

О НАИЛУЧШИХ МЕТОДАХ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПРОИЗВОДНЫХ НА СОБОЛЕВСКИХ КЛАССАХ

Г. Г. МАГАРИЛ-ИЛЬЯЕВ, К. Ю. ОСИПЕНКО

Работа посвящена построению наилучших (оптимальных) методов восстановления производных функций из обобщенного соболевского класса функций на \mathbb{R}^d при условии, что о каждой такой функции известно точно или приближенно ее преобразование Фурье на произвольном измеримом множестве $A \subset \mathbb{R}^d$. В обоих случаях построены семейства оптимальных методов. Эти методы используют не весь объем информации о преобразовании Фурье, а тот, который используют, подвергают некоторой фильтрации. Рассмотрена также задача о нахождении наилучшего множества для восстановления данной производной среди всех множеств фиксированной меры.

Библиография: 19 названий.

Ключевые слова: оптимальное восстановление, соболевский класс, экстремальная задача, преобразование Фурье

1. ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧ И ФОРМУЛИРОВКИ РЕЗУЛЬТАТОВ

Пусть d — натуральное число и F — преобразование Фурье в $L_2(\mathbb{R}^d)$. Если $x(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$, то удобно считать, что функция $Fx(\cdot)$ определена на \mathbb{R}^d с мерой Лебега, деленной на $(2\pi)^d$. Норму $y(\cdot)$ в пространстве суммируемых с квадратом функций на \mathbb{R}^d с такой мерой обозначаем $\|y(\cdot)\|_{\widehat{L}_2(\mathbb{R}^d)}$, т. е.

$$\|y(\cdot)\|_{\widehat{L}_2(\mathbb{R}^d)} = \left(\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |y(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}.$$

Для каждого $r > 0$ обобщенное соболевское пространство (или пространство бесселевых потенциалов) $\mathcal{H}_2^r(\mathbb{R}^d)$ определяется как совокупность функций $x(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$, для которых

$$\|x(\cdot)\|_{\mathcal{H}_2^r(\mathbb{R}^d)} = \left(\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} (1 + \|\xi\|^2)^r |(Fx)(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} < \infty,$$

где $\|\xi\|^2 = \xi_1^2 + \dots + \xi_d^2$. Соответствующим обобщенным соболевским классом назовем множество

$$H_2^r(\mathbb{R}^d) = \{ x(\cdot) \in \mathcal{H}_2^r(\mathbb{R}^d) \mid \|x(\cdot)\|_{\mathcal{H}_2^r(\mathbb{R}^d)} \leq 1 \}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант №13-01-12447).

Если r — натуральное, то функция $x(\cdot)$ (переменных t_1, \dots, t_d) принадлежит $\mathcal{H}_2^r(\mathbb{R}^d)$ тогда и только тогда, когда все ее обобщенные производные $\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_d} x / \partial t_1^{\alpha_1} \dots \partial t_d^{\alpha_d}$, где $(\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{Z}_+^d$ и $\alpha_1 + \dots + \alpha_d \leq r$, принадлежат $L_2(\mathbb{R}^d)$, и в этом случае норма

$$\sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_d \leq r} \left\| \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_d} x(\cdot)}{\partial t_1^{\alpha_1} \dots \partial t_d^{\alpha_d}} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}$$

эквивалентна норме в $\mathcal{H}_2^r(\mathbb{R}^d)$. Таким образом, если r натурально, то $\mathcal{H}_2^r(\mathbb{R}^d)$ — классическое соболевское пространство функций на \mathbb{R}^d .

Дадим теперь определение дробной производной. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{R}_+^d$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d) \in \mathbb{R}^d$, $(i\xi)^\alpha = (i\xi_1)^{\alpha_1} \dots (i\xi_d)^{\alpha_d}$, где $(i\xi_j)^{\alpha_j} = |\xi_j|^{\alpha_j} \exp\{\frac{1}{2}\pi i \operatorname{sgn} \xi_j\}$, $j = 1, \dots, d$ ($\operatorname{sgn} 0 = 0$, $0^0 = 1$) и \mathcal{E}^α — оператор умножения на функцию $\xi \mapsto (i\xi)^\alpha$ в $\widehat{L}_2(\mathbb{R}^d)$. Если функция $x(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$ такова, что $(\mathcal{E}^\alpha \circ F)x(\cdot) \in \widehat{L}_2(\mathbb{R}^d)$, то определена функция $D^\alpha x(\cdot) = (F^{-1} \circ \mathcal{E}^\alpha \circ F)x(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$, где F^{-1} — обратное преобразования Фурье, которая называется α -ой производной (по Вейлю) функции $x(\cdot)$. Ясно, что если $x(\cdot)$ достаточно гладкая и быстро убывающая функция на \mathbb{R}^d и $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{Z}_+^d$, то $D^\alpha x(t) = \partial x^{\alpha_1 + \dots + \alpha_d}(t) / \partial t_1^{\alpha_1} \dots \partial t_d^{\alpha_d}$.

