

Министерство высшего и среднего специального образования
РСФСР

Московский авиационный технологический институт
им. К.Э. Циолковского

Кафедра “Высшая математика”

В.М. Асеев, В.В. Горбацевич, К.Ю. Осипенко

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ ПО КУРСУ
“УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ”

Часть 5

УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Москва – 1984

ГЛАВА 4

Уравнения параболического типа (продолжение)

§ 26. Решение уравнения теплопроводности для полубесконечного стержня

Понятие полубесконечного стержня возникает, когда влиянием тепловых процессов на одном из концов стержня на распространение тепла в изучаемом участке стержня можно пренебречь. Например, пусть изучается распространение тепла в цилиндрической оболочке летательного аппарата, которая подверглась кратковременному, но интенсивному нагреву на одном из торцов. В течение некоторого времени по всей оболочке влияние нагрева распространиться еще не успеет, поэтому ее можно будет рассматривать как полубесконечную.

Рассмотрим стержень, расположенный вдоль оси Ox на полубесконечном промежутке $(0, +\infty)$.

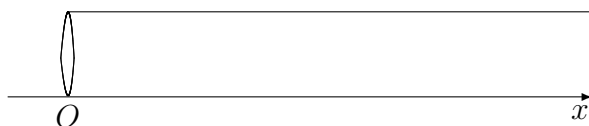


рис. 16

Задавая на левом (“конечном”) конце стержня различные граничные условия, будем получать (в сочетании с начальным условием) различные краевые задачи для одномерного уравнения теплопроводности, описывающего распространение тепла в полубесконечном стержне. Рассмотрим решение одной из таких задач.

Пусть нужно найти решение однородного уравнения теплопроводности для полубесконечного стержня

$$\begin{aligned} u_t &= a^2 u_{xx}, \\ 0 \leq t < \infty, \quad 0 \leq x < \infty, \end{aligned} \tag{26.1}$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u(x, 0) = T_0, \quad 0 \leq x < \infty, \tag{26.2}$$

указывающему, что в начальный момент времени $t_0 = 0$ во всех точках стержня имеем постоянную температуру T_0 , и граничному

условию I рода

$$u(0, t) = \mu(t). \quad (26.3)$$

Пренебрегая тепловыми процессами в правом, “бесконечно удаленном” конце стержня (т.е. при $x \rightarrow +\infty$), мы можем считать, что этот конец теплоизолирован, что приводит к еще одному граничному условию

$$u_x(\infty, t) = 0, \quad (26.4)$$

которое означает, что $\lim_{x \rightarrow \infty} u_x(x, t) = 0$.

Для решения поставленной краевой задачи применим метод операционного исчисления, основанный на преобразовании Лапласа. Напомним, что преобразование Лапласа для функции $f(t)$, определенной при $t \geq 0$, задается следующим образом:

$$L(f(t)) = F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt, \quad (26.5)$$

здесь p — комплексная переменная. Несобственный интеграл в (26.5) сходится, если функция $f(t)$ кусочно-непрерывна и удовлетворяет некоторому условию на рост ее модуля при $t \rightarrow \infty$ (такие функции $f(t)$ называют оригиналами, а $F(p)$ называется образом или изображением для $f(t)$). Мы будем использовать здесь обычные свойства преобразования Лапласа (линейность, теорему о свертке, формулу для изображения производной и т.п.).

Прежде всего заметим, что заменяя $u(x, t)$ на $v(x, t) = u(x, t) - T_0$, мы сводим задачу к случаю нулевого начального условия. Поэтому просто будем теперь предполагать, что $T_0 = 0$, т.е. вместо (26.2) рассмотрим следующее начальное условие:

$$u(x, 0) = 0. \quad (26.6)$$

Обозначим через $U(x, p)$ результат применения преобразования Лапласа к $u(x, t)$, рассматриваемой как функция одной только переменной t (переменная x при этом рассматривается как параметр). Мы будем предполагать, что $u(x, t)$ удовлетворяет всем условиям, накладываемым на функции-оригиналы. Применим теперь преобразование Лапласа к уравнению (26.1).

