УДК 517.53

ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ НА КЛАССАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

К. Ю. ОСИПЕНКО

Настоящая статья является кратким обзором по оптимальному восстановлению аналитических функций. В ней излагаются некоторые постановки задач восстановления и их решения на примере восстановления некоторых линейных функционалов (значения функции или ее производной в фиксированной точке, интеграл от функции) на классах аналитических функций. В заключение мы приводим ряд нерешенных задач.

1. Постановки задач восстановления. В большой обзорной статье В. М. Тихомиров [1] пишет о нескольких этапах истории развития теории приближений. Первый этап — приближение индивидуальных функций посредством полиномов и рациональных дробей, второй — приближение классов функций посредством некоторого фиксированного метода (наилучшие полиномы, суммы Фурье, сплайны и т.д.) и, наконец, третий - когда заранее не фиксируется какой-нибудь метод, а среди всевозможных ищется тот, который минимизирует погрешность приближения. Задачи оптимального восстановления являются яркими представителями третьего этапа. Имеется ряд довольно подробных обзорных статей по этим задачам [2–6], а также монография [7]. Здесь мы приводим ряд новых результатов, полученных в последнее время, ограничиваясь при этом лишь задачами восстановления по точной информации на классах аналитических функций.

Приведем несколько самых распространенных примеров задач восстановления. Пусть задан некоторый класс функций W, определенных в области D, со значениями в множестве $K = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ и точки $t_0, t_1, \ldots, t_n \in D$. Требуется указать приближенное значение функции $f \in W$ в точке t_0 по информации о ее значениях $f(t_1), \ldots, f(t_n)$. Эта задача, называемая задачей об интерполяции, допускает много различных подходов. Можно приближать функцию интерполяционными полиномами Лагранжа, интерполяционными сплайнами, рациональными дробями и т.д.

Если подходить к этой задаче с точки зрения оптимального восстановления, то она формализуется следующим образом. В качестве методов восстановления рассматриваются всевозможные функции $S\colon D^n \to K$. Ищется величина

$$\inf_{S\colon D^n\to K}\sup_{f\in W}|f(t_0) - S(f(t_1), \ldots, f(t_n))|$$

и оптимальный метод восстановления, на котором достигается нижняя грань.

Другой широко распространенный пример задачи восстановления, когда вместо значения $f(t_0)$ восстанавливается значение $f'(t_0)$. Наконец, можно рассмотреть задачу восстановления величины $\int_a^b f(t)\,dt$, где $[a,b] \subset D$.

Рассмотрим теперь более общую задачу восстановления. Пусть X, Y — линейные пространства над полем $K = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, $W \subset X$ — некоторое множество, $L \in X'$ и $I\colon W \to Y$ — линейный оператор (в дальнейшем называемый операционным). Требуется восстановить значение линейного функционала L на множестве W по значениям информационного оператора I. Удобно воспользоваться следующей диаграммой:

$$\begin{tikzcd} X \supset W \arrow[rr, "L"] \arrow[dr, "I"'] & & K \\ & Y \arrow[ur, "S"'] & \end{tikzcd}$$

Положим

$$E(L,I,W) = \inf_{S\colon Y\to K} \sup_{f\in W} |Lf - S(If)|. \tag{1}$$

В рассмотренных ранее примерах $If = (f(t_1),\dots,f(t_n))$, т.е. $Y = K^n$, а $Lf = f(t_0)$, $f'(t_0)$ или $\int_a^b f(t)\,dt$.

Лемма. *Пусть множество W — центрально симметрично относительно нуля. Тогда*

$$E(L,I,W) \ge \sup_{\substack{f\in W\\ If=0}} |Lf|. \tag{2}$$

Доказательство. При всех $S\colon Y \to K$ и $f \in W$ таких, что $If = 0$, имеем

$$\begin{aligned} 2|Lf| = |Lf - S(0) - (L(-f) - S(0))| &\le |Lf - S(0)| + |L(-f) - S(0)| \\ &\le 2\sup_{f\in W} |Lf - S(If)|. \end{aligned}$$

Отсюда при всех $S\colon Y \to K$

$$\sup_{\substack{f\in W\\ If=0}} |Lf| \le \sup_{f\in W} |Lf - S(If)|.$$

Остается взять нижнюю грань по всевозможным методам S в правой части неравенства. Лемма доказана. $\square$

Для $If = (l_1 f, \dots, l_n f)$, где $l_i \in X'$, задача оптимального восстановления (1) была впервые сформулирована в диссертации С.А. Смоляка [8] в 1965 г. Им же было доказано, что в вещественном случае для выпуклого центрально симметричного относительно нуля множества W всегда существует линейный оптимальный метод восстановления и в (2) имеет место равенство. Элемент f_0, на котором достигается верхняя грань в правой части неравенства (2) будем называть в дальнейшем экстремальным.

Результат С.А. Смоляка уточнялся и обобщался многими авторами. В определенном смысле окончательная его форма (в виде критерия существования линейного оптимального метода) была получена в работе [9].

Рассмотрим теперь частный случай задачи (1). Пусть Ω — некоторое множество из $\mathbb{C}$, μ — неотрицательная мера на Ω и $L_p(\Omega, \mu)$ — пространство Лебега, т.е. множество функций, для которых

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(z)|^p \, d\mu(z) \right)^{1/p} < \infty \quad \text{при } 1 \le p < \infty,$$
$$\|f\|_\infty = \operatorname*{vraisup}_{z \in \Omega} |f(z)| < \infty \quad \text{при } p = \infty.$$

Пусть X_p — линейное подпространство $L_p(\Omega, \mu)$. Положим $BX_p = \{ f \in X_p : \|f\|_p \le 1 \}$ и рассмотрим задачу (1) для $X = X_p$ и $W = BX_p$. Заметим, что в этом случае можно считать информационный оператор I заданным на всем подпространстве X_p.

