О ПОПЕРЕЧНИКАХ КЛАССА ХАРДИ H_2 В n-МЕРНОМ ШАРЕ

К. Ю. ОСИПЕНКО, М. И. СТЕСИН

Пусть B_n — единичный шар пространства $\mathbb{C}^n$: $B_n = \left\{ z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n : |z|^2 = \sum_{k=1}^{n} |z_k|^2 < 1 \right\}$. Целью настоящей работы является вычисление точных значений гельфандовских и линейных N-поперечников единичного шара гильбертова пространства H_2, который обозначим BH_2, в метрике $L_{\infty,r}$, определяемой равенством $\|f\|_{\infty,r} = \sup\limits_{|z|=r} |f(z)|$. Ряд точных значений N-поперечников классов Харди H_p в интегральных q-метриках можно найти в работах [1–4], однако все они относятся к случаю $p \geq q$ и $n = 1$, кроме [5], где $n \geq 1$, а $p = q$.

Для подмножества A нормированного пространства X обозначим через $d^N(A, X)$ и $\lambda_N(A, X)$ гельфандовский и линейный N-поперечники множества A соответственно. Имеет место очевидное соотношение (см. [1]):

$$d^N(A, X) \leq \lambda_N(A, X). \tag{1}$$

Положим $N_k = \sum_{l=0}^{k-1} \binom{n+l-1}{n-1}$, $N_0 = 0$. Число N_k равно размерности пространства полиномов от n переменных степени $k - 1$.

Теорема. *При всех $k \geq 0$ имеют место равенства*

$$d^{N_k}(BH_2(B_n), L_{\infty,r}) = \lambda_{N_k}(BH_2(B_n), L_{\infty,r}) = \sqrt{\frac{1}{(1-r^2)^n} - \sum_{l=0}^{k-1} \binom{n+l-1}{n-1} r^{2l}}.$$

Доказательство теоремы опирается на следующие леммы.

Лемма 1. *Пусть $f \in BH_2(B_n)$, $w \in B_n$ и $f = \sum_{s=0}^{\infty} F_s$ — однородное разложение f. Тогда*

$$\left| f(w) - \sum_{s=0}^{m} F_s(w) \right| \leq \sqrt{(1-|w|^2)^{-n} - \sum_{l=0}^{m} \binom{n+l-1}{n-1} |w|^{2l}}.$$

Доказательство этой леммы основано на следующем представлении:

$$f(w)-\sum_{s=0}^{m}F_s(w)=\int_{S^{2n-1}}K_m(w,z)f(z)\,d\sigma_n(z),$$

где

$$K_m(w,z)=(1-\langle w,z\rangle)^{-n}-\sum_{|p|\le m}\frac{(n+|p|-1)!}{(n-1)!p!}w^p\overline{z}^p.$$

σ_n — единичная положительная мера на сфере S^{2n-1}, инвариантная относительно ортогональной группы $O(2n)$.

Лемма 2. *Пусть* $m\in\mathbb{N}$, $N_k\le m<N_{k+1}$, $f_1,\dots,f_s$ — *ортонормированная система в* $H_2(B_n)$ *и* $0<r<1$. *Тогда*

$$\int_{S^{2n-1}}\sum_{l=1}^{m}|f_l(rz)|^2\,d\sigma_n(z)\le\sum_{l=0}^{k-1}\binom{n+l-1}{n-1}r^{2l}+(m-N_k)r^{2k}.$$

Доказательство. Заметим, что для функции $f\in H_2(B_n)$, однородное разложение которой имеет вид $f=\sum_{l=s}^{\infty}F_l$, справедливо неравенство

$$\int_{S^{2n-1}}|f(rz)|^2\,d\sigma_n(z)\le r^{2s}\|f\|_2^2. \tag{2}$$

Пусть U — унитарное преобразование $\mathbb{C}^m$, задаваемое матрицей $\|u_{kl}\|_{k,l=1}^m$. Положим $g_s=\sum_{l=1}^{m}u_{sl}f_l$. Система $\{g_1,\dots,g_m\}$ является ортонормированной в $H_2(B_n)$, и в силу унитарности U для любого $w\in B_n$ $\sum_{l=1}^{m}|g_l(w)|^2=\sum_{l=1}^{m}|f_l(w)|^2$. Следовательно,

$$\int_{S^{2n-1}}\sum_{l=1}^{m}|f_l(rz)|^2\,d\sigma_n(z)=\int_{S^{2n-1}}\sum_{l=1}^{m}|g_l(rz)|^2\,d\sigma_n(z).$$

