).

3. Стержень однородный. В частности, он имеет постоянную линейную плотность ρ , постоянные коэффициенты теплоемкости c и теплопроводности k .

4. Внутри стержня отсутствуют источники (или поглотители) тепла.

При выводе уравнения, описывающего распределение тепла в стержне, будут использованы следующие законы:

Закон Ньютона: количество тепла ΔQ , необходимое, чтобы изменить на Δu температуру участка стержня объема V , равно

$$\Delta Q = c\rho V \Delta u \quad (20.1)$$

Закон Фурье: количество тепла, проходящее через сечение стержня с абсциссой x за время Δt , равно

$$Q(x) = -kS u_x \Delta t, \quad (20.2)$$

где S — площадь сечения. Знак минус введен потому, что при возрастании температуры стержня с увеличением x (т.е. при $u_x > 0$) поток тепла должен быть направлен в сторону уменьшения температуры (т.е. в отрицательном направлении).

Выделим теперь участок стержня $[x, x + \Delta x]$ (см. рис. 9) и составим для него уравнение теплового баланса.

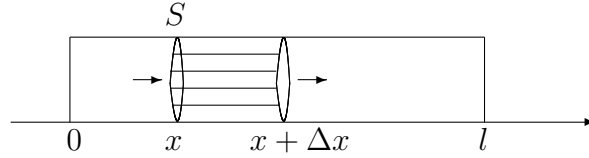


рис. 9

Так как внутри стержня источники (и поглотители) тепла отсутствуют, то ясно, что

$$\Delta Q = Q(x) - Q(x + \Delta x), \quad (20.3)$$

т.к. $Q(x) - Q(x + \Delta x)$ равно потоку тепла через всю поверхность стержня (напомним, что боковая поверхность теплоизолирована).

Имеем в силу (20.2)

$$Q(x) - Q(x + \Delta x) = kS(u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t))\Delta t,$$

откуда по теореме Лагранжа получаем

$$Q(x) - Q(x + \Delta x) = kSu_{xx}(x + \theta\Delta x, t)\Delta x\Delta t,$$

где $0 < \theta < 1$.

Отсюда с помощью (20.1) и (20.3) получаем соотношение

$$c\rho S\Delta x\Delta u = kSu_{xx}(x + \theta\Delta x, t)\Delta x\Delta t, \quad (20.4)$$

где вместо V подставлено выражение $S\Delta x$. Поделив обе части соотношения (20.4) на $c\rho S\Delta x\Delta t$, получим

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{k}{c\rho}u_{xx}(x + \theta\Delta x, t).$$

Переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$ и $\Delta x \rightarrow 0$, получим уравнение

$$u_t = \frac{k}{c\rho}u_{xx}.$$

Обозначив $a^2 = \frac{k}{c\rho}$, окончательно получим уравнение

$$u_t = a^2u_{xx}, \quad (20.5)$$

описывающее распространение тепла в стержне. Коэффициент a^2 иногда называют коэффициентом температуропроводности.

Уравнение (20.5) было выведено в предположении, что в стержне отсутствуют внутренние источники тепла. Рассмотрим теперь общий случай. Пусть внутри стержня на участке длиной Δx за время Δt выделяется количество тепла, равное

$$Q^* = g(x, t)\Delta x\Delta t, \quad (20.6)$$

где функция $g(x, t)$ характеризует мощность источника тепла; ее называют плотностью теплового источника. Добавив Q^* в уравнение теплового баланса, получим

$$c\rho S\Delta x\Delta u = kSu_{xx}(x + \theta\Delta x, t)\Delta x\Delta t + g(x, t)\Delta x\Delta t.$$

Разделив это соотношение на $c\rho S\Delta x\Delta t$ и переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, $\Delta x \rightarrow 0$, получим

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad (20.7)$$

где $a^2 = \frac{k}{c\rho}$, $f(x, t) = \frac{1}{c\rho S}g(x, t)$.

Полученное уравнение называют одномерным уравнением теплопроводности, оно является линейным уравнением в частных производных второго порядка. Если $f(x, t) = 0$ (т.е. внутри стержня отсутствуют источники или поглотители тепла), то приходим к однородному уравнению (20.5).

Можно отказаться и от требования однородности стержня, т.е. предположить, что величины p , c , k могут зависеть от x . В этом случае получается следующее уравнение теплопроводности:

$$c\rho u_t = (ku_x)_x + f(x, t).$$

Это общее уравнение (а также его частные случаи — уравнения (20.5) и (20.7)) является линейным уравнением параболического типа. Это следует из того, что в обозначениях из § 7 имеем $a_{11} = k$, $a_{12} = a_{22} = 0$, а потому $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$.

§ 21. Начальные и граничные условия. Краевые задачи

Чтобы среди всех решений уравнения теплопроводности (20.7) выделить одно, нужно, как и для других уравнений с частными производными, дополнительно задать начальные и граничные условия.

По переменной t уравнение (20.7) имеет первый порядок. В соответствии с этим задается только одно начальное условие:

$$u(x, t_0) = \varphi(x), \quad (21.1)$$

т.е. задается температура точек стержня в начальный момент времени t_0 (обычно берут $t_0 = 0$).

Процесс распространения тепла в стержне зависит также и от тепловых процессов, происходящих на торцах стержня. Другими словами, для однозначного определения решения уравнения теплопроводности нужно задать и граничные условия. Типы таких условий достаточно разнообразны, рассмотрим некоторые из них.

1. Граничные условия I рода. Здесь задается закон изменения температуры на торце стержня (на одном или на обоих), например

$$u(0, t) = \mu(t). \quad (21.2)$$

При $\mu(t) = 0$ получаем однородное граничное условие

$$u(0, t) = 0, \quad (21.3)$$

показывающее, что на торце стержня (в данном случае — на левом) поддерживается постоянная нулевая температура.