Следующая теорема в некоторых случаях позволяет довольно просто строить оптимальные методы и находить их погрешности.

Теорема 1 ([10])**.** *Пусть $g \in X_p$, $g \ne 0$ и $S_0 \in Y'$ таковы, что*

1) $Ig = 0$,

2) *при всех $f \in X_p$ имеет место равенство*

$$Lf - S_0(If) = \begin{cases} \alpha \displaystyle\int_\Omega \overline{g(z)} |g(z)|^{p-2} f(z) \, d\mu(z), & 1 \le p < \infty, \\ \displaystyle\int_\Omega \overline{g(z)} |\varphi(z)| f(z) \, d\mu(z), & p = \infty, \end{cases} \tag{3}$$

где $\alpha \in \mathbb{C}$, $\varphi \in L_1(\Omega, \mu)$ и при $p = \infty$ $g(z) \equiv 1$ почти всюду относительно меры μ. Тогда S_0 — оптимальный метод восстановления, $g_0 = g/\|g\|_p$ — экстремальная функция и

$$E(L, I, BX_p) = \sup_{\substack{f \in BX_p \\ If = 0}} |Lf| = |Lg_0| = \begin{cases} |\alpha| \|g\|_p^{p-2}, & 1 \le p < \infty, \\ \|\varphi\|_1, & p = \infty. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $1 \le p < \infty$. Используя (2), (3) и неравенство Гельдера, получим

$$(4) \quad |Lg_0| \le \sup_{\substack{f\in BX_p\\ If=0}} |Lf| \le E(L,I,BX_p) \le \sup_{f\in BX_p} |Lf - S_0(If)|$$
$$\le |\alpha| \int_\Omega |g(z)|^{p-1}|f(z)|\,d\mu(z) \le |\alpha| \left(\int_\Omega |g(z)|^p\,d\mu(z)\right)^{1/q}$$
$$= |\alpha|\|g\|_p^{p-1}.$$

Но из (3) $Lg = \alpha\|g\|_p^p$, т.е. $|Lg_0| = |\alpha|\|g\|_p^{p-1}$, что вместе с (4) доказывает утверждение теоремы для $1 \le p < \infty$. Случай $p = \infty$ доказывается по аналогичной схеме. Теорема доказана. □

2. Восстановление значений функций из пространства Харди. Положим $D = \{\, z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \,\}$. Пространством Харди H_p называется пространство аналитических в D функций, для которых

$$\|f\|_p = \sup_{0<r<1} \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p\,d\theta\right)^{1/p} < \infty, \qquad \text{при } 1 \le p < \infty,$$
$$\|f\|_\infty = \sup_{z\in D} |f(z)| < \infty, \qquad \text{при } p = \infty.$$

Хорошо известно, что функции из H_p имеют почти всюду граничные значения, которые обозначим через $f(e^{i\theta})$, причем $f(e^{i\theta}) \in L_p(\partial D,\mu)$, где $d\mu(e^{i\theta}) = \dfrac{d\theta}{2\pi}$ и в $|\xi| < 1$ имеет место формула Коши

$$f(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \frac{f(z)\,dz}{z-\xi}$$

(см., например, [11, стр. 388]). Тем самым пространство функций из H_p можно рассматривать как подпространство $L_p(\partial D,\mu)$.

Рассмотрим задачу (1) для $W = BH_p$, $Lf = f(\xi)$, $\xi \in D$ и $If = (f(z_1),\dots,f(z_n))$, $z_j \in D$. Положим

$$W(z) = \prod_{j=1}^n \frac{z-z_j}{1-\overline{z}_j z}.$$

Функция $W(z)$ называется произведением Бляшке. Нетрудно убедиться, что $|W(z)| \equiv 1$ при $z \in \partial D$ и, следовательно, $\overline{W(z)} = (W(z))^{-1}$ при всех $|z| = 1$. Обозначим через

$$\omega_j(z) = \prod_{\substack{k=1\\ k\ne j}}^n \frac{z-z_k}{1-\overline{z}_k z}.$$

Теорема 2. *При всех* $1 \le p \le \infty$ *метод*

$$f(\xi) \approx \sum_{j=1}^n \frac{\omega_j(\xi)}{\omega_j(z_j)} \frac{1-|z_j|^2}{1-\overline{z}_j\xi} \left(\frac{1-|\xi|^2}{1-z_j\overline{\xi}}\right)^{\frac{p-2}{p}} f(z_j)$$

является оптимальным методом восстановления, $g_0(z) = \dfrac{W(z)(1-|\xi|^2)^{1/p}}{(1-\overline{\xi}z)^{2/p}}$ *— экстремальная функция и*

$$E(L, I, BH_p) = |g_0(z)| = \frac{|W(\xi)|}{(1-|\xi|^2)^{1/p}}$$

(в случае $p = \infty$ *под выражениями с* p *понимаются их пределы при* $p \to \infty$*).*