Используя формулу для образа производной, получим следующее выражение для образа функции u_t при преобразовании Лапласа:

$$L(u_t) = p \cdot U(x, p) - u(x, 0) = p \cdot U(x, p). \quad (26.7)$$

Образом функции u_{xx} при преобразовании Лапласа будет U_{xx} , поэтому уравнение (26.1) преобразуется в следующее:

$$p \cdot U(x, p) = a^2 U_{xx}(x, p). \quad (26.8)$$

Относительно переменной x уравнение (26.8) является однородным обыкновенным дифференциальным линейным уравнением, причем 2-го порядка и с постоянными коэффициентами. Общее

решение этого уравнения имеет вид

$$U(x, p) = C_1 e^{\frac{\sqrt{p}}{a}x} + C_2 e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}, \quad (26.9)$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные. При преобразовании Лапласа комплексная переменная p выбирается так, чтобы $s = \operatorname{Re} p$ — ее вещественная часть — была положительна. В выражении \sqrt{p} полагаем, что $\operatorname{Re} \sqrt{p} > 0$, а для $-\sqrt{p}$ считаем, что $\operatorname{Re}(-\sqrt{p}) < 0$. Для определения C_1 и C_2 используем граничные условия.

Применяя преобразование Лапласа к (26.4), получим

$$U_x(\infty, p) = 0, \quad (26.10)$$

где $U_x(\infty, p) = \lim_{x \rightarrow \infty} U_x(x, p)$ (мы не будем останавливаться на обосновании законности совершаемых предельных переходов и других операций над несобственными интегралами, связанными с преобразованием Лапласа). Имеем из (26.9)

$$U_x(x, p) = C_1 \frac{\sqrt{p}}{a} e^{\frac{\sqrt{p}}{a}x} + C_2 \left(-\frac{\sqrt{p}}{a} \right) e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}.$$

Так как $\operatorname{Re} \sqrt{p} > 0$, то ясно, что равенство $\lim_{x \rightarrow \infty} U_x(x, p) = 0$ возможно тогда и только тогда, когда $C_1 = 0$. Другими словами, граничное условие (26.10) дает

$$C_1 = 0.$$

Применим теперь преобразование Лапласа к (26.3). Обозначим через $M(p)$ образ $\mu(t)$ при преобразовании Лапласа, тогда из граничного условия (26.3) получим следующее условие:

$$U(0, p) = M(p).$$

Полагая $x = 0$ в (26.9), приходим к соотношению

$$C_2 = M(p).$$

В результате получаем такое выражение для $U(x, p)$:

$$U(x, p) = M(p) e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}. \quad (26.11)$$

Мы получили явное выражение для функции, являющейся образом решения $u(x, t)$. Для нахождения $u(x, t)$ применим обратное преобразование Лапласа.

С помощью таблицы изображений и теоремы подобия без труда устанавливается, что прообразом функции $e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}$ является функция

$$L^{-1} \left(e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x} \right) = \frac{x}{2a\sqrt{\pi t^{3/2}}} e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}. \quad (26.12)$$

Правая часть равенства (26.11) представлена в виде произведения двух функций, прообразы которых известны (для $M(p)$ это,

конечно, $\mu(t)$). В силу теоремы о свертке прообразом их произведения служит свертка их прообразов. Поэтому получаем:

$$u(x, t) = \frac{x}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\mu(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} d\tau. \quad (26.13)$$

Иногда удобна и другая форма записи этого решения:

$$u(x, t) = \frac{x}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\mu(t-\tau)}{\tau^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4a^2\tau}} d\tau.$$