2. Граничные условия II рода. Пусть задан тепловой поток через один из торцов стержня (например, левый). Так как в силу закона Фурье этот тепловой поток пропорционален $u_x(0, t)$, то получаем граничное условие вида

$$u_x(0, t) = \alpha(t), \quad (21.4)$$

называемое граничным условием II рода. При $\alpha(t) = 0$ получаем однородное граничное условие II рода

$$u_x(0, t) = 0, \quad (21.5)$$

означающее, что левый торец стержня теплоизолирован (тепловой поток через него отсутствует).

3. Граничные условия III рода. Пусть задан закон теплообмена между торцом стержня (например, левым) и окружающей средой. Если этот теплообмен происходит по закону Ньютона, то получаем граничное условие

$$u_x(0, t) = h(u_0 - u(0, t)), \quad (21.6)$$

называемое граничным условием III рода. Здесь u_0 — это температура окружающей среды, а h — коэффициент теплопередачи.

4. Еще одним типом граничного условия является понятие неограниченного тела. Размеры реальных тел ограничены, но иногда оказывается, что тепловые процессы на торце стержня не оказывают существенного влияния на распределение температуры в рассматриваемой части стержня. В этом случае говорят об отсутствии границы (т.е. неограниченности) или о бесконечности стержня. При этом на поведение функции $u(x, t)$ при $x \rightarrow \infty$ иногда накладывают некоторые ограничения, например, полагают $u_x(\infty, t) = 0$ или требуют ограниченности величины $u(x, t)$ при $x \rightarrow \infty$

Каждому типу граничных условий соответствует краевая задача для уравнения теплопроводности. Сформулируем, например, I краевую задачу.

Требуется найти функцию $u(x, t)$, удовлетворяющую при $0 \leq x \leq l$ и $t > 0$ уравнению

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t),$$

а также начальному условию

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad (21.7)$$

и граничным условиям I рода

$$\begin{cases} u(0, t) = \mu_1(t), \\ u(l, t) = \mu_2(t). \end{cases} \quad (21.8)$$

Если вместо граничных условий I рода рассматриваются граничные условия II или III рода, то получаем краевую задачу соответственно II или III рода. Можно рассматривать также краевые задачи для бесконечного ($-\infty < x < +\infty$) и полубесконечного стержня ($0 \leq x < +\infty$). Если на разных концах стержня граничные условия разного типа, то соответствующую краевую задачу называют смешанной.

Как и краевые задачи для уравнения колебаний струны (см. § 10), краевые задачи I, II и III рода для уравнения теплопроводности имеют решение, причем единственное. Точнее, существование и единственность решения имеют место, если на функции, входящие в условия задачи, наложить некоторые дополнительные ограничения типа дифференцируемости и согласованности. Строго формулировать здесь эти условия мы не будем (они близки к условиям, указанным в теореме 10.1 и других утверждениях из гл. 3). Сформулируем в явном виде здесь лишь теорему единственности для I краевой задачи.

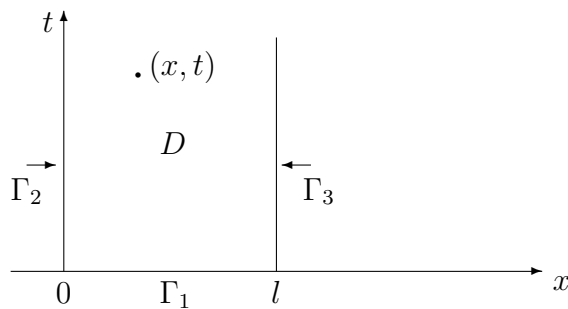


рис. 10

Рассмотрим плоскость переменных x, t и бесконечный прямоугольник D , изображенный на рис. 10. Граница Γ области D состоит из трех отрезков: Γ_1 ($0 \leq x \leq l, t = 0$), Γ_2 ($x = 0, t \geq 0$) и Γ_3 ($x = l, t \geq 0$). Начальное значение (21.7) задает значения функции $u(x, t)$ на отрезке Γ_1 . Граничные условия (21.8) определяют значения функции $u(x, t)$ на Γ_2 и Γ_3 . В результате получаем, что начальное и граничные условия I краевой задачи задают значения функции $u(x, t)$ на всей границе Γ бесконечной области D . Для решения краевой задачи остается лишь найти значения этой функции во внутренних точках (x, t) этой области.

Теорема единственности для I краевой задачи формулируется теперь следующим образом. Пусть функции $f(x, t)$, $\varphi(x)$, $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ непрерывны, а $\varphi(0) = \mu_1(0)$, $\varphi(l) = \mu_2(0)$ (эти последние условия обеспечивают согласованность начального и граничных условий в вершинах $(0, 0)$ и $(l, 0)$ области D). Тогда I краевая задача (21.7), (21.8) для уравнения теплопроводности (20.7) имеет не более одного решения $u(x, t)$, непрерывного в области D .

Утверждение же о существовании решения I краевой задачи требует наложения на входящие в нее функции более сильных ограничений, подробнее см. §§ 24, 25.

§ 22. Трехмерное уравнение теплопроводности

Рассмотрим процесс распространения тепла в некотором пространственном теле V . Если $u(x, y, z, t)$ — температура в точке $(x, y, z, t) \in V$ в момент времени t , то по аналогии со случаем стержня (см. § 20) выводится следующее уравнение для u (тело V предполагая однородным):

$$u_t = a^2 \Delta u + f(x, y, z, t), \quad (22.1)$$

где $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$, $a^2 = \frac{k}{c\rho}$ (здесь ρ — это объемная плотность тела V). Функция $f(x, y, z, t)$ характеризует мощность внутренних источников тепла, при их отсутствии имеем $f(x, y, z, t) = 0$ и уравнение (22.1) принимает вид

$$u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}). \quad (22.2)$$

Уравнение (22.1) называется трехмерным уравнением теплопроводности, а (22.2) — это соответствующее однородное уравнение. Уравнение (22.1) выводится примерно так же, как одномерное уравнение теплопроводности в § 20. При этом используется следующая общая форма закона Фурье:

$$Q = -kS \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} \Delta t, \quad (22.3)$$

где Q обозначает количество тепла, протекающее за время Δt через участок поверхности, площадь которого равна S . Здесь k — коэффициент теплопроводности, а $\frac{\partial u}{\partial \bar{n}}$ — это производная функции u по направлению нормали \bar{n} к рассматриваемому участку поверхности (см. рис. 11).