Нас интересуют следующие вопросы, которые на содержательном уровне звучат так.

1) Пусть о каждой функции $x(\cdot) \in H_2^r(\mathbb{R}^d)$ известно (точно или приближенно) ее преобразование Фурье на некотором подмножестве \mathbb{R}^d . Как по этой информации наилучшим образом восстановить $D^\alpha x(\cdot)$?

2) Пусть имеется возможность измерить (точно или приближенно) преобразование Фурье функций $x(\cdot) \in H_2^r(\mathbb{R}^d)$ на любом множестве, мера которого не превосходит некоторого числа $\sigma > 0$, т. е. имеется возможность измерить фиксированное “число гармоник”. Какие гармоники лучше всего взять для восстановления $D^\alpha x(\cdot)$?

Приведем точные постановки сформулированных задач. Пусть A — произвольное измеримое подмножество \mathbb{R}^d и про каждую функцию $x(\cdot) \in H_2^r(\mathbb{R}^d)$ известно ее преобразование Фурье на A либо точно, либо с точностью до $\delta > 0$ в метрике $\widehat{L}_2(A)$, т. е. известна функция $y(\cdot) \in \widehat{L}_2(A)$ такая, что $\|(Fx)(\cdot) - y(\cdot)\|_{\widehat{L}_2(A)} \leq \delta$. По этой информации мы хотим восстановить $D^\alpha x(\cdot)$, $\alpha \in \mathbb{R}_+^d$, в метрике $L_2(\mathbb{R}^d)$. Понимается это следующим образом.

Пусть $I^\delta(A): H_2^r(\mathbb{R}^d) \rightarrow \widehat{L}_2(A)$ — отображение, сопоставляющее $x(\cdot) \in H_2^r(\mathbb{R}^d)$ множество $I^\delta(A)x(\cdot) = \{y(\cdot) \in \widehat{L}_2(A) \mid \|Fx(\cdot) - y(\cdot)\|_{\widehat{L}_2(A)} \leq \delta\}$ ($I^0(A)$ — обычное отображение, которое сопоставляет $x(\cdot)$ функцию $Fx(\cdot)|_A$ — сужение $Fx(\cdot)$ на A). Обозначим через $\operatorname{Im} I^\delta(A)$ образ этого отображения.

Всякий метод восстановления должен по функции (наблюдению) $y(\cdot) \in \text{Im } I^\delta(A)$ указать функцию из $L_2(\mathbb{R}^d)$, которая является приближением к α -ой производной функции из $H_2^r(\mathbb{R}^d)$. Таким образом, всякий метод есть некоторое отображение $\varphi: \text{Im } I^\delta(A) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)$. Погрешностью этого метода назовем величину

$$e(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), A, \delta, \varphi) = \sup_{\substack{x(\cdot) \in H_2^r(\mathbb{R}^d) \\ y(\cdot) \in \text{Im } I^\delta(A)}} \|D^\alpha x(\cdot) - \varphi(y(\cdot))(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

При $\delta = 0$ это можно записать короче

$$e(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), A, 0, \varphi) = \sup_{x(\cdot) \in H_2^r(\mathbb{R}^d)} \|D^\alpha x(\cdot) - \varphi(Fx(\cdot)|_A)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

Нас интересует величина

$$E(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), A, \delta) = \inf_{\varphi} e(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), A, \delta, \varphi),$$

где нижняя грань берется по всем методам $\varphi: \text{Im } I^\delta(A) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)$, называемая *погрешностью оптимального восстановления* и те методы $\widehat{\varphi}$, на которых нижняя грань достигается, т. е.

$$E(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), A, \delta) = e(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), A, \delta, \widehat{\varphi}).$$

Такие методы будем называть *оптимальными методами восстановления*.