Покажем теперь, как решить рассматриваемую краевую задачу и при граничном условии (26.2), т.е. не предполагая, что $T_0 = 0$. Для этого, как уже отмечалось выше нужно ввести новую функцию

$$v(x, t) = u(x, t) - T_0.$$

Функция $v(x, t)$ тоже удовлетворяет уравнению (26.1), но для нее начальное условие будет нулевым:

$$u(x, 0) = 0,$$

а граничные условия будут иметь вид

$$\begin{cases} v(0, t) = \mu(t) - T_0, \\ v_x(\infty, 0) = 0. \end{cases}$$

Применяя к этой краевой задаче для $v(x, t)$ процесс решения, описанный выше, получим следующее выражение для функции $V(x, p)$, являющейся результатом применения к $v(x, t)$ преобразования Лапласа по переменной t :

$$V(x, p) = \left(M(p) - \frac{T_0}{p} \right) e^{-\frac{\sqrt{p}}{a} x}. \quad (26.14)$$

Из таблицы изображений и теоремы подобия следует, что функция $\frac{1}{p} e^{-\frac{\sqrt{p}}{a} x}$ является изображением функции

$$L^{-1} \left(\frac{1}{p} e^{-\frac{\sqrt{p}}{a} x} \right) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-\tau^2} d\tau = \text{Erf} \left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} \right), \quad (26.15)$$

где

$$\text{Erf}(t) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-\tau^2} d\tau$$

является функцией ошибок (такое название связано с ее использованием в теории вероятностей).

С помощью (26.12) и (26.15) из (26.14) получаем, что

$$v(x, t) = \frac{x}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\mu(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} d\tau - T_0 \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-\tau^2} d\tau \right).$$

В результате для решения $u(x, t) = v(x, t) + T_0$ поставленной краевой задачи получаем:

$$u(x, t) = \frac{x}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\mu(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} d\tau + \frac{2T_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-\tau^2} d\tau. \quad (26.16)$$

Пример 26.1. Найти решение следующей краевой задачи для полубесконечного стержня:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \\ u(x, 0) = T_0, \\ u(0, t) = T_1. \end{cases}$$

Здесь T_0 и T_1 — заданные постоянные величины. Как обычно, добавляется граничное условие

$$u_x(\infty, t) = 0.$$

Явное выражение для решения этой задачи можно получить из (26.16), подставив $\mu(t) = T_1$. Однако полученное выражение будет довольно громоздким и неудобным для практических приложений. Поэтому мы используем выражение (26.14), получившееся в процессе решения. Так как изображением функции $\mu = T_1$ будет $\frac{T_1}{p}$, то в рассматриваемом нами случае получаем

$$V(x, p) = \frac{T_1 - T_0}{p} e^{-\frac{\sqrt{p}}{a} x}.$$

Применяя теперь (26.15), получим

$$v(x, t) = (T_1 - T_0) \operatorname{Erf} \left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} \right).$$

Отсюда получаем простое выражение для решения нашей задачи

$$u(x, t) = T_0 + (T_1 - T_0) \operatorname{Erf} \left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} \right).$$

Отметим, что полученное таким способом решение будет, конечно, совпадать (после некоторых преобразований) с полученным из общей формулы (26.16).

Рассмотрим теперь уравнение теплопроводности в случае бесконечного стержня. К рассмотрению бесконечного стержня приводят задачи, в которых можно пренебречь влиянием тепловых процессов на обоих концах стержня (т.е. не учитывать влияние окружающей стержень среды). Соответствующая задача формулируется обычно следующим образом.

Найти решение уравнения

$$u_t = a^2 u_{xx}$$

при $t \geq 0$, $-\infty < x < +\infty$, удовлетворяющее начальному условию

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad (-\infty < x < +\infty).$$

Решение такой задачи во многом аналогично решению краевой задачи для полубесконечного стержня, приведенному выше. Основным отличием здесь является то, что вместо преобразования Лапласа по переменной t в данном случае оказывается более удобным применить преобразование Фурье по переменной x . Последующие вычисления довольно сходны с приведенными выше. Решение рассматриваемой задачи для бесконечного стержня получается таким:

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi.$$

Задача 26.1. Решить следующую задачу для бесконечного стержня:

$$\begin{aligned} u_t &= a^2 u_{xx}, \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \end{aligned}$$

где

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{h_0}{\varepsilon}, & \text{при } 0 \leq x \leq \varepsilon, \\ 0, & \text{при } x < 0 \text{ или } x > \varepsilon. \end{cases}$$

Выразить полученное решение через функцию $\text{Erf}(z)$. Это решение описывает распределение температуры в стержне при наличии “теплового заряда”, расположенного на участке $[0, \varepsilon]$.