Начальное условие для уравнения (22.1) имеет вид

$$u(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z). \quad (22.4)$$

Оно задает температуру точек тела в начальный момент времени $t_0 = 0$. Укажем, как выглядят здесь граничные условия.

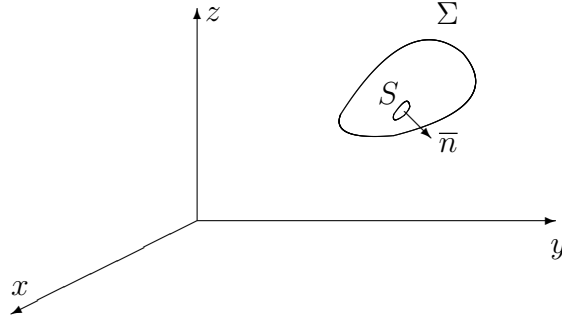


рис. 11

Граничное условие I рода имеет вид

$$u|_{\Sigma} = \mu(x, y, z, t). \quad (22.5)$$

Оно задает закон изменения температуры в точках (x, y, z) , принадлежащих границе Σ рассматриваемого тела V .

Граничное условие II рода

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{n}} \Big|_{\Sigma} = \alpha(x, y, z, t) \quad (22.6)$$

определяет, как видно из закона Фурье (22.3), поток тепла через границу Σ тела V . При $\alpha(x, y, z, t) \equiv 0$ приходим к случаю, когда поверхность теплоизолирована.

И, наконец, граничное условие III рода имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{n}} \Big|_{\Sigma} = h(u_0 - u|_{\Sigma}),$$

здесь задается теплообмен с окружающей средой (h — коэффициент теплопередачи, а $u_0 = u_0(x, y, z, t)$ — температура окружающей среды). Каждому типу граничных условий соответствует своя краевая задача для уравнения (22.1).

Если не требовать однородности тела V (т.е. допустить зависимость коэффициентов ρ , c и k от точки $(x, y, z, t) \in V$, то получим следующее общее уравнение теплопроводности

$$c\rho u_t = (ku_x)_x + (ku_y)_y + (ku_z)_z + f(x, y, z, t).$$

В некоторых случаях трехмерное уравнение теплопроводности (22.1) может быть сведено к двумерному или даже одномерному. Например, пусть из физического смысла задачи видно, что температура $u(x, y, z, t)$ точек тела не зависит от переменной z и то же касается функции $f(x, y, z, t)$, начального и граничных условий. Тогда уравнение (22.1) принимает вид

$$u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + f(x, y, t). \quad (22.7)$$

Это уравнение называется двумерным уравнением теплопроводности. Его можно рассматривать как уравнение описывающее распределение тепла в некоторой плоской пластине D (толщиной которой мы можем пренебречь).

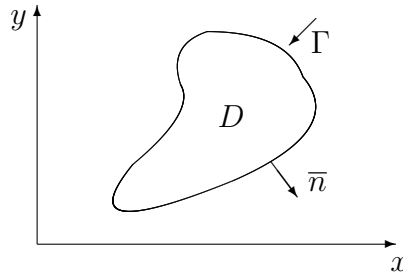


рис. 12

Граничные условия в этом случае задаются на кривой Γ — границе области D . Например, II краевая задача имеет вид:

$$\begin{cases} u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + f(x, y, t), \\ u(x, y, 0) = \varphi(x, y), \\ \left. \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} \right|_{\Gamma} = \alpha(x, y, t), \end{cases} \quad (22.8)$$

где \bar{n} — нормаль к кривой Γ (см. рис. 12).

Далее, может оказаться, что температура и все данные задачи зависят лишь от одной из трех координат x, y, z , скажем от x . Тогда уравнение (22.1) принимает вид

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t),$$

где $u = u(x, t)$, т.е. мы приходим к одномерному уравнению теплопроводности (20.7). Следовательно, это уравнение может быть использовано не только для изучения распределения тепла в стержне, но в некоторых случаях и для описания температуры пространственных тел. Например, пусть имеется пластина толщиной l , причем в двух других измерениях пластину можно считать бесконечной.

Предположим, что внутренние источники тепла отсутствуют, а начальное и граничное условия не зависят от y . Тогда распределение тепла в пластине описывается уравнением (20.5), а начальное и граничные условия задачи определяют краевую задачу для этого уравнения.

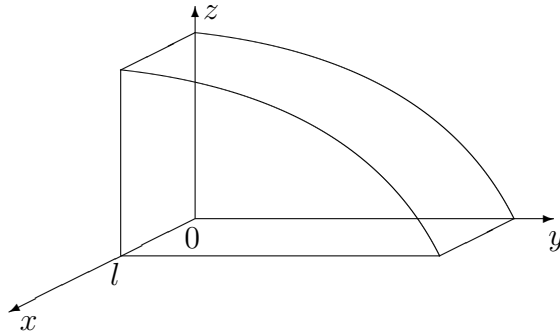


рис. 13

§ 23. Уравнение диффузии. Метод математического моделирования

Кроме процесса распространения тепла, еще многие другие физические процессы описываются уравнениями параболического типа. Рассмотрим, например, процесс диффузии в некотором теле V . Через $C(x, y, z, t)$ обозначим концентрацию диффундирующего вещества в точке $(x, y, z) \in V$ в момент времени t . Имеет место следующий закон Фика: количество вещества, диффундирующего через поверхность площадью S за время Δt , равно