Вопрос о нахождении погрешности оптимального восстановления и оптимальных методов восстановления и составляет точную постановку первого из сформулированных выше вопросов.

Пусть теперь $\sigma > 0$ и \mathcal{A}_σ — совокупность всех измеримых подмножеств \mathbb{R}^d , мера Лебега которых не больше σ . Нас будет интересовать также величина

$$E_\sigma(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), \delta) = \inf_{A_\sigma \in \mathcal{A}_\sigma} E(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), A_\sigma, \delta) \quad (1)$$

и те множества, на которых нижняя грань достигается, которые мы называем *оптимальными множествами*.

Задача о нахождении величины (1) и оптимальных множеств есть точная постановка второго из сформулированных выше вопросов.

Первоначальные идеи, связанные с данными постановками, принадлежат А.Н.Колмогорову, который в работе [1] ввел понятие перечника — величину, характеризующую наилучшее приближение класса функций подпространствами фиксированной размерности. Затем в пятидесятые годы стали изучать наилучшие квадратуры на классах функций (первые исследования здесь принадлежат А. Сарду [2] и С. М. Никольскому [3]). В 1965 г С.А.Смоляк [4] поставил общую задачу об оптимальном восстановлении линейного функционала на классе элементов по неточной информации о самих элементах и доказал, что если класс — выпуклое центрально

симметричное множество, то среди оптимальных методов есть линейный. Впоследствии была поставлена более общая задача о восстановлении линейных операторов и тематика оптимального восстановления получила достаточно интенсивное развитие. Определенное представление об этом можно получить из обзоров и монографий [5]–[11]. В работах [12]–[17] изучались задачи оптимального восстановления, по духу близкие к тому, что рассматривается в данной статье. Отдельно отметим работу авторов [18], в которой исследуется та же задача, что и здесь, но множество A есть все пространство \mathbb{R}^d .

Перед формулировкой основных утверждений приведем некоторые определения и обозначения.

Пусть $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{Z}_+^d$ и $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d) \in \mathbb{R}^d$. Положим

$$\bar{\alpha} = \sum_{j=1}^d \alpha_j, \quad \alpha^\alpha = \prod_{j=1}^d \alpha_j^{\alpha_j}, \quad |\xi|^\alpha = \prod_{j=1}^d |\xi_j|^{\alpha_j}.$$

Пусть $0 < \bar{\alpha} < r$. Рассмотрим функцию $f(\cdot)$ на \mathbb{R}^d , определенную формулой

$$f(\xi) = \frac{|\xi|^{2\alpha}}{(1 + \|\xi\|^2)^r}, \quad \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Эта функция, очевидно, ограничена и стремится к нулю при $\|\xi\| \rightarrow \infty$. Несложный подсчет показывает, что ее максимальное значение равно

$$\hat{\lambda} = \frac{\alpha^\alpha (r - \bar{\alpha})^{r - \bar{\alpha}}}{r^r}$$

и достигается только в точках

$$\left(\pm \sqrt{\frac{\alpha_1}{r - \bar{\alpha}}}, \dots, \pm \sqrt{\frac{\alpha_d}{r - \bar{\alpha}}} \right).$$

Обозначим

$$\hat{\delta} = \left(\frac{r - \bar{\alpha}}{r} \right)^{r/2}$$

и на полупрямой $[0, \infty]$ рассмотрим функцию h , определенную формулой

$$h(t) = \begin{cases} \frac{\alpha^\alpha}{r \bar{\alpha}^{\bar{\alpha}-1}} (1 - t^{2/r})^{\bar{\alpha}-1} t^{2(1-\bar{\alpha}/r)}, & 0 \leq t \leq \hat{\delta}, \\ \hat{\lambda}, & t \geq \hat{\delta}. \end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что эта функция строго монотонно возрастает на $[0, \hat{\delta}]$, $h(0) = 0$ и $h(\hat{\delta}) = \hat{\lambda}$.