Доказательство. Положим

$$g(z) = \frac{W(z)}{(1-\overline{\xi}z)^{2/p}}.$$

Пусть $1 \le p < \infty$. При всех $f \in H_p$, пользуясь теоремой Коши о вычетах, получаем

$$\begin{aligned}(5)\quad & W(\xi)(1-|\xi|^2)^{\frac{p-2}{p}} \int_{|z|=1} \overline{g(z)}|g(z)|^{p-2} f(z)\, d\mu(z) \\ &= W(\xi)(1-|\xi|^2)^{\frac{p-2}{p}} \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{f(z)\, dz}{W(z)(z-\xi)(1-\overline{\xi}z)^{\frac{p-2}{p}}} \\ &= f(\xi) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\omega_j(\xi)}{\omega_j(z_j)} \frac{1-|z_j|^2}{1-\overline{z}_j\xi} \left(\frac{1-|\xi|^2}{1-z_j\overline{\xi}}\right)^{\frac{p-2}{p}} f(z_j).\end{aligned}$$

Подставив в эти равенства $f(z) = g(z)$, будем иметь

$$W(\xi)(1-|\xi|^2)^{\frac{p-2}{p}} \|g\|_p^p = \frac{W(\xi)}{(1-|\xi|^2)^{1/p}}.$$

Тем самым

$$\|g\|_p = (1-|\xi|^2)^{-1/p}.$$

Теперь утверждение теоремы следует из теоремы 1. При $p = \infty$ схема доказательства остается та же, $p = \infty$а в качестве $\varphi(z)$ рассматривается функция $(1-\overline{\xi}z)^{-2}$. Теорема доказана. $\square$

Теорема 2 была получена в работах [12] ($p = \infty$) и [13] ($1 \le p < \infty$).

Мы рассматривали случай различных точек $z_j \in D$. Однако та же схема рассуждений распространяется и на случай, когда точки совпадают с некоторой кратностью. При этом, если $z_j = z_{j+1} = \ldots = z_{j+k}$, считается, что заданы значения $f(z_j), f'(z_j), \ldots, f^{(k)}(z_j)$.

Интересен один частный случай, когда $z_1 = \ldots = z_n = 0$ (восстановление по тейлоровской информации $f(0), f'(0), \ldots, f^{(n-1)}(0)$). Тогда аналогично равенству (5) доказывается равенство

$$\xi^n (1-|\xi|^2)^{\frac{p-2}{p}} \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{f(z)\, dz}{z^n(z-\xi)(1-\overline{\xi}z)^{\frac{p-2}{p}}} = f(\xi) - \sum_{j=0}^{n-1} c_j(\xi) f^{(j)}(0),$$

где

$$c_j(\xi)=\frac{\xi^n(1-|\xi|^2)^{\frac{p-2}{p}}}{j!(n-j-1)!}\frac{\partial^{n-j-1}}{\partial z^{n-j-1}}\left(\frac{1}{(\xi-z)(1-\overline{\xi}z)^{\frac{p-2}{p}}}\right)\Big|_{z=0}.$$

В частности, оптимальные методы восстановления имеют вид при $p=\infty$

$$f(\xi)\approx\sum_{j=0}^{n-1}\frac{\xi^j}{j!}(1-|\xi|^{(n-j)})f^{(j)}(0),$$

при $p=2$

$$f(\xi)\approx\sum_{j=0}^{n-1}\frac{\xi^j}{j!}f^{(j)}(0),$$

при $p=1$

$$f(\xi)\approx\sum_{j=0}^{n-2}\frac{\xi^j}{j!}f^{(j)}(0)+\frac{\xi^{n-1}}{(n-1)!}\frac{1}{1-|\xi|^2}f^{(n-1)}(0).$$

При этом для всех $1\le p\le\infty$

$$E(L,I,BH_p)=\frac{|\xi|^n}{(1-|\xi|^2)^{1/p}}.$$

Еще один частный случай — интерполяция в нуле по системе точек, равномерно распределенных на окружности радиуса r. Пусть $z_j=r\exp(i2\pi j/n)$, $j=\overline{0,n-1}$. Тогда оптимальный метод восстановления при $p=\infty$ имеют вид

$$f(0)\approx\frac{1-r^{2n}}{n}\sum_{j=0}^{n-1}f(z_j),\quad E(L,I,BH_p)=r^n.$$

3. Восстановление значений производной. Пусть теперь $Lf=f'(\xi)$. Введем следующие обозначения:

$$\beta(\xi)=\frac{1-|\xi|^2}{2}W'(\xi)+\frac{\overline{\xi}}{p}W(\xi),$$

$$D_1=\left\{\xi\in D:|\beta(\xi)|<\frac{p-1}{p}|W(\xi)|\right\},\quad D_0:=D\setminus D_1,$$

$$b=\begin{cases}\dfrac{p\beta(\xi)}{(p-1)W(\xi)}, & \xi\in D_1,\\[2ex] \dfrac{\overline{W(\xi)}e^{i\arg\beta(\xi)}}{|\beta(\xi)|+\sqrt{|\beta(\xi)|^2-\frac{p-2}{p}|W(\xi)|^2}}, & \xi\in D_0,\end{cases}$$

$$a=\frac{\xi-\overline{b}}{1-\overline{\xi}\overline{b}},\quad u_\xi(z)=\begin{cases}1, & \xi\in D_1,\\ \dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}, & \xi\in D_0.\end{cases}$$