§ 27. Двумерное уравнение теплопроводности. Решение для случая прямоугольной области

Рассмотрим двумерное уравнение теплопроводности

$$u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}), \quad (27.1)$$

описываемое распределение температуры $u(x, y, t)$ в некоторой плоской области D . К такому уравнению сводится уравнение теплопроводности в пространственном случае, когда оказывается, что температура точек пространственного тела не зависит от одной из декартовых координат (скажем, от z). Начальное условие для уравнения (27.1) имеет вид

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y). \quad (27.2)$$

Оно задает температуру точек области в начальный момент времени t_0 . Среди множества возможных граничных условий мы рассмотрим здесь лишь граничное условие I рода

$$u|_{(x,y) \in \Gamma} = \mu(x, y, t), \quad (27.3)$$

задающее закон изменения температуры на кривой Γ , являющейся границей области D . В случае, если область D имеет достаточно

простую форму, краевую задачу (27.2), (27.3) для уравнения (27.1) иногда удастся решить в аналитической форме. Рассмотрим случай, когда область D является прямоугольником со сторонами l и m .

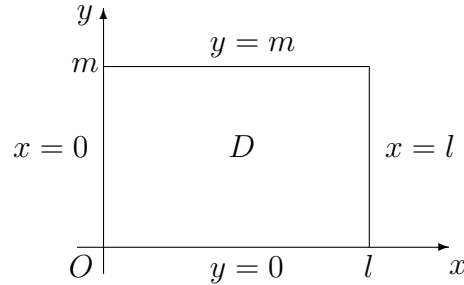


рис. 17

В этом случае для решения указанной выше краевой задачи снова можно применить метод Фурье. Соответствующие рассуждения и вычисления во многом аналогичны приведенным в § 17 при решении задачи о колебаниях прямоугольной мембраны. Поэтому здесь мы будем пропускать некоторые детали, отсылая за подробностями к § 17.

Вместе с уравнением (27.1) и начальным условием (27.2) рассмотрим следующие (нулевые) граничные условия

$$\begin{cases} u(0, y, t) = u(l, y, t) = 0, \\ u(x, 0, t) = u(x, m, t) = 0, \end{cases} \quad (27.4)$$

которые соответствуют (27.3) при $\mu = 0$.

Как обычно в методе Фурье, решение будем искать в виде

$$u(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t).$$

Подставляя это выражение в (27.1) и разделяя переменные, получим

$$\frac{1}{a^2} \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \omega.$$

Как и в § 17, показывается, что величина ω не зависит от x , y , t , т.е. является постоянной. Полагая

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda; \quad \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \mu, \quad \lambda + \mu = \omega \quad (\lambda, \mu = \text{const}),$$

получим следующие обыкновенные дифференциальные уравнения

$$T' + \omega a^2 T = 0, \quad (27.5)$$

$$X'' + \lambda X = 0, \quad (27.6)$$

$$Y'' + \mu Y = 0. \quad (27.7)$$

Как и для случая уравнения колебаний в § 17, граничные условия (23.4) приводят к следующим граничным условиям для X и Y :

$$\begin{cases} X(0) = X(l) = 0, \\ Y(0) = Y(m) = 0. \end{cases} \quad (27.8)$$

Уравнения (27.6), (27.7) с граничными (27.8) подробно рассматривались в § 13 (см. также § 17). Здесь получаем следующие решения

$$X_n(x) = \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (27.9)$$

$$Y_k(y) = \sin \frac{\pi k}{m} y, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (27.10)$$