Определим для каждого $\lambda \geq 0$ множество

$$\Omega_\lambda = \{ \xi \in \mathbb{R}^d \mid f(\xi) \geq \lambda \}$$

и сопоставим любому измеримому подмножеству A в \mathbb{R}^d число

$$\lambda(A) = \inf\{\lambda > 0 \mid \text{mes}(A \cap \Omega_\lambda) = \text{mes } \Omega_\lambda\}.$$

Равенство $\text{mes}(A \cap \Omega_{\widehat{\lambda}}) = \text{mes } \Omega_{\widehat{\lambda}}$ тривиальным образом выполняется, поскольку $\text{mes } \Omega_{\widehat{\lambda}} = 0$, а если A совпадает п. в. с \mathbb{R}^d , то $\lambda(A) = 0$. Таким образом, $0 \leq \lambda(A) \leq \widehat{\lambda}$.

Если $\delta = 0$ и $\lambda(A) = 0$, то мы располагаем полной информацией о функции и задача восстановления становится тривиальной. По этой причине случай $\delta + \lambda(A) = 0$ далее исключен из рассмотрения.

Для каждого $\delta \geq 0$ и каждого измеримого подмножества A в \mathbb{R}^d таких, что $\delta + \lambda(A) \neq 0$ положим

$$\Delta = \Delta(\delta, A) = \begin{cases} \delta, & 0 < \delta < \widehat{\delta}, \quad \lambda(A) \leq h(\delta), \\ h^{-1}(\lambda(A)), & 0 \leq \delta < \widehat{\delta}, \quad \lambda(A) > h(\delta), \\ \widehat{\delta}, & \delta \geq \widehat{\delta} \end{cases}$$

и определим числа

$$\lambda_1 = \lambda_1(\delta, A) = \frac{r}{\bar{\alpha}\Delta^2} \left(\widehat{\delta}^{2/r} - \Delta^{2/r} \right) h(\Delta) \quad \text{и} \quad \lambda_2 = \lambda_2(\delta, A) = h(\Delta).$$

Заметим, что $h(\Delta) = \max\{\lambda(A), h(\delta)\}$.

Наконец, через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначим скалярное произведение в \mathbb{R}^d .

Теорема 1. Пусть $\alpha \in \mathbb{R}_+^d$, $0 < \bar{\alpha} < r$, $\delta \geq 0$, A — измеримое подмножество \mathbb{R}^d и $\delta + \lambda(A) \neq 0$. Тогда $D^\alpha x(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$ для любого $x(\cdot) \in \mathcal{H}_2^r(\mathbb{R}^d)$ и

$$E(D^\alpha, \mathcal{H}_2^r(\mathbb{R}^d), A, \delta) = \sqrt{\left(\frac{r\delta^2}{\bar{\alpha}\Delta^2} \left(\widehat{\delta}^{2/r} - \Delta^{2/r} \right) + 1 \right) h(\Delta)}.$$

Если $\delta = 0$, то для каждой измеримой функции $a(\cdot)$ на A такой, что для п. в. $\xi \in \mathbb{R}^d$

$$|a(\xi) - 1| \leq \sqrt{\lambda(A)} \frac{(1 + \|\xi\|^2)^{r/2}}{|\xi|^\alpha}, \quad (2)$$

метод $\widehat{\varphi}_a$, действующий для п. в. $t \in \mathbb{R}^d$ по правилу

$$\widehat{\varphi}_a(Fx(\cdot)|_A)(t) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_A (i\xi)^\alpha a(\xi) Fx(\xi) e^{i\langle \xi, t \rangle} d\xi,$$

является оптимальным.

Если $\delta > 0$, то для каждой измеримой функции $a(\cdot)$ на A такой, что для п. в. $\xi \in \mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned} & \left| a(\xi) - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2 (1 + \|\xi\|^2)^r} \right| \\ & \leq \frac{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} (1 + \|\xi\|^2)^{r/2}}{|\xi|^\alpha (\lambda_1 + \lambda_2 (1 + \|\xi\|^2)^r)} \sqrt{-|\xi|^{2\alpha} + \lambda_1 + \lambda_2 (1 + \|\xi\|^2)^r}, \quad (3) \end{aligned}$$

метод $\widehat{\varphi}_a$, действующий для п. в. $t \in \mathbb{R}^d$ по правилу

$$\widehat{\varphi}_a(y(\cdot))(t) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_A (i\xi)^\alpha a(\xi) y(\xi) e^{(\xi, t)} d\xi,$$

является оптимальным.