Теорема 3. *Метод*

$$f'(\xi) \approx \sum_{j=1}^{n} c_j(\xi) f(z_j),$$

где

$$c_j(\xi) = \begin{cases} -\dfrac{W(\xi)u_\xi(z_j)(1-|z_j|^2)}{\omega_j(z_j)u_\xi(\xi)(z_j-\xi)^2}\left(\dfrac{1-|\xi|^2}{1-z_j\overline{\xi}}\right)^{2(p-2)/p} \\ \qquad\qquad\qquad \times\left(\dfrac{1-\overline{a}z_j}{1-\overline{a}\xi}\right)^{2(p-1)/p}, & \xi\notin\{z_1,\dots z_n\}, \\ \dfrac{\omega_k(\xi)(1-|z_j|^2)}{\omega_j(z_j)(1-\overline{\xi}z_j)(\xi-z_j)}\left(\dfrac{1-\overline{\xi}z_j}{1-|\xi|^2}\right)^{2/p}, & \xi=z_k,\ k\neq j, \\ \dfrac{\omega_j'(\xi)}{\omega_j(\xi)}+\dfrac{2}{p}\,\dfrac{\overline{\xi}}{1-|\xi|^2}, & \xi=z_j, \end{cases}$$

является оптимальным методом восстановления. Функция

$$g_0(z) = \frac{(1-|\xi|^2)^{1/p}|1-\xi b|^{2/p}}{(1+|b|^2)^{1/p}}\,\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\,\frac{W(z)}{u_\xi(z)}\,\frac{(1-\overline{a}z)^{2/p}}{(1-\overline{\xi}z)^{4/p}}$$

— экстремальная, а

$$E(L,I,BH_p) = \sup_{\substack{f\in H_p\\ If=0}}|f'(\xi)| = |g_0'(\xi)| = \begin{cases} \dfrac{|W(\xi)|}{|u_\xi(\xi)|}\,\dfrac{(1+|b|^2)^{(p-1)/p}}{(1-|\xi|^2)^{(p+1)/p}}, & \xi\notin\{z_1,\dots,z_n\}, \\ \dfrac{|\omega_k(\xi)|}{(1-|\xi|^2)^{(p+1)/p}}, & \xi=z_k. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $\xi\notin\{z_1,\dots,z_n\}$ и $1\le p<\infty$. Положим

$$g(z) = \frac{z-a}{1-\overline{a}z}\,\frac{W(z)}{u_\xi(z)}\,\frac{(1-\overline{a}z)^{2/p}}{(1-\overline{\xi}z)^{4/p}}, \quad \alpha = \frac{W(\xi)}{u_\xi(\xi)}\,\frac{(1-|\xi|^2)^{2(p-2)/p}}{(1-\overline{a}\xi)^{2(p-1)/p}}.$$

Тогда по теореме Коши о вычетах имеем

$$\alpha\int_0^{2\pi}\overline{g(z)}|g(z)|^{p-2}f(z)\,d\mu(z) = \frac{\alpha}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{u_\xi(z)(1-\overline{a}z)^{2(p-1)/p}f(z)\,dz}{W(z)(z-\xi)^2(1-\overline{\xi}z)^{2(p-2)/p}} = f'(\xi)+\lambda(a)f(\xi)-\sum_{j=1}^{n}c_j(\xi)f(z_j).$$

Причем параметр a выбран как раз так, чтобы $\lambda(a)=0$. Из этих же равенств при $f=g$ получаем

$$\|g\|_p^p=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{(1-\overline{a}z)(z-a)\,dz}{(z-\xi)^2(1-\overline{\xi}z)^2}=\frac{1+|b|^2}{(1-|\xi|^2)|1-\xi b|^2}.$$

Теперь утверждение теоремы в рассматриваемом случае вытекает из теоремы 1. При $\xi=z_k$ рассуждения проводятся по той же схеме для

$$g(z)=\frac{W(z)}{(1-\overline{\xi}z)^{2/p}},\quad \alpha=\frac{\omega_k(\xi)}{(1-|\xi|^2)^{2/p}}.$$

При $p=\infty$ используется теорема 1 для тех же функций $g(z)$ (с учетом предельного перехода при $p\to\infty$)) и

$$\varphi(z)=\frac{(1-\overline{a}z)^2}{(1-\overline{\xi}z)^4}.$$

Теорема доказана. □

Теорема 3 при $p=\infty$ была получена в работе [2], а в общей ситуации при $1\le p\le\infty$ и $Lf=\lambda_0f(\xi)+\lambda_1f'(\xi)$ в работе [10]. Из теоремы 3 вытекает, что единичный диск разбивается на две области D_0 и D_1, в которых экстремальная функция имеет существенные различия. В области D_0 у экстремальной функции нули расположены только в точках $z_1,\dots,z_n$, а в области D_1 кроме нулей в этих точках появляется еще один дополнительный нуль.

Появление двух таких областей впервые, по-видимому, было обнаружено Дьедонне [14], которым была найдена величина

$$\sup_{\substack{f\in BH_\infty\\ f(0)=0}}|f'(\xi)|=\begin{cases}1, & |\xi|\le\sqrt{2}-1,\\ \dfrac{1+|\xi|^2}{4|\xi|(1-|\xi|^2)}, & |\xi|>\sqrt{2}-1.\end{cases}$$