$$\Phi = -DS \frac{\partial C}{\partial \bar{n}} \Delta t, \quad (23.1)$$

здесь $\frac{\partial C}{\partial \bar{n}}$ — производная по направлению нормали \bar{n} к рассматриваемому участку поверхности, D — коэффициент диффузии. По форме закон Фика совершенно аналогичен закону Фурье (22.3). Поэтому неудивительно, что уравнение диффузии, полученное с помощью (23.1), имеет вид

$$C_t = a^2 \Delta C + f(x, y, z, t), \quad (23.2)$$

аналогичный виду уравнения теплопроводности (22.1). Начальное условие для уравнения (23.2) имеет вид

$$C(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z).$$

Оно задает концентрацию диффундирующего вещества в начальный момент времени, Краевые задачи для уравнения диффузии аналогичны краевым задачам для уравнения теплопроводности (см. § 22). Например, в I краевой задаче задается концентрация диффундирующего вещества на границе Σ тела V :

$$C|_{\Sigma} = \mu(x, y, z, t).$$

Для случая II краевой задачи однородное граничное условие

$$\frac{\partial C}{\partial \bar{n}}|_{\Sigma} = 0$$

означает, что диффузия через граничную поверхность Σ отсутствует.

Еще одним физическим процессом, описываемым уравнением параболического типа, является процесс распространения электрического заряда. Дело в том, что основным закон для этого процесса — закон Ома — имеет вид

$$j = -\lambda S \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Delta t,$$

где j — поток электрического заряда через поверхность площадью S за время Δt , φ — электрический потенциал, а λ — коэффициент электропроводности. По своей форме закон Ома совпадает с законами Фурье и Фика, поэтому и уравнение для φ получается аналогичное (22.1) и (23.2):

$$\varphi_t = a^2 \Delta \varphi. \quad (23.3)$$

Мы видим, что различные физические процессы описываются фактически одним и тем же уравнением. Говорят, что такие физические процессы математически подобны. Математически подобны процессы распространения тепла, заряда и диффузии. Процесс колебаний струны, как можно показать, математически подобен процессу электромагнитных колебаний в телеграфной линии и т.д.

На явлении математического подобия основан метод математического моделирования. С помощью этого метода одни физические процессы моделируют с помощью других, им математически подобны. Для этого уравнения, описывающие эти процессы, записывают в форме, содержащей только безразмерные величины. Например, в одномерном уравнении теплопроводности переходят к переменным $X = \frac{x}{l}$ (относительная координата), $F = \frac{a^2 t}{l^2}$ (“безразмерное время”), искомую функцию u заменяют относительной температурой. Полученные безразмерные величины называют обобщенными параметрами, а уравнение, их связывающее математической моделью. Математическая модель является общей для всех математически подобных процессов. Подбирая два физических процесса так, чтобы их математические модели совпадали (т.е. совпадали все входящие в уравнения коэффициенты), мы можем изучать один из процессов, а полученные результаты переносить и на другой. Например, часто применяется электрическое моделирование тепловых процессов.

§ 24. Одномерное однородное уравнение теплопроводности. Метод Фурье

Метод Фурье (метод разделения переменных) уже применялся в § 13 для решения уравнения колебаний струны. Этот метод является весьма общим, он применим, в частности, и для решения уравнения теплопроводности.

Вначале рассмотрим I краевую задачу для однородного одномерного уравнения теплопроводности. А именно, будем искать решение уравнения

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad (24.1)$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad (24.2)$$

и граничным условиям I рода

$$\begin{cases} u(0, t) = \mu_1(t), \\ u(l, t) = \mu_2(t). \end{cases} \quad (24.3)$$

Как и в случае уравнения колебаний струны (см. § 13), начнем с нахождения решения при однородных (т.е. нулевых) граничных условиях

$$\begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u(l, t) = 0. \end{cases} \quad (24.4)$$

Ход построения решения во многом аналогичен приведенному в § 13 для гиперболического уравнения, поэтому здесь мы будем пропускать некоторые детали (ссылаясь на § 13).

Решение уравнения (23.1) будем искать в виде

$$u(x, t) = X(x)T(t). \quad (24.5)$$

Подставив это выражение в (24.1) и преобразовав, получим

$$\frac{1}{a^2} \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda.$$

Так же, как в § 13, убеждаемся, что величина λ не зависит от x , t , т.е. является постоянной. Для $X(x)$ и $T(t)$ получаем обыкновенные линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами:

$$X'' + \lambda X = 0, \quad (24.6)$$

$$T' + \lambda a^2 T = 0. \quad (24.7)$$

Из нулевых граничных условий (24.4) получаем (так же, как в § 13) следующие граничные условия для $X(x)$:

$$X(0) = X(l) = 0. \quad (24.8)$$

В результате приходим к следующей краевой задаче для $X(x)$

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \\ X(0) = X(l) = 0. \end{cases} \quad (24.9)$$

Эта задача уже рассматривалась в § 13 (см. (13.9)), где показано, что ее решения имеют вид

$$X_n(x) = \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad n = 1, 2, \dots \quad (24.10)$$

Эти функции являются собственными для уравнения (24.6), соответствующими собственным значениям

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2, \quad n = 1, 2, \dots$$

Решая для этих $\lambda = \lambda_n$ уравнение (24.7), получим

$$T_n(t) = B_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t}, \quad (24.11)$$

где B_n — произвольные постоянные. В результате получаем функции

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = B_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad (24.12)$$

которые удовлетворяют уравнению (24.1) и нулевым граничным условиям (24.4), $n = 1, 2, \dots$. Для того, чтобы найти решение, удовлетворяющее и начальному условию (24.2), рассмотрим следующий ряд