Комментарии

1. Если $\delta = 0$, то из выражения для оптимальной погрешности восстановления следует, что

$$E(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), A, 0) = \sqrt{\lambda(A)},$$

т. е. преобразование Фурье функций из $H_2^r(\mathbb{R}^d)$ достаточно знать только на множестве $A' \subset A$ (включение понимается с точностью до множества меры нуль), для которого $\lambda(A') = \lambda(A)$. Минимальным среди них является множество $\Omega_{\lambda(A)}$.

Оптимальный метод представляет собой α -ую производную функции, преобразование Фурье которой вне A равно нулю, а на A есть наше наблюдение, “сглаженное” с помощью функции $a(\cdot)$. В силу (2) функция $\xi \mapsto (i\xi)^\alpha a(\xi) Fx(\xi)$ принадлежит $\widehat{L}_2(A)$, и если она принадлежит еще и $L_1(A)$ (например, мера A конечна), то выражение для оптимального метода есть формула обращения преобразования Фурье. Если нет, то интеграл в выражении для оптимального метода при каждом $t \in \mathbb{R}^d$ надо понимать в смысле главного значения.

На множестве $A \setminus \Omega_{\lambda(A)}$ функция $f(\cdot)$ не превосходит $\lambda(A)$. Поэтому согласно (2) на этом множестве можно положить $a(\cdot) = 0$ и значит, достаточно брать интеграл только по множеству $\Omega_{\lambda(A)}$.

Если положить $a(\cdot) = 1$ на A , то формула (2) тривиальным образом выполняется, т. е. наблюдаемое преобразование Фурье можно совсем не сглаживать.

Наконец, если $\lambda(A) = \widehat{\lambda}$, то $f(\xi) \leq \widehat{\lambda}$ для всех $\xi \in \mathbb{R}^d$. Неравенство (2) выполняется при $a(\cdot) = 0$ на A и поэтому в данном случае нулевой метод является оптимальным.

Суммируя сказанное, можно утверждать, что наиболее “разумным” является следующий оптимальный метод

$$\widehat{\varphi}(Fx(\cdot)|_A)(t) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\Omega_{\lambda(A)}} (i\xi)^\alpha Fx(\xi) e^{(\xi, t)} d\xi,$$

так как он использует минимальный объем информации о преобразовании Фурье и не требует его обработки (кроме того, в случае $\lambda(A) = \widehat{\lambda}$ интеграл берется по множеству меры нуль и тем самым $\widehat{\varphi} = 0$).

2. Если $\delta > 0$, то непосредственные (но довольно рутинные) вычисления показывают, что погрешность оптимального восстановления, как функция от $\lambda(A)$, убывает при убывании $\lambda(A)$ от $\widehat{\lambda}$ до $h(\delta)$, а затем (что уже легко следует из определения Δ) стабилизируется на уровне

$$\sqrt{\left(\frac{r}{\bar{\alpha}} \left(\widehat{\delta}^{2/r} - \delta^{2/r}\right) + 1\right) h(\delta)}.$$

Таким образом, информация о преобразовании Фурье за пределами множества, для которого $\lambda(A) \leq h(\delta)$ оказывается лишней. Минимальным из таких множеств является множество $\Omega_{h(\delta)}$.

В теореме представлено семейство оптимальных методов, каждый из которых есть α -ая производная функции, преобразование Фурье которой вне A равно нулю, а на A есть наблюдения $y(\cdot)$, “сглаженное” с помощью функции $a(\cdot)$.

На множестве $A \setminus \Omega_{h(\Delta)}$ (напомним $h(\Delta) = \max\{\lambda(A), h(\delta)\}$) можно положить $a(\cdot) = 0$. Действительно, в этом случае из неравенства (20), равносильного соотношению (3), следует, что на этом множестве должно выполняться условие $f(\xi) \leq \lambda_2$, которое верно, поскольку $\lambda_2 = h(\Delta)$. Таким образом, для каждого $a(\cdot)$, удовлетворяющего (3), наиболее экономный оптимальный метод имеет вид

$$\widehat{\varphi}_a(y(\cdot))(t) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\Omega_{h(\Delta)}} (i\xi)^\alpha a(\xi) y(\xi) e^{i\xi \cdot t} d\xi.$$