При этом оказалось, что при $|\xi|\le\sqrt{2}-1$ экстремальная функция — $g_0(z)=z$, а при $1>|\xi|>\sqrt{2}-1$

$$g_0(z)=z\frac{z-a(\xi)}{1-\overline{a}(\xi)z}.$$

Результаты, полученные в теореме 3, естественным образом распространяются и на случай с кратными точками. Интересен случай восстановления производной по тейлоровской информации $f(0),f'(0),\dots,f^{(n-1)}(0)$. Погрешность оптимального восстановления при этом будет равна величине

$$\sup_{\substack{f\in BH_p\\ f(0)=\ldots=f^{(n-1)}(0)=0}}|f'(\xi)|.$$

При $p=\infty$ результаты относительно этой задачи, обобщающие результат Дьедонне, были получены Мичелли и Ривлиным [2]. В частности, ими было найдено, что

$$D_0 = \{\, \xi \in \mathbb{C} : |\xi| \le r_n \,\}, \quad \text{где} \quad r_n = \frac{\sqrt{1+n^2}-1}{n}.$$

Из работы [10] вытекает, что при $1 \le p \le \infty$ $D_0 = \{\, \xi \in D : |\xi| \le r_{np} \,\}$, где

$$r_{np} = \frac{\sqrt{\left(\dfrac{p-1}{p}\right)^2 + n\left(n - \dfrac{2}{p}\right)} - \dfrac{p-1}{p}}{n - \dfrac{2}{p}}.$$

Тем самым при $1 \le p \le 2$ $D_0 = D$, и разбиения на две области нет.

Рассмотрим задачу восстановления производной $f^{(k)}(0)$ по информации в точках $z_j = r\exp(i2\pi j/n)$, $j = 0, \ldots, n-1$, $k < n$. Записав для функции

$$g(z) = z^k \frac{r^n - z^n}{1 - r^n z^n}$$

равенство (3) (с $\varphi(z) \equiv 1$ при $p = \infty$), получим, что метод

$$f^{(k)}(0) \approx \frac{k!(1-r^{2n})}{nr^k} \sum_{j=0}^{n-1} \exp(-i2\pi jk/n) f(z_j) \tag{6}$$

является оптимальным, $g(z)$ — экстремальная функция, а $E(L, I, BH_p) = k! r^n$. В частности, при $k = 1$, $n = 2$ оптимальный метод при всех $1 \le p \le \infty$ имеет вид

$$f'(0) \approx (1 - r^2)\frac{f(r) - f(-r)}{2r}.$$

Для $p = \infty$ этот факт вытекает также из результатов работы [2] и отмечался в работе [4].

Заметим, что экстремальная функция $g(z)$ удовлетворяет равенствам $g(0) = \ldots = g^{(k-1)}(0) = 0$. Это означает, что метод (6) является также оптимальным методом восстановления, использующим информацию $If = (f(0), \ldots, f^{(k-1)}(0), f(z_0, \ldots, f(z_{n-1}))$. Иными словами, дополнительная информация о значениях функции f в нуле вместе со своими производными до порядка $k-1$ не является полезной, т.е. она не уменьшает погрешность восстановления.

По-другому обстоит дело при $k = n$. Рассматривая экстремальную функцию

$$g(z) = z^n \frac{r^n - z^n}{1 - r^n z^n},$$

получим, что оптимальный метод восстановления имеет вид

$$f^{(n)}(0) \approx \frac{n!(1-r^{2n})}{r^n}\left[\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f(z_j) - f(0)\right],$$

а $E(L,I,BH_p) = n!r^n$. Здесь информация о значении $f(0)$ используется, но по-прежнему является "лишней" информация о $f'(0),\dots,f^{(n-1)}(0)$.

Можно построить $f^{(n)}(0)$, использующий значения функции лишь в точках $z_0,\dots,z_{n-1}$. Экстремальная функция в этом случае будет иметь различный вид в зависимости от r.

Положим

$$r_p = \left(\sqrt{\left(\frac{p-1}{p}\right)^2+1}-\frac{p-1}{p}\right)^{1/p},$$

$$a = \begin{cases} \left(\dfrac{1-r^{2n}}{2r^n}+\sqrt{\left(\dfrac{1-r^{2n}}{2r^n}\right)^2-\dfrac{p-2}{p}}\right)^{-1/n}, & 0<r\le r_p,\\ \left(\dfrac{p}{p-1}\dfrac{1-r^{2n}}{2r^n}\right)^{1/n}, & r_p<r<1. \end{cases}$$

Теорема 4. *Метод*

$$f^{(n)}(0) \approx \begin{cases} \dfrac{(n-1)!}{r^na^n}(1-r^{2n})(a^n-r^n)(1-a^nr^n)^{\frac{p-2}{p}}\sum_{j=0}^{n-1} f(z_j), \\ \qquad\qquad 0<r\le r_p,\\ \dfrac{(n-1)!}{r^n}(1-r^{2n})(1-a^nr^n)^{\frac{2(p-1)}{p}}\sum_{j=0}^{n-1} f(z_j), \\ \qquad\qquad r_p<r<1, \end{cases}$$

является оптимальным методом восстановления,

$$g_0(z) = \begin{cases} (1+a^{2n})^{-1/p}\dfrac{z^n-r^n}{1-r^nz^n}(1-a^nz^n)^{2/p}, & 0<r\le r_p,\\ (1+a^{2n})^{-1/p}\dfrac{z^n-r^n}{1-r^nz^n}\dfrac{z^n-a^n}{1-a^nz^n}(1-a^nz^n)^{2/p}, & r_p<r<1, \end{cases}$$

является экстремальной функцией и

$$E(L,I,BH_p) = \begin{cases} \dfrac{n!r^n}{a^n}(1+a^{2n})^{(p-1)/p}, & 0<r\le r_p,\\ n!r^n(1+a^{2n})^{(p-1)/p}, & r_p<r<1, \end{cases}$$

Доказательство этой теоремы проводится по общей схеме, использованной в теоремах 2 и 3.