которые соответствуют собственным значениям

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2, \\ \mu &= \mu_k = \left(\frac{\pi k}{m} \right)^2. \end{aligned}$$

При этом имеем

$$\omega = \lambda_n + \mu_k = \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 + \left(\frac{\pi k}{m} \right)^2,$$

обозначим $\lambda_n + \mu_k$ через $\omega_{n,k}^2$. При $\omega = \omega_{n,k}^2$ общее решение уравнения (27.5) имеет вид

$$T_{n,k}(t) = B_{n,k} e^{-(\omega_{n,k})^2 t},$$

где $B_{n,k}$ — произвольные постоянные, $n, k = 1, 2, 3, \dots$. Функция

$$u_{n,k}(x, y, t) = X_n(x) Y_k(y) T_{n,k}(t)$$

удовлетворяет уравнению (27.1) и нулевым граничным условиям (27.8). Рассмотрим теперь следующий ряд

$$u(x, y, t) = \sum_{n,k=1}^{\infty} u_{n,k}(x, y, t) = \sum_{n,k=1}^{\infty} B_{n,k} e^{-(\omega_{n,k})^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi k}{m} y. \quad (27.11)$$

Функция $u(x, y, t)$ удовлетворяет уравнению (27.1) (при некоторых ограничениях на $B_{n,k}$, на которых мы останавливаться не будем). Удовлетворяет она и условиям (27.8). Подберем коэффициенты $B_{n,k}$ так, чтобы удовлетворялось и начальное условие (27.2). При $t = 0$ имеем

$$u(x, y, 0) = \sum_{n,k=1}^{\infty} B_{n,k} \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi k}{m} y = \varphi(x, y). \quad (27.12)$$

Следовательно числа $B_{n,k}$ являются коэффициентами разложения функции $\varphi(x, y)$ в двойной ряд Фурье. Поэтому

$$B_{n,k} = \frac{4}{lm} \iint_D \varphi(x, y) \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi k}{m} y \, dx dy, \quad (27.13)$$

где двойной интеграл берется по прямоугольнику D ($x \in [0, l]$, $y \in [0, m]$). Подставив выражения (27.13) для $B_{n,k}$ в (27.12), получим решение заданной краевой задачи.

Задача 27.1. (для самостоятельного решения). Решить следующую краевую задачу

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u_{yy}, \\ u(x, y, 0) = u_0 = \text{const}, \\ u(0, y, t) = u(\pi, y, t) = 0, \\ u(x, 0, t) = u(x, \pi, t) = 0. \end{cases}$$

§ 28. Двумерное уравнение теплопроводности. Решение для случая круговой области

Рассмотрим теперь задачу о распространении тепла в случае, когда плоская область D является кругом. К такого рода задачам часто сводится задача о распространении тепла в цилиндрической области пространства. Будем искать решение уравнения (27.1) при начальном условии $u(x, y, 0) = \alpha(x, y)$ и нулевом граничном условии

$$u|_{\Gamma} = 0,$$

где кривая Γ — это окружность (радиуса r_0 , см. рис. 18).

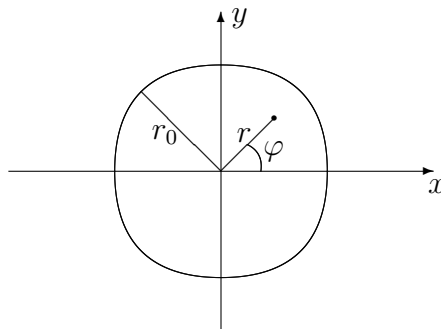


рис. 18

При решении удобно перейти к полярной системе координат (см. § 19, где аналогичным методом решается задача о колебании круглой мембраны).

В полярной системе координат уравнение (27.1) принимает вид (см. § 19):

$$u_t = a^2 \left(u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi} \right). \quad (28.1)$$

Начальное условие преобразуется так:

$$u(r, \varphi, 0) = A(r, \varphi), \quad (28.2)$$

где $A(r, \varphi) = \alpha(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$.