Приведем в конце еще явное выражение для оптимального метода, соответствующего функции $a(\cdot)$, обращающей левую часть (3) в ноль:

$$\begin{aligned} & \widehat{\varphi}(y(\cdot))(t) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\Omega_{h(\Delta)}} (i\xi)^\alpha \left(1 + \frac{\bar{\alpha}\Delta^2}{r} \frac{1}{\widehat{\delta}^{2/r} - \Delta^{2/r}} (1 + \|\xi\|^2)^r\right)^{-1} y(\xi) e^{i\xi \cdot t} d\xi. \end{aligned}$$

Перед формулировкой второй теоремы приведем еще некоторые определения. Понятно, что функция $m: \lambda \mapsto \text{mes } \Omega_\lambda$ монотонно убывает на $(0, \widehat{\lambda}]$, $m(\lambda) \rightarrow \infty$ при $\lambda \rightarrow 0$ и $m(\widehat{\lambda}) = 0$. Для любого $\sigma > 0$ обозначим через $\lambda(\sigma)$ единственное решение уравнения $m(\lambda) = \sigma$.

Теорема 2. Пусть $\alpha \in \mathbb{R}_+^d$, $0 < \bar{\alpha} < r$, $\delta \geq 0$, $\sigma > 0$ и $\lambda(\sigma, \delta) = \max(\lambda(\sigma), h(\delta))$. Тогда любое множество, совпадающее с $\Omega_{\lambda(\sigma, \delta)}$ с точностью до множества меры нуль, является оптимальным.

Отметим, что если $\delta = 0$, то $\lambda(\sigma, \delta) = \lambda(\sigma)$, поскольку $h(0) = 0$ и тем самым $\Omega_{\lambda(\sigma)}$ — оптимальное множество, и чем больше σ , тем меньше погрешность оптимального восстановления, равная $\sqrt{\lambda(\sigma)}$.

Если же $\delta > 0$ и $\sigma > 0$ таковы, что $\lambda(\sigma) \leq h(\delta)$, то информация о преобразовании Фурье за пределами множества $\Omega_{h(\delta)}$ оказывается лишней — погрешность оптимального восстановления не уменьшается.

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Доказательство теоремы 1. Покажем прежде всего, что если $x(\cdot) \in \mathcal{H}_2^r(\mathbb{R}^d)$, то $D^\alpha x(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$. Действительно, согласно определениям $\hat{\lambda}$ и пространства $\mathcal{H}_2^r(\mathbb{R}^d)$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\alpha} |Fx(\xi)|^2 d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\xi|^{2\alpha}}{(1 + \|\xi\|^2)^r} (1 + \|\xi\|^2)^r |Fx(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq \hat{\lambda} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} (1 + \|\xi\|^2)^r |Fx(\xi)|^2 d\xi < \infty. \end{aligned}$$

Далее, по определению α -ой производной и теореме Планшереля

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\alpha} |Fx(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} |D^\alpha x(t)|^2 dt,$$

т. е. $D^\alpha x(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$.

Теперь оценим снизу величину погрешности оптимального восстановления $E(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), A, \delta)$. Покажем, что она не меньше значения экстремальной задачи

$$\|D^\alpha x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \rightarrow \max, \quad \|Fx(\cdot)\|_{\hat{L}_2(A)} \leq \delta, \quad \|x(\cdot)\|_{\mathcal{H}_2^r(\mathbb{R}^d)} \leq 1, \quad (4)$$

т. е. верхней грани максимизируемого функционала при данных ограничениях (при этом, если $\delta = 0$, то первое ограничение задачи имеет вид $Fx(\cdot) = 0$ для п. в. $\xi \in A$).

Пусть $x_0(\cdot)$ — допустимая функция в (4) (т. е. $x_0(\cdot)$ удовлетворяет ограничениям задачи), тогда, очевидно, функция $-x_0(\cdot)$ также допустима и мы имеем для любого $\varphi: \hat{L}_2(A) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)$ ($\varphi(0)(\cdot)$ —

значение отображения φ на нулевой функции)

$$\begin{aligned} 2\|D^\alpha x_0(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \|D^\alpha x_0(\cdot) - \varphi(0)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\quad + \|D^\alpha(-x_0)(\cdot) - \varphi(0)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq 2 \sup_{\substack{x(\cdot) \in H_2^r(\mathbb{R}^d) \\ \|Fx(\cdot)\|_{\widehat{L}_2(A)} \leq \delta}} \|D^\alpha x(\cdot) - \varphi(0)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq 2 \sup_{\substack{x(\cdot) \in H_2^r(\mathbb{R}^d), y(\cdot) \in \widehat{L}_2(A) \\ \|Fx(\cdot) - y(\cdot)\|_{\widehat{L}_2(A)} \leq \delta}} \|D^\alpha x(\cdot) - \varphi(y(\cdot))(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

Переходя слева к верхней грани по всем допустимым функциям в (4), а справа к нижней грани по всем методам φ , получаем требуемое.