При $p=\infty$ из теоремы 4 вытекает равенство

$$E(r) = E(L,I,BH_\infty) = \begin{cases} n!(1-r^{2n}), & 0<r\le(\sqrt{2}-1)^{1/n},\\ n!\dfrac{(1+r^{2n})}{4r^n}, & (\sqrt{2}-1)^{1/n}<r<1. \end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что

$$\min_{r\in(0,1)} E(r) = E\left(\sqrt[2n]{\frac{1}{3}}\right) = n!\frac{4\sqrt{3}}{9}.$$

Например, для одной точки ($n = 1$) оказывается, что минимальная погрешность оптимального приближения восстановления $f'(0)$ достигается, когда эта точка взята на окружности радиуса $1/\sqrt{3}$. Этот любопытный факт был обнаружен в работе [15]. Задача минимизации погрешности оптимального восстановления $f'(\xi)$, $\xi \in (-1, 0)$ за счет выбора узлов $z_1, \dots, z_n \in [0, 1)$ на классе BH_∞ рассматривалась в работе [16].

4. Квадратурные формулы на классе BH_∞. Рассмотрим задачу (1) для $W = BH_\infty$, $Lf = \int_a^b f(x)p(x)\,dx$, $(a, b) \subset (-1, 1)$, $p(x) \geq 0$ — весовая функция и $If = (f(x_1), f'(x_1), \dots, f(x_n), f'(x_n))$, $x_j \in (-1, 1)$. Положим

$$W_j(x) = \frac{x - x_j}{1 - x_j x}, \quad W(x) = \prod_{j=1}^{n} W_j(x), \quad \omega_j(x) = \prod_{\substack{k=1\\k\neq j}} W_k(x),$$

$$a_{j1}(x) = \int_a^b \frac{\omega_j^2(x)W_j(x)}{\omega_j^2(x_j)W_j'(x_j)} \left[1 - W_j^2(x)\right] p(x)\,dx,$$

$$a_{j0}(x) = \int_a^b \frac{\omega_j^2(x)}{\omega_j^2(x_j)} \left[1 - W_j^4(x)\right] p(x)\,dx - 2\frac{\omega_j'(x_j)}{\omega_j(x_j)} a_{j1}.$$

Теорема 5. *Квадратурная формула*

$$\int_a^b f(x)p(x)\,dx \approx \sum_{j=1}^{n} (a_{j0} f(x_j) + a_{j1} f'(x_j)) \tag{7}$$

является оптимальным методом восстановления на классе BH_∞, $g_0(z) = W^2(x)$ *— экстремальная функция и*

$$E(L, I, BH_\infty) = \int_a^b W^2(x)p(x)\,dx.$$

Доказательство. Из обобщения теоремы 2 для восстановления функций по значениям в точках x_j, $j = 1, \dots, n$, с кратностью 2 получим, что метод

$$f(x) \approx \sum_{j=1}^{n} (D_{j0}(x)f(x_j) + D_{j1}(x)f'(x_j)), \quad x \in (-1, 1),$$

где

$$D_{jk}(x) = W^2(x)(1 - x^2)\frac{\partial^{1-k}}{\partial \xi^{1-k}} \left[\frac{(1 - x_j\xi)^2}{\omega_j^2(\xi)(1 - x\xi)(x - \xi)}\right]\Bigg|_{\xi = x_j}, \quad k = 0, 1,$$

является оптимальным методом восстановления для функций из BH_∞ с погрешностью, равной $W^2(x)$. Следовательно, при всех $f \in BH_\infty$

$$\left| f(x) - \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{1} D_{jk} f^{(k)}(x_j) \right| \leq W^2(x).$$

Поскольку

$$a_{jk} = \int_a^b D_{jk}(x)p(x)\,dx,$$

имеем

$$\left|\int_a^b f(x)p(x)\,dx - \sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^1 a_{jk} f^{(k)}(x_j)\right| \le \int_a^b W^2(x)p(x)\,dx.$$

Таким образом,

$$E(L, I, BH_\infty) \le \int_a^b W^2(x)p(x)\,dx.$$

С другой стороны, из леммы

$$E(L, I, BH_\infty) = \sup_{\substack{f\in BH_\infty\\ f(x_1)=f'(x_1)=\ldots=f(x_n)=f'(x_n)=0}} \left|\int_a^b f(x)p(x)\,dx\right| \ge \int_a^b W^2(x)p(x)\,dx.$$

Теорема доказана. □

Для подмножества функций из BH_∞, вещественных на вещественной оси, теорема 5 была доказана в работе [17]. Общий случай произвольных кратностей был рассмотрен в [18].

Интересен вопрос о нахождении оптимальных узлов, т.е. таких точек, на которых достигается нижняя грань

$$\inf_{x_j\in(-1,1)} \int_a^b W^2(x)p(x)\,dx.$$

В общем случае эта задача остается открытой. Известно лишь, что оптимальные узлы существуют, удовлетворяют условиям $a < x_j < b$ и для них $a_{j1} = 0$, т.е. в квадратурной формуле (7) по оптимальным узлам информация о значениях производной не используется. Отсюда следует, что оптимальные квадратурные формулы для оптимальных узлов, использующие информацию If и $If = (f(x_1), \ldots, f(x_n))$, совпадают.

Отметим, что оптимальные узлы не найдены даже для весовой функции $p(x) = 1$. Более того, неизвестно, являются ли они единственными. Ряд результатов, касающихся оптимальных узлов можно найти в работе [18]. Там же показано, что в общем случае единственности оптимальных узлов нет.