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x. \quad (24.13)$$

Предположим, что этот ряд сходится и допускает подстановку в (24.1), т.е. возможно его дифференцирование по t и двукратное дифференцирование по x . Тогда в силу линейности и однородности уравнения (24.1) получаем, что $u(x, t)$ будет решением этого уравнения, причем удовлетворяющим граничным условиям (24.4). Коэффициенты B_n подберем так, чтобы удовлетворялось и начальное условие (24.1):

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{\pi n}{l} x = \varphi(x). \quad (24.14)$$

Если функция $\varphi(x)$ допускает разложение в ряд Фурье по синусам на отрезке $[0, l]$, то из (24.14) видно, что коэффициенты B_n будут коэффициентами Фурье этого разложения, т.е.

$$B_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{\pi n}{l} x dx. \quad (24.15)$$

Для обоснования законности проведенных операций (подстановки ряда (24.13) в уравнение (24.1), разложения $\varphi(x)$ в ряд Фурье) нужно на функцию $\varphi(x)$ наложить дополнительные условия. Они совпадают с условиями, наложенными на функцию $\varphi(x)$ в § 13, повторять их здесь мы не будем. Если эти условия выполнены, то подставляя коэффициенты B_n из (24.15) в ряд (24.13), мы получим решение поставленной краевой задачи. Если же не все из упомянутых выше условий на $\varphi(x)$ выполнены, то как и в случае уравнения колебаний струны, может получиться функция $u(x, t)$, являющаяся “решением” нашей краевой задачи в некотором обобщенном смысле.

Перейдем теперь к решению общей I краевой задачи для однородного уравнения теплопроводности (24.1). Здесь мы будем действовать по аналогии с методом, использованным в § при решении уравнения колебаний струны. А именно, решение $u(x, t)$ будем искать в виде

$$u(x, t) = v(x, t) + V(x, t). \quad (24.16)$$

Функция $V(x, t)$ подбирается так, чтобы она удовлетворяла граничным условиям (24.3). Можно взять $V(x, t)$, линейно зависящей от x , тогда получим (ср. с § 16):

$$V(x, t) = \mu_1(t) + \frac{x}{l}(\mu_2(t) - \mu_1(t)). \quad (24.17)$$

Ясно, что $V(0, t) = \mu_1(t)$, $V(l, t) = \mu_2(t)$. Что касается функции $v(x, t)$, то она должна удовлетворять следующему уравнению (получаемому подстановкой $u = v + V$ в (24.1)):

$$v_t = a^2 v_{xx} - V_t \quad (24.18)$$

и нулевыми начальными условиями

$$v(0, t) = v(l, t) = 0. \quad (24.19)$$

Начальное условие для функции $v(x, t)$ имеет вид

$$v(x, 0) = u(x, 0) - V(x, 0) = \tilde{\varphi}(x), \quad (24.20)$$

где $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x) - \mu_1(0) - \frac{x}{l}(\mu_2(0) - \mu_1(0))$.

Следовательно, для функции $v(x, t)$ получаем I краевую задачу с нулевыми граничными условиями. Однако уравнение для $v(x, t)$ в общем случае оказывается неоднородным. Решение неоднородного уравнения теплопроводности будет рассмотрено в § 25. Здесь же рассмотрим один важный частный случай общей I краевой задачи для уравнения (24.1), в котором уравнение (24.18) оказывается однородным. А именно, рассмотрим следующие граничные условия

$$\begin{cases} u(0, t) = \mu_1, \\ u(l, t) = \mu_2, \end{cases} \quad (24.21)$$

где μ_1, μ_2 — некоторые постоянные. Такие краевые условия часто встречаются в прикладных задачах. В этом частном случае функция $V(x, t)$ не зависит от t , поэтому уравнение для $v(x, t)$ примет вид

$$v_t = a^2 v_{xx}, \quad (24.22)$$

т.е. по форме оно будет совпадать с (24.1). Решение $v(x, t)$ должно удовлетворять нулевым граничным условиям (24.19), а начальное условие для него таково:

$$v(x, 0) = \varphi(x) - \mu_1 - \frac{x}{l}(\mu_2 - \mu_1).$$

Получаем краевую задачу для $v(x, t)$, способ решения которой был уже указан выше. Найдя функцию $v(x, t)$, решение исходной краевой задачи (с постоянными граничными условиями (24.21)) получим в виде

$$u(x, t) = v(x, t) + \mu_1 + \frac{x}{l}(\mu_2 - \mu_1). \quad (24.23)$$

Пример 24.1. Пусть имеется бесконечная пластина толщины l . Предположим, что в начальный момент времени $t_0 = 0$ пластина имела температуру T_0 . В этот момент граничные поверхности пластины (соответствующие $x = 0$ и $x = l$, см. рис. 14 мгновенно нагреваются (или охлаждаются) до температуры T_1 . Нужно найти распределение температуры $u(x, y, z, t)$ в точках пластины при $t > 0$. Из условия задачи видно, что функция $u(x, y, z, t)$ на самом деле не зависит от y, z , т.е. $u = u(x, t)$ и она удовлетворяет одномерному уравнению теплопроводности $u_t = a^2 u_{xx}$.