Теперь оценим снизу значение задачи (4). Для этого удобно переписать задачу в образах Фурье. Согласно теореме Планшереля квадрат значения задачи (4) равен значению такой задачи

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\alpha} |Fx(\xi)|^2 d\xi \rightarrow \max, \quad \frac{1}{(2\pi)^d} \int_A |Fx(\xi)|^2 d\xi \leq \delta^2, \\ \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} (1 + \|\xi\|^2)^r |Fx(\xi)|^2 d\xi \leq 1. \quad (5) \end{aligned}$$

Если $\delta = 0$, то первое ограничение в этой задаче имеет вид $Fx(\cdot) = 0$ для п. в. $\xi \in A$.

Рассмотрим отдельно несколько случаев.

1) $\delta \geq \widehat{\delta}$. Положим

$$\widehat{\xi} = \left(\sqrt{\frac{\alpha_1}{r - \bar{\alpha}}}, \dots, \sqrt{\frac{\alpha_d}{r - \bar{\alpha}}} \right),$$

где, напомним, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$. Для каждого $\varepsilon > 0$ обозначим

$$\widehat{\xi}_\varepsilon = \left(1 + \frac{\varepsilon}{\|\widehat{\xi}\|} \right) \widehat{\xi},$$

рассмотрим шар $B_\varepsilon = \{\xi \in \mathbb{R}^d \mid \|\xi - \widehat{\xi}_\varepsilon\| \leq \varepsilon\}$ и определим на \mathbb{R}^d функции

$$z_\varepsilon(\xi) = \begin{cases} (2\pi)^{d/2} \left(\int_{B_\varepsilon} (1 + \|\eta\|^2)^r d\eta \right)^{-1/2}, & \xi \in B_\varepsilon, \\ 0, & \xi \notin B_\varepsilon. \end{cases}$$

Очевидно, что $z_\varepsilon(\cdot) \in \widehat{L}_2(\mathbb{R}^d)$. Положим $x_\varepsilon(\cdot) = F^{-1}z_\varepsilon(\cdot)$ и покажем, что функции $x_\varepsilon(\cdot)$ допустимы в задаче (5).

Второе ограничение в этой задаче, очевидно, выполнено. Если $A \cap B_\varepsilon = \emptyset$, то первое ограничение тривиальным образом верно.

Пусть $A \cap B_\varepsilon \neq \emptyset$. Легко проверить, что $(1 + \|\widehat{\xi}\|^2)^{-r} = \widehat{\delta}^2$ и что $\|\xi\| \geq \|\widehat{\xi}\|$ для всех $\xi \in B_\varepsilon$. Учитывая это, будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_A |Fx_\varepsilon(\xi)|^2 d\xi &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{A \cap B_\varepsilon} |Fx_\varepsilon(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq \left(\int_{B_\varepsilon} (1 + \|\eta\|^2)^r d\eta \right)^{-1} \text{mes } B_\varepsilon \leq \left(\int_{B_\varepsilon} (1 + \|\widehat{\xi}\|^2)^r d\eta \right)^{-1} \text{mes } B_\varepsilon \\ &= (1 + \|\widehat{\xi}\|^2)^{-r} = \widehat{\delta}^2 \leq \delta^2. \end{aligned}$$

Итак, для любого $\varepsilon > 0$ функция $x_\varepsilon(\cdot)$ допустима в задаче (4) и значит, значение этой задачи не меньше

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\alpha} |Fx_\varepsilon(\xi)|^2 d\xi = \left(\int_{B_\varepsilon} (1 + \|\eta\|^2)^r d\eta \right)^{-1} \int_{B_\varepsilon} |\xi|^{2\alpha} d\xi.$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$ эта величина стремится (по теореме о среднем) к величине

$$f(\widehat{\xi}) = \frac{|\widehat{\xi}|^{2\alpha}}{(1 + \|\widehat{\xi}\|^2)^r},$$

которая равна $\widehat{\lambda}$, поскольку в точке $\widehat{\xi}$ достигается максимум функции f (что отмечено перед формулировкой теоремы).