Порядковые оценки погрешности оптимального восстановления интеграла по оптимальным узлам на классе BH_p, $\le p \le \infty$, получены в работе [19] (см. также цитируемую там литературу).

5. Задача восстановления на классах Бергмана. Пространство Бергмана A_p определяется как множество аналитических в D

функций, для которых

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{\pi}\int_D |f(z)|^p\,d\sigma\right)^{1/p} < \infty, \quad 1 \le p < \infty,$$

где $d\sigma$ — плоская мера Лебега (при $p=\infty$ $A_\infty = H_\infty$). Рассмотрим задачу оптимального восстановления значения $f(\xi)$ по тейлоровской информации $f(0), f'(0), \dots, f^{(n-1)}(0)$ на классе BA_p.

Теорема 6 ([10])**.** *Метод*

$$f(\xi) \approx \sum_{j=0}^{n-1} c_j(\xi) f^{(j)}(0),$$

где

$$c_j(\xi) = \frac{\xi^n(1-|\xi|^2)^{2(p-2)/p}}{j!(n-j-1)!(\varphi(\xi))^{(p-2)/p}} \times \frac{\partial^{n-j-1}}{\partial z^{n-j-1}}\left[\frac{(\varphi(z))^{(p-2)/p}}{(\xi - z)(1-\overline{\xi}z)^{2(p-2)/p}}\right]\Bigg|_{z=0},$$

$$\varphi(z) = 1 + \frac{np}{2}(1-\overline{\xi}z),$$

является оптимальным методом восстановления на классе BA_p, $1 \le p < \infty$,

$$g_0(z) = \frac{(1-|\xi|^2)^{2/p}}{(\varphi(\xi))^{1/p}} z^n \frac{(\varphi(z))^{2/p}}{(1-\overline{\xi}z)^{2/p}}$$

— *экстремальная функция, а*

$$E(L, I, BA_p) = |\xi|^n \frac{(\varphi(\xi))^{1/p}}{(1-|\xi|^2)^{2/p}}.$$

Доказательство. Положим

$$g(z) = z^n \frac{(\varphi(z))^{2/p}}{(1-\overline{\xi}z)^{2/p}}, \quad \alpha = \frac{(1-|\xi|^2)^{2(p-2)/p}}{(\varphi(\xi))^{(p-2)/p}}$$

и для $f \in H_\infty$

$$If = \frac{\alpha}{2\pi i}\int_{|\xi|=1} \frac{(\varphi(z))^{(p-2)/p} f(z)\,dz}{z^n(z-\xi)(1-\overline{\xi}z)^{2(p-2)/p}}.$$

По теореме о вычетах получаем

$$If = f(\xi) - \sum_{j=0}^{n-1} c_j(\xi) f^{(j)}(0).$$

С другой стороны, по формуле Стокса

$$
\begin{aligned}
If &= \frac{\alpha}{2\pi i}\int_{|\xi|=1}|z|^{n(p-2)}\frac{\overline{z}^{n+1}(\varphi(z))^{(p-2)/p}f(z)\,dz}{z^n(z-\xi)(1-\overline{\xi}z)^{2(p-2)/p}} \\
&= \frac{\alpha}{\pi}\int_D \frac{\partial}{\partial\overline{z}}\left(\frac{\overline{z}^{\frac{np}{2}+1}}{1-\overline{\xi}z}\right)\frac{z^{n(p-2)/p}(\varphi(z))^{(p-2)/p}}{(1-\overline{\xi}z)^{2(p-2)/p}}f(z)\,d\sigma \\
&= \frac{\alpha}{\pi}\int_D g(z)|g(z)|^{p-2}f(z)\,d\sigma.
\end{aligned}
$$

Поскольку функции из H_∞ плотны в A_p, то это равенство имеет место для всех $f\in A_p$. Остается применить теорему 1. Теорема доказана. □

В частности, из теоремы 6 вытекает аналог леммы Шварца для классов BA_p

$$
\sup_{\substack{f\in BA_p\\ f(0)=0}}|f(\xi)| = |\xi|\frac{\left(1+\frac{p}{2}(1-|\xi|^2)\right)^{1/p}}{(1-|\xi|^2)^{2/p}}.
$$

Задачи восстановления на классах Бергмана, по-видимому, являются сложными задачами. В какой-то мере это можно объяснить тесной связью этих задач с задачами восстановления на классах Харди в $\mathbb{C}^2$ (подробнее см. в [20]).

6. Некоторые дальнейшие результаты и нерешенные задачи. Аналогично пространствам H_p и A_p определяются пространства гармонических в D функций h_p и a_p. Ряд результатов по оптимальному восстановлению на классах Bh_∞, Bh_2 и Ba_2 можно найти в работе [21]. Однако задача восстановления значения $u(\xi)$ по информации $Iu=(u(z_1),\dots,u(z)_n$ для произвольной системы точек $z_1,\dots,z_n$ на классе BH_∞ не решена (в [21] приводится решение этой задачи, когда $z_j\in(-1,1)$).

Не решена аналогичная задача и на классе BA_p. Соответствующая экстремальная задача для нахождения погрешности оптимального восстановления имеет в этом случае вид:

$$
\sup_{\substack{f\in BA_p\\ f(z_1)=\ldots=f(z_n)=0}}|f(\xi)|. \tag{8}
$$

Обозначим через H_p^r пространство аналитических в D функций, у которых $f^{(r)}\in H_p$. Некоторые результаты о задаче, аналогичной (8), для H_∞^r получены в работе [22] (см. также [23]). Однако даже аналог леммы Шварца, т.е. задача о нахождении величины

$$
\sup_{\substack{f'\in BA_p\\ f(0)=0}}|f(\xi)|
$$

при $1\le p<\infty$, неизвестен.