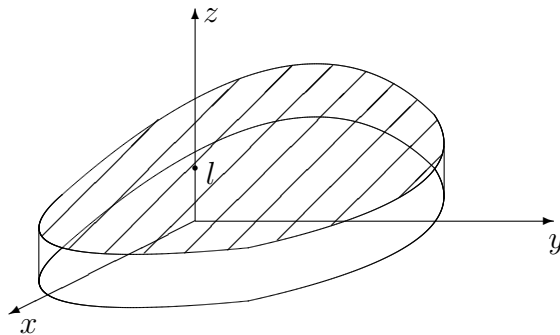


рис. 14

Начальное условие в рассматриваемой задаче имеет вид

$$u(x, 0) = T_0,$$

а граничные условия таковы:

$$u(0, t) = u(l, t) = T_1.$$

Используя изложенный выше метод решения, получим

$$u(x, t) = v(x, t) + T_1,$$

где функция $v(x, t)$ является решением следующей краевой задачи

$$\begin{cases} v_t = a^2 v_{xx}, \\ v(x, 0) = T_0 - T_1, \\ v(0, t) = v(l, t) = 0. \end{cases}$$

В силу (24.13) имеем

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

$$B_n = \frac{2}{l} \int_0^l (T_0 - T_1) \sin \frac{\pi n}{l} x dx = \frac{2(T_0 - T_1)}{\pi n} (1 - \cos \pi n).$$

Следовательно, $B_{2n} = 0$, а $B_{2n-1} = \frac{4(T_0 - T_1)}{\pi(2n-1)}$. В результате получаем решение поставленной задачи о законе распределения температуры в пластине

$$u(x, t) = T_0 + \frac{4(T_0 - T_1)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} e^{-\left(\frac{\pi a(2n-1)}{l}\right)^2 t} \sin \frac{\pi(2n-1)}{l} x.$$

Заметим, что из-за множителя $e^{-\left(\frac{\pi a(2n-1)}{l}\right)^2 t}$ этот ряд (как и общий ряд (24.13) сходится довольно быстро, т.е. при больших n и t его члены весьма малы и могут быть отброшены.

Задача 24.1. (для самостоятельного решения). Решить следующую краевую задачу

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, \\ u(x, 0) = \frac{x}{\pi} + \sin x, \\ u(0, t) = 0, \\ u(l, t) = 1. \end{cases}$$

§ 25. Одномерное уравнение теплопроводности (общий случай)

Перейдем к решению I краевой задачи для неоднородного уравнения теплопроводности. Нужно найти функцию $u(x, t)$, удовлетворяющую уравнению

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad (25.1)$$

начальному условию

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad (25.2)$$

и граничным условиям I рода

$$\begin{cases} u(0, t) = \mu_1(t), \\ u(l, t) = \mu_2(t). \end{cases} \quad (25.3)$$

Прежде всего сведем эту задачу к задаче с нулевыми граничными условиями. Для этого, как и в § 24, положим

$$u(x, t) = v(x, t) + V(x, t),$$

где $V(x, t) = \mu_1(t) + \frac{x}{l}(\mu_2(t) - \mu_1(t))$, а $v(x, t)$ является решением следующей краевой задачи:

$$\begin{cases} v_t = a^2 v_{xx} + \tilde{f}(x, t), \\ v(x, 0) = \tilde{\varphi}(x), \\ v(0, t) = v(l, t) = 0, \end{cases} \quad (25.4)$$

где $\tilde{f}(x, t) = f(x, t) - V_t$,

$$\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x) - V(0, t) = \varphi(x) - \mu_1(0) - \frac{x}{l}(\mu_2(0) - \mu_1(0)).$$

Остается найти функцию $v(x, t)$. Для этого применим метод, уже использованный в § 15 (при решении уравнения колебаний струны). А именно, функцию $v(x, t)$ будем искать в виде

$$v(x, t) = v^*(x, t) + w(x, t). \quad (25.5)$$

В качестве функции $w(x, t)$ возьмем решение однородного уравнения (соответствующего неоднородному уравнению (25.1)):

$$w_t = a^2 w_{xx},$$

причем начальное и граничные условия для $w(x, t)$ пусть будут те же, что и для $v(x, t)$, т.е.

$$\begin{cases} w(x, 0) = \tilde{\varphi}(x), \\ w(0, t) = w(l, t) = 0. \end{cases}$$

Способ решения полученной краевой задачи для $w(x, t)$ был уже указан в § 24. Перейдем к нахождению функции $v^*(x, t)$. Так $v^*(x, t) = v(x, t) - w(x, t)$, то легко убедиться, что $v^*(x, t)$ должна удовлетворять уравнению (25.1) (ибо $w(x, t)$ — решение соответствующего однородного уравнения) и следующим начальным и граничным условиям:

$$\begin{cases} v^*(x, t) = v(x, 0) - w(x, 0) = \tilde{\varphi}(x) - \tilde{\varphi}(x) = 0, \\ v^*(0, t) = v(0, t) - w(0, t) = 0, \text{ аналогично} \\ v^*(l, t) = 0. \end{cases} \quad (25.6)$$

$$\begin{cases} v^*(0, t) = 0. \end{cases} \quad (25.7)$$

Как и при решении неоднородного уравнения колебаний струны, функцию $v^*(x, t)$ будем искать в виде ряда

$$v^*(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x. \quad (25.8)$$

Функцию $\tilde{f}(x, t)$ разложим в ряд Фурье на отрезке $[0, l]$ по синусам (по переменной x , рассматривая t как параметр)

$$\tilde{f}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{f}_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad (25.9)$$

где $\tilde{f}_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l \tilde{f}(x, t) \sin \frac{\pi n}{l} x dx$ — коэффициенты Фурье.