Легко проверить, что преобразование U можно подобрать так, что для $N_q<l\le N_{q+1}$ ($q\le k$, $l\le m$) в однородном разложении g_l отсутствуют полиномы до порядка $q-1$ включительно. Теперь утверждение леммы следует из (2). $\square$

Доказательство теоремы. Вследствие (1) достаточно доказать, что

$$\lambda_{N_k}(BH_2(B_n), L_{\infty,r}) \le \sqrt{(1-r^2)^{-n} - \sum_{l=0}^{k-1} \binom{n+l-1}{n-1} r^{2l}},$$

$$d^{N_k}(BH_2(B_n), L_{\infty,r}) \ge \sqrt{(1-r^2)^{-n} - \sum_{l=0}^{k-1} \binom{n+l-1}{n-1} r^{2l}}.$$

Оценка сверху для $\lambda_{N_k}(BH_2(B_n), L_{\infty,r})$ непосредственно следует из леммы 1. Для доказательства нижней оценки рассмотрим L^{N_k} — подпространство $H_2(B_n)$ коразмерности N_k. Пусть $f_1, \ldots, f_{N_k}$ — ортонормированный базис в ортогональном дополнении $(L^{N_k})^\perp$. Заметим, что для любого $w \in B_n$ функция $h_w(z) = (1 - \langle z, w\rangle)^{-n} - \sum_{l=1}^{N_k} \overline{f_l(w)} f_l(z)$ принадлежит L^{N_k} и, следовательно,

$$\begin{aligned}\sup_{g \in BH_2(B_n) \cap L^{N_k}} \|g\|_{\infty,r} &\ge \sup_{|w|=r} \frac{\|h_w\|_{\infty,r}}{\|h_w\|_2} \ge \sup_{|w|=r} \frac{|h_w(w)|}{\|h_w\|_2} \\ &= \sup_{|w|=r} \sqrt{(1-r^2)^{-n} - \sum_{l=1}^{N_k} |f_l(w)|^2} \\ &= \sqrt{(1-r^2)^{-n} - \inf_{|w|=r} \sum_{l=1}^{N_k} |f_l(w)|^2}.\end{aligned}$$

В силу леммы 2 имеем

$$\inf_{|w|=r} \sum_{l=1}^{N_k} |f_l(w)|^2 \le \int_{S^{2n-1}} \sum_{l=1}^{N_k} |f_l(rw)|^2 \, d\sigma_n(w) \le \sum_{l=0}^{k-1} \binom{n+l-1}{n-1} r^{2l}.$$

Таким образом, для любого подпространства L^{N_k}

$$\sup_{g \in BH_2(B_n) \cap L^{N_k}} \|g\|_{\infty,r} \ge \sqrt{(1-r^2)^{-n} - \sum_{l=0}^{k-1} \binom{n+l-1}{n-1} r^{2l}}.$$

Теорема доказана. $\square$

Так как при $n = 1$ $N_k = k$, то имеет место

Следствие. *При $n = 1$ для любого $k \ge 0$ справедливы равенства*

$$d^k(BH_2, L_{infty,r}) = \lambda_k(BH_2, L_{infty,r}) = \frac{r^k}{\sqrt{1-r^2}}.$$

[1] Т и х о м и р о в В. М. // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 14 (Итоги науки и техники. М.: ВИНИТИ, 1987.– С. 103–260. [2] P i n k u s A. n-widths in approximation theory.– Berlin: Springer, 1985. [3] П а р ф е н о в О. Г. // Мат. заметки.– 1985.– Т. 37, № 2.– С. 171–175. [4] F i s h e r S. D., M i c c h e l l i C. A. // Duke Math. J.– 1980.– V. 47, № 4,– P. 789–801. [5] Ф а р к о в Ю. А. // УМН.– 1990.– Т. 45, вып. 5– С. 197–198.

Московский авиационный
технологический институт
им. К. Э. Циолковского

Поступило в Правление общества
17 апреля 1990 г.