Задачи, связанные с оптимальным восстановлением в многомерной ситуации, лишь начинают изучаться. Ряд результатов в этом направлении получен в работе [20]. Мы не имеем возможности остановиться здесь на задачах, связанных с восстановлением по данным, известным с ошибкой. Задачи эти интересны тем, что эффект "лишней" информации, возникающий уже в задачах с точной информацией, оказывается типичным для информации, заданной с погрешностью. Результаты, касающиеся этих задач, можно найти в работах [24–27].

Список литературы

[1] Тихомиров В.М. Теория приближений// Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР). – Т. 14. – М. 1987. –С. 103–260.

[2] Micchelli C.A., Rivlin T.J. A survey of optimal recovery. – N.Y.: Plenum Press, 1977. – P. 1–54.

[3] Rivlin T.J. A survey of recent results on optimal recovery. Polinom and spline approximat. Proc. NATO Adv. Study Inst. Calgary, 1978, Dordrecht e.a. 1979. – P. 225–245.

[4] Rivlin T.J. The optimal recovery of functions// Contemp. Math. – 1982. – V. 9. – P. 121–151.

[5] Micchelli C.A., Rivlin T.J. Lectures in optimal recovery// Lect. Notes Math. – 1985. – 1129. – P. 21–93.

[6] Woźniakowski H. A survey of information–based complexity// J. Complexity. – 1985. – V. 1. – P. 11–44.

[7] Трауб Дж., Вожьняковский Х. Общая теория оптимальных алгоритмов. – М.: Мир, 1983.

[8] Смоляк С.А. Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них. – Канд. дисс., МГУ, 1965.

[9] Магарил-Ильяев Г.Г., Осипенко К.Ю. Об оптимальном восстановлении функционалов по неточным данным// Мат. заметки. – 1991. – Т. 50. – Вып. 6. – С. 85–93.

[10] Осипенко К.Ю., Стесин М.И. О задачах восстановления в пространствах Харди и Бергмана// Мат. заметки. – 1991. – Т. 49. – Вып. 4. – С. 95–104.

[11] Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1966.

[12] Осипенко К.Ю. Наилучшее приближение аналитических функций по информации об их значениях в конечном числе точек// Мат. заметки. – 1976. – Т. 19. – Вып. 1. – С. 29–40.

[13] Fisher S.D., Micchelli C.A. The n-width of sets of analytic functions// Doke Math. J. – 1980. – V. 47. – N. 4. – P. 789–801.

[14] Dieudonné J. Recherches sur quelques problems ralatifs aux polinomes et aux fonctions bornées d'une variable complexe// Ann. Ecole Norm. Sup. – 1931. – V. 3. – N. 48. – P. 247–358.

[15] Rivlin T.J., Shaffer D.B. Optimal estimation of the derivative of bounded analytic functions. IBM Reserch Report, RC 9843. – 1983.

[16] Rivlin T.J., Ruscheweyh St., Shaffer D., Wirths K.J. Optimal recovery of the derivative of bounded analytic functions// IMA J. of Numer. Anal. – 1983. – V. 3. – N. 3. – P. 327–332.

[17] Bojanov B.D. Best quadrature formula for a certain class of analytic functions// Zastos. Mat. – 1974. – V. 14. – P. 441–447.

[18] Осипенко К.Ю. О наилучших и оптимальных квадратурных формулах на классах ограниченных аналитических функций// Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1988. – Т. 52. – N. 1. – С. 79–99.

[19] Anderson J.-E., Bojanov B.D. A note on the optimal quadrature in H_p// Numer. Math. – 1984. – V. 44. – N. 2. – P. 301–308.

[20] Osipenko K.Yu., Stessin M. On optimal recovery of holomorphic n functions and Schwartz Lemma in the unit ball of $\mathbb{C}^n$// Constr. Approximat. (в печати).

[21] Осипенко К.Ю. Наилучшие и оптимальные методы восстановления на классах гармонических функций// Мат. сборник. – 1991. – Т. 182. – N. 5. – С. 723–745.

[22] Horwitz A., Newman D.J. An extremal problem for analytic func- tions with prescribed zeros and r-th derivative in H^∞// Trans. Amer. Math. Soc. – 1986. – V. 295. – N. 2. – P. 669–713.

[23] Fisher S.D. Envelopes, widths, and Landau problems for analytic functions// Constr. Approximat. – 1989. – V. 5. – N. 2. – P. 171–187.

[24] Осипенко К.Ю. Наилучшие методы приближения аналитических функций, заданных с погрешностью// Мат. сборник. – 1982. – Т. 118. – N. 3. – С. 350–370.

[25] Осипенко К.Ю. Задача Хейнса и оптимальная экстраполяция аналитических функций, заданных с ошибкой// Мат. сборник. – 1985. – Т. 126. – N. 4. – С. 566–575.

[26] Osipenko K.Yu. On optimal extrapolation and interpolation of fuzzy analytic functions// Anal. math. – 1987. – V. 13. – N. 3. – P. 199–210.

[27] Osipenko K.Yu., Stessin M. On some problems of optimal recovery of holomorphic and harmonic functions from inaccurate data// J. Approxim. Theory (в печати).

Московский государственный авиационный
технологический университет им. К.Э. Циолковского