Подставим ряды (25.8) и (25.9) в уравнение (25.1) (мы не будем останавливаться на условиях, при которых допустимо почленное дифференцирование ряда (25.9) и другие операции над рядами Фурье). Получим (ср. с § 15)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n'(t) + \left(\frac{\pi an}{l} \right)^2 c_n(t) - \tilde{f}_n(t) \right] \sin \frac{\pi n}{l} x = 0.$$

В силу единственности разложения функции в ряд Фурье получим

$$c_n'(t) + \left(\frac{\pi an}{l} \right)^2 c_n(t) = \tilde{f}_n(t), \quad n = 1, 2, \dots \quad (25.10)$$

В результате для определения каждой из функций $c_n(t)$ получаем обыкновенное дифференциальное уравнение (причем первого порядка и линейное). Общее решение такого уравнения можно указать в явном виде

$$c_n(t) = e^{-\left(\frac{\pi an}{l}\right)^2 t} \left[\int_0^l e^{\left(\frac{\pi an}{l}\right)^2 \tau} \tilde{f}_n(\tau) d\tau + C_n \right], \quad (25.11)$$

где C_n — произвольные постоянные, $n = 1, 2, \dots$. Из нулевого начального условия (25.6) вытекает (аналогично случаю уравнения колебаний струны — см. § 15), что

$$c_n(0) = 0. \quad (25.12)$$

Легко видеть, что общее решение (25.11) удовлетворяет условию (25.12) при $C_n = 0$, поэтому получаем окончательное выражение для $c_n(t)$

$$c_n(t) = e^{-\left(\frac{\pi an}{l}\right)^2 t} \int_0^l e^{\left(\frac{\pi an}{l}\right)^2 \tau} \tilde{f}_n(\tau) d\tau. \quad (25.13)$$

Подставляя (25.13) в (25.8), получим искомую функцию $v^*(x, t)$, а с нею и решение исходной краевой задачи

$$u(x, t) = v^*(x, t) + w(x, t) + V(x, t),$$

где способ нахождения функции $w(x, t)$ и явное выражение $V(x, t)$ были указаны выше.

Пример 25.1. Решить следующую краевую задачу

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + \sin x, \\ u(x, 0) = 0, \\ u(0, t) = u(\pi, t) = u_0. \end{cases}$$

Имеем здесь $V(x, t) = u_0$, поэтому $u(x, t) = v(x, t) + u_0$, где функция $v(x, t)$ удовлетворяет тому же уравнению, что и $u(x, t)$, но с нулевыми граничными условиями. Поэтому функцию $w(x, t)$ здесь вводить не надо. Функцию же $v(x, t)$ будем искать в виде ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \sin nx.$$

Разложение функции $f(x, t) = \sin x$ в ряд Фурье по синусам на отрезке $[0, \pi]$ имеет вид

$$\sin x = 1 \cdot \sin x + 0 \cdot \sin 2x + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin nx,$$

другими словами, $f_1(t) = 1$, а $f_n = 0$ при $n \geq 2$.

При $n \geq 2$ для функции $c_n(t)$ получаем задачу Коши

$$\begin{cases} c'_n + n^2 c_n = 0, \\ c_n(0) = 0. \end{cases}$$

Очевидно, что решением такой задачи Коши является $c_n(t) = 0$. Остается найти $c_1(t)$. Имеем задачу Коши

$$\begin{cases} c'_1 + c_1 = 0, \\ c_1(0) = 0. \end{cases}$$

Эту задачу Коши легко решить, получаем

$$c_1(t) = e^{-t} + 1.$$

Следовательно,

$$v(x, t) = c_1(t) \sin x = (e^{-t} + 1) \sin x.$$

Решение поставленной краевой задачи имеет вид

$$u(x, t) = u_0 + (1 + e^{-t}) \sin x.$$

Задача 25.1. (для самостоятельного решения). Решить краевую задачу

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - b \left(1 - \frac{x}{\pi}\right) \sin t, \\ u(x, 0) = 0, \\ u(0, t) = b \cos t, \\ u(\pi, t) = 0. \end{cases}$$

Покажем теперь, как с помощью метода Фурье решаются II и III краевые задачи для одномерного уравнения теплопроводности. Начнем с рассмотрения II краевой задачи. Для простоты рассмотрим только случай однородного уравнения с нулевыми граничными условиями. Итак, будем искать решение уравнения

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad (25.14)$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad (25.15)$$

и граничным условиям II рода (соответствующим случаю теплоизолированных концов стержня, см. § 21):

$$u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0. \quad (25.16)$$

Для нахождения решения применим снова метод Фурье. Функцию $u(x, t)$ будем искать в виде ряда

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) \widehat{X}_n(x),$$

причем каждое слагаемое $u_n(x, t) = T_n(t) \widehat{X}_n(x)$ должно будет удовлетворять уравнению (25.14) и условиям (25.16). Подставляя эти выражения для u_n в (25.14) и проводя рассуждения так же, как в § 24, получим следующие обыкновенные дифференциальные уравнения

$$T_n' + \lambda a^2 T_n = 0, \quad (25.17)$$

$$\widehat{X}_n'' + \lambda \widehat{X}_n = 0. \quad (25.18)$$

Из граничных условий (25.16) вытекает, что

$$(\widehat{X}_n)_x(0) = (\widehat{X}_n)_x(l) = 0. \quad (25.19)$$

Решая краевую задачу (25.18), (25.19) по той же схеме, что и краевую задачу (13.9), получим

$$\widehat{X}_n(x) = \cos \frac{\pi n}{l} x.$$

Эти решения соответствуют собственным значениям $\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$, $n = 1, 2, \dots$. Уравнение (25.17) совпадает с уравнением (24.7). В результате приходим к следующему выражению для решения рассматриваемой II краевой задачи

$$u(x, t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t} \cos \frac{\pi n}{l} x, \quad (25.20)$$

где A_n — произвольные постоянные. Полученная функция удовлетворяет (25.14) и (25.16). При $t = 0$ получаем

$$u(x, 0) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{\pi n}{l} x = \varphi(x),$$

откуда находим коэффициенты A_n (коэффициенты Фурье для $\varphi(x)$):

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \cos \frac{\pi n}{l} x dx. \quad (25.21)$$

Подставив (25.21) в (25.20), получим решение поставленной краевой задачи. Отметим, что ход решения II краевой задачи аналогичен ходу решения I краевой задачи в § 24, нужно лишь заменить функции $\sin \frac{\pi n}{l} x$ на $\cos \frac{\pi n}{l} x$. Решение II краевой задачи для неоднородного уравнения и произвольных граничных условий тоже аналогично решению I краевой задачи и тоже в основном сводится к замене синусов на косинусы (еще нужно изменить функцию $V(x, t)$).