Граничное условие имеет вид

$$u(r_0, \varphi, t) = 0. \quad (28.3)$$

Как и в § 19, для решения такой задачи применим метод Фурье. Решения уравнения (28.1), удовлетворяющие граничному условию (28.3), будем искать в виде

$$u(r, \varphi, t) = R(r)\Phi(\varphi)T(t).$$

Подставляя это выражение в (28.1) и деля на $a^2 R\Phi T$, получим

$$\frac{1}{a^2} \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{R''(r)}{R(r)} + \frac{1}{r} \frac{R'(r)}{R(r)} + \frac{1}{r^2} \frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}.$$

Обозначим

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2} \frac{T'(t)}{T(t)} &= -\lambda, \\ \frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} &= -\mu. \end{aligned}$$

Как и при решении уравнения колебаний в § 19, показывается, что величины λ и μ являются постоянными (не зависят от r , φ , t). В результате получаем следующие обыкновенные дифференциальные уравнения

$$T' + \lambda a^2 T = 0, \quad (28.4)$$

$$\Phi'' + \mu \Phi = 0, \quad (28.5)$$

$$R'' + \frac{1}{r} R' + (\lambda r^2 - \mu) R = 0. \quad (28.6)$$

Граничное условие (28.3) дает

$$R(r_0) = 0. \quad (28.7)$$

Уравнение (28.6) совпадает с уравнением (19.6), а условие (28.7) — с граничным условием (19.9). Поэтому мы можем воспользоваться результатом, уже полученным в § 19. А именно, получаем

$$R(r) = R_{n,m}(r) = J_n \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r \right). \quad (28.8)$$

Здесь J_n — это функции Бесселя ($n = 0, 1, \dots$), а $\mu_m^{(n)}$ — нули этих функций ($m = 1, 2, \dots$), т.е. $J_n(\mu_m^{(n)}) = 0$. Решения $R_{n,m}(r)$ соответствуют собственным значениям

$$\lambda = \lambda_{n,m} = \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} \right)^2. \quad (28.9)$$

Рассмотрим теперь уравнение (28.4). При $\lambda = \lambda_{n,m}$ его решения имеют вид

$$T_{n,m}(t) = c_{n,m} e^{-\left(\frac{a\mu_m^{(n)}}{r_0} \right)^2 t}. \quad (28.10)$$

Перейдем к уравнению (28.5). Так как функция $\Phi(\varphi)$ должна быть периодична с периодом 2π (по смыслу задачи), то, как легко понять, должно быть $\mu = n^2$ при некотором натуральном n . При таком μ общее решение уравнения (28.5) будет таково:

$$\Phi_n(\varphi) = \alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi. \quad (28.11)$$

Принимая во внимание полученные выражения для $R(r)$ (28.8), $T(t)$ (28.10) и $\Phi(\varphi)$ (28.11), решение поставленной краевой задачи для круга будем искать в виде следующего ряда

$$u(r, \varphi, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{a\mu_m^{(n)}}{r_0} \right)^2 t} [a_{n,m} \cos n\varphi + b_{n,m} \sin n\varphi] J_n \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r \right). \quad (28.12)$$

Функция $u(r, \varphi, t)$ удовлетворяет уравнению (28.1) граничным условиям (28.3). Начальное условие (28.2) приводит к равенству

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} [a_{n,m} \cos n\varphi + b_{n,m} \sin n\varphi] J_n \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r \right) = A(r, \varphi).$$

Отсюда, как и в § 19 при решении уравнения колебаний для круга, получаем следующее выражение для коэффициентов $a_{n,m}$, $b_{n,m}$ (см. (19.13))

$$a_{n,m} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} A(r, \varphi) J_n \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r \right) \cos n\varphi \, dr d\varphi}{\pi \varepsilon_n \|J_n\|^2},$$

$$b_{n,m} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} A(r, \varphi) J_n \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r \right) \sin n\varphi \, dr d\varphi}{\pi \varepsilon_n \|J_n\|^2}.$$