Задача 25.2. (для самостоятельного решения). Доказать, что решение смешанной краевой задачи

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \\ u(x, 0) = \varphi(x), \\ u(0, t) = u_x(l, t) = 0 \end{cases}$$

имеет вид

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{\pi a n}{2l}\right)^2 t} \sin \frac{\pi n}{2l} x,$$

где

$$C_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{\pi n}{2l} x dx.$$

Перейдем к рассмотрению III краевой задачи. Обычно она встречается в виде смешанной задачи, например, с такими граничными условиями

$$\begin{cases} u_x(0, t) = 0, \\ u_x(l, t) = h(u_0 - u(l, t)). \end{cases} \quad (25.22)$$

Полагая $u = v + u_0$, можно свести условия (25.22) к случаю, когда $u_0 = 0$. Поэтому рассмотрим следующую краевую задачу

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \\ u(x, 0) = \varphi(x), \\ u_x(0, t) = 0, \\ u_x(l, t) = -hu(l, t). \end{cases}$$

Задача эта тоже может быть решена методом Фурье. Общее решение уравнения (24.6) для $X(x)$ (которое сохраняет силу и здесь) имеет вид

$$X_n(x) = c_{1,n} \cos \lambda_n x + c_{2,n} \sin \lambda_n x,$$

где λ_n — собственные значения (пока неизвестные), а $c_{1,n}, c_{2,n}$ — произвольные постоянные. Граничное условие $u_x(0, t) = 0$ дает

$$c_{2,n} = 0$$

(см. § 15). Условие же $u_x(l, t) = -hu(l, t)$ приводит к соотношению

$$\lambda \sin \lambda l = h \cos \lambda l.$$

Обозначив $p = \lambda l$, $\alpha = \frac{1}{hl}$, получаем уравнение

$$\operatorname{ctg} p = \alpha p. \quad (25.23)$$

Это уравнение имеет бесконечное множество вещественных корней p_n (см. рис. 15)

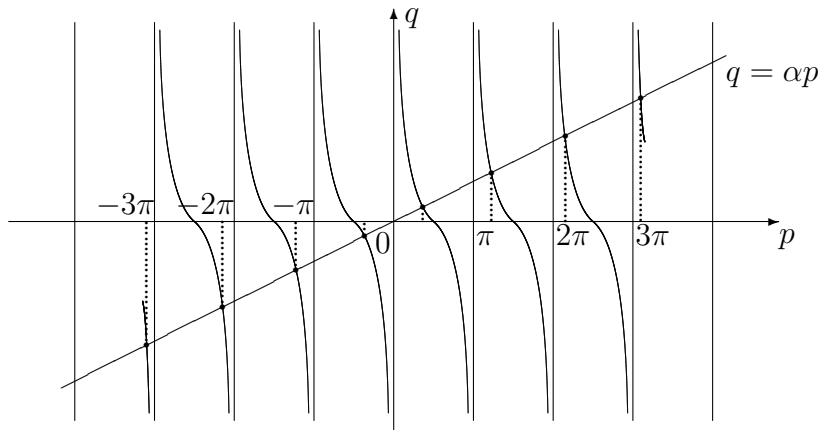


рис. 15

Существуют таблицы, дающие приближенные значения для корней p_n . Каждому p_n соответствует собственное значение $\lambda_n = \frac{p_n}{l}$. Если $\lambda_n < 0$, то соответствующее решение $u_n(x, t) = T_n(t) \hat{X}_n(x)$ будет неограниченно расти при $t \rightarrow \infty$. В физических задачах такая ситуация невозможна, поэтому следует рассматривать только положительные среди чисел λ_n . Поэтому в дальнейшем будем считать, что $\lambda_n > 0$, $n = 1, 2, \dots$

В результате получаем набор собственных значений λ_n и соответствующие собственные функции

$$\hat{X}_n(x) = \cos \lambda_n x.$$

Для $T_n(t)$ имеем уравнение, совпадающее с (24.7) при $\lambda = \lambda_n$, поэтому метод Фурье приводит к следующему виду решения рассматриваемой краевой задачи:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n e^{-(\lambda_n a)^2 t} \cos \lambda_n x. \quad (25.24)$$

Коэффициенты d_n определяются с помощью начального условия

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \cos \lambda_n x = \varphi(x). \quad (25.25)$$

Можно доказать, что функции $\cos \lambda_n x$, $n = 1, 2, \dots$, на отрезке $[0, l]$ образуют полную ортогональную систему. Поэтому функцию $\varphi(x)$ можно разложить в ряд по этой системе (как и выше, для обеспечения законности всех операций, производимых при применении метода Фурье, на функцию $\varphi(x)$ нужно наложить дополнительные ограничения типа гладкости). Коэффициенты d_n находятся по общим формулам Фурье для произвольных ортогональных систем

$$d_n = \frac{\int_0^l \varphi(x) \cos \lambda_n x \, dx}{\int_0^l \cos^2 \lambda_n x \, dx}. \quad (25.26)$$

Подставив (25.26) в (25.24), получим решение поставленной краевой задачи. Аналогично решаются и другие краевые задачи, включающие граничные условия III рода.

Содержание

ГЛАВА 4. Уравнения параболического типа	1
§ 20. Уравнение распространения тепла в стержне	1
§ 21. Начальные и граничные условия. Краевые задачи	3
§ 22. Трехмерное уравнение теплопроводности	6
§ 23. Уравнение диффузии. Метод математического моделирования	9
§ 24. Одномерное однородное уравнение теплопроводности. Метод Фурье	11
§ 25. Одномерное уравнение теплопроводности (общий случай)	15