Здесь

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 2, & \text{при } n = 0, \\ 1, & \text{при } n > 0. \end{cases}$$

Через $\|J_n\|$ обозначается норма функции J_n , она может быть вычислена по формуле (18.6):

$$\|J_n\|^2 = \frac{r_0}{2} [J'_n(\mu_m^{(n)})]^2.$$

В заключение рассмотрим один частный случай. Предположим, что начальная температура $A(r, \varphi)$ зависит только от r (т.е., как говорят, обладает круговой симметрией). Тогда двойной ряд в (28.12) заменяется одинарным и решение сильно упрощается:

$$u(r, t) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m J_0 \left(\frac{\mu_m^{(0)}}{r_0} r \right) e^{-\left(\frac{a\mu_m^{(0)}}{r_0} \right)^2 t},$$

где $\mu_m^{(0)}$ — m -й корень функции Бесселя J_0 нулевого порядка. Выражение для коэффициентов c_m принимает вид

$$c_m = \frac{2 \int_0^{r_0} A(\rho) J_0 \left(\frac{\mu_m^{(0)}}{r_0} \rho \right) \rho d\rho}{r_0^2 [J_1(\mu_m^{(0)})]^2}.$$

§ 29. О решении трехмерного уравнения теплопроводности

Рассмотрим задачу распространения тепла в пространстве. Трехмерное уравнение теплопроводности имеет вид

$$u_t = a^2 \Delta u, \quad (29.1)$$

где $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$ (Δ — трехмерный оператор Лапласа).

Предположим, что изучается распределение температуры $u(x, y, z, t)$ в точках некоторого ограниченного тела V . Начальное условие обычно имеет вид

$$u(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z). \quad (29.2)$$

Пусть S — это поверхность, являющаяся границей тела V . Задавая на S различного рода граничные условия, будем получать различные краевые задачи для уравнения (29.1) (см. § 22).

Если область V имеет достаточно простую форму, то иногда поставленную краевую задачу удастся решить в аналитической форме. Например, если V это прямоугольный параллелепипед, то можно тем же методом, что в § 27, решить I краевую задачу. Решение будет представляться в виде тройного ряда Фурье, при нахождении этого решения никаких принципиальных трудностей (по сравнению с § 27) не возникает. Для параллелепипеда можно решить и II краевую задачу, а иногда и III краевую задачу (обобщая метод, примененный в § 25 для решения такой задачи в случае одномерного уравнения теплопроводности).

Пусть теперь область V является шаром. В этом случае I краевая задача для (29.1) тоже допускает аналитическое решение. При этом оказывается необходимым использовать так называемые сферические функции. Эти функции аналогичны функциям Бесселя (иначе называемым цилиндрическими), но определяются более сложным образом. Существенным моментом в этом случае оказывается переход к сферической системе координат. Сферические координаты r , φ и θ (см. рис. 19) связаны с декартовыми следующими соотношениями

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi, \\ y = r \sin \theta \sin \varphi, \\ z = r \cos \theta, \\ r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \end{cases} \quad (29.3)$$

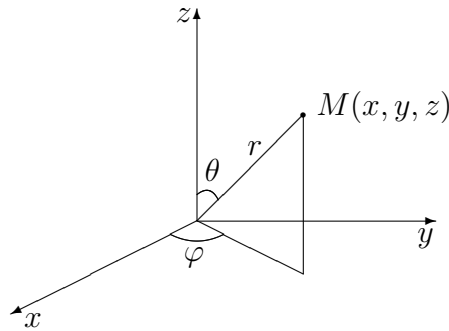


рис. 19

По аналогии с тем, как это было сделано в § 19 для двумерного оператора Лапласа, можно выразить в сферических координатах и трехмерный оператор Лапласа Δ . Получается следующее выражение

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right)_{\theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}. \quad (29.4)$$

Мы не будем приводить здесь решение I краевой задачи для шара в общем случае в силу его громоздкости. Рассмотрим только один частный случай (весьма важный для приложений). А именно, пусть граничное значение имеет вид

$$u|_S = 0,$$

где S — сфера радиуса R (граница шара V), а в начальном условии (29.2), переписанном в сферической системе координат:

$$u(r, \varphi, \theta, 0) = \alpha(r, \varphi, \theta)$$

функция $\alpha(r, \varphi, \theta)$ не зависит от углов φ и θ , т.е. $\alpha = \alpha(r)$ является функцией одного только r . В этом случае говорят, что функция

обладает сферической симметрией (в точках любой сферы $r = r_0$ ее значение постоянно). Если начальное распределение температуры $\alpha(r)$ обладает сферической симметрией, то очевидно, и в последующие моменты времени температура $u(r, \varphi, \theta, t)$ точек шара тоже не будет зависеть от φ и θ . В этом случае получаем $u = u(r, t)$, уравнение (29.1) в силу выражения (29.4) принимает вид

$$u_t = \frac{a^2}{r^2} (r^2 u_r)_r$$

или

$$u_t = a^2 \left(u_{rr} + \frac{2}{r} u_r \right). \quad (29.5)$$

Начальное условие имеет вид

$$u(r, 0) = \alpha(r), \quad (29.6)$$

а граничное:

$$u(R, t) = 0. \quad (29.7)$$

Отметим, что более общее граничное условие

$$u(R, t) = u_0$$

можно свести к виду (29.7) введением новой функции $\hat{u}(r, t) = u(r, t) - u_0$. Поэтому мы ограничимся рассмотрением граничного условия (29.7). Оказывается, что краевую задачу (29.6), (29.7) для уравнения (29.5) можно решить, сведя ее к I краевой задаче для одномерного уравнения теплопроводности. Для этого введем следующую вспомогательную функцию

$$v(r, t) = ru(r, t). \quad (29.8)$$

Ясно, что $v_t = ru_t$. Далее, имеем

$$v_{rr} = 2u_r + ru_{rr} = r \left(u_{rr} + \frac{2}{r} u_r \right).$$

Сравнивая эти выражения с правой частью уравнения (29.5), приходим к соотношению

$$\frac{1}{r} v_t = \frac{a^2}{r} v_{rr},$$

из которого получаем уравнение

$$v_t = a^2 v_{rr}, \quad (29.9)$$

по форме совпадающее с одномерным уравнением теплопроводности (см. § 20). Из (29.8) вытекает, что для функции $v(r, t)$ начальное условие имеет вид

$$v(r, 0) = r\alpha(r). \quad (29.10)$$

Из (29.7) получаем граничное условие

$$v(R, t) = 0. \quad (29.11)$$

Подставляя $r = 0$ в (29.8), получаем еще одно граничное условие

$$v(0, t) = 0. \quad (29.12)$$

Получаем I краевую задачу (29.10), (29.11), (29.12) для уравнения (29.9). Решение такой задачи было подробно рассмотрено в § 24. В результате получаем в силу (24.13) и (24.15)

$$v(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\left(\frac{\pi n}{R}\right)^2 t} \sin \frac{\pi n}{R} r,$$

где

$$B_n = \frac{2}{R} \int_0^R r \alpha(r) \sin \frac{\pi n}{R} r \, dr.$$

Таким образом, функция

$$u(r, t) = \frac{1}{r} v(r, t)$$

является решением поставленной краевой задачи для шара (при условии сферической симметрии начального распределения температур).

Содержание

ГЛАВА 4. Уравнения параболического типа (продолжение)	1
§ 26. Решение уравнения теплопроводности для полубесконечного стержня	1
§ 27. Двумерное уравнение теплопроводности. Решение для случая прямоугольной области	6
§ 28. Двумерное уравнение теплопроводности. Решение для случая круговой области	9
§ 29. О решении трехмерного уравнения теплопроводности	12