Поскольку квадрат погрешности оптимального восстановления не меньше значения задачи (4), то при $\delta \geq \widehat{\delta}$ получена оценка

$$E(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), A, \delta) \geq \sqrt{\widehat{\lambda}}. \quad (6)$$

Величина справа совпадает с величиной погрешности оптимального восстановления, указанной в теореме, так как в рассматриваемом случае $\Delta = \widehat{\delta}$ и $h(\widehat{\delta}) = \widehat{\lambda}$.

2) $0 < \delta < \widehat{\delta}$, $\lambda(A) \leq h(\delta)$. Пусть

$$\widetilde{\xi} = \left(\sqrt{\frac{\alpha_1(1 - \delta^{2/r})}{\bar{\alpha} \delta^{2/r}}}, \dots, \sqrt{\frac{\alpha_d(1 - \delta^{2/r})}{\bar{\alpha} \delta^{2/r}}} \right).$$

Для каждого $\varepsilon > 0$ обозначим

$$\widetilde{\xi}_\varepsilon = \left(1 - \frac{\varepsilon}{\|\widetilde{\xi}\|} \right) \widetilde{\xi}$$

и рассмотрим шар $\widetilde{B}_\varepsilon = \{ \xi \in \mathbb{R}^d \mid \|\xi - \widetilde{\xi}_\varepsilon\| \leq \varepsilon \}$.

Поскольку $\delta < \widehat{\delta}$ и тем самым $r(1 - \delta^{2/r})/\bar{\alpha} > 1$, то

$$\begin{aligned} f(\widetilde{\xi}) &= \frac{|\widetilde{\xi}|^{2\alpha}}{(1 + \|\widetilde{\xi}\|^2)^r} = \frac{\alpha^\alpha}{r\bar{\alpha}^{\bar{\alpha}-1}} (1 - \delta^{2/r})^{\bar{\alpha}-1} \delta^{2(1-\bar{\alpha}/r)} \\ &= \frac{r}{\bar{\alpha}} (1 - \delta^{2/r}) h(\delta) > h(\delta) \geq \lambda(A). \end{aligned}$$

Следовательно, $\tilde{\xi} \in \text{int } \Omega_{\lambda(A)}$, поэтому $B_\varepsilon \subset \text{int } \Omega_{\lambda(A)}$ для достаточно малых ε и значит, $\text{mes}(A \cap \tilde{B}_\varepsilon) = \text{mes } \tilde{B}_\varepsilon$ для таких ε . Определим на \mathbb{R}^d функции

$$z_\varepsilon(\xi) = \begin{cases} (2\pi)^{d/2} \frac{\delta}{\sqrt{\text{mes } \tilde{B}_\varepsilon}}, & \xi \in \tilde{B}_\varepsilon, \\ 0, & \xi \notin \tilde{B}_\varepsilon. \end{cases}$$

Ясно, что $z_\varepsilon(\cdot) \in \widehat{L}_2(\mathbb{R}^d)$. Положим $x_\varepsilon(\cdot) = F^{-1}z_\varepsilon(\cdot)$ и покажем, что функции $x_\varepsilon(\cdot)$ допустимы в задаче (5). Первое ограничение в задаче выполняется очевидным образом. Далее элементарно проверяется, что $\|\xi\| \leq \|\tilde{\xi}\|$, если $\xi \in \tilde{B}_\varepsilon$, а $\delta^2(1 + \|\tilde{\xi}\|^2)^r = 1$ и поэтому

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} (1 + \|\xi\|^2)^r |Fx_\varepsilon(\xi)|^2 d\xi &= \frac{\delta^2}{\text{mes } \tilde{B}_\varepsilon} \int_{\tilde{B}_\varepsilon} (1 + \|\xi\|^2)^r d\xi \\ &\leq \frac{\delta^2}{\text{mes } \tilde{B}_\varepsilon} (1 + \|\tilde{\xi}\|^2)^r \text{mes } \tilde{B}_\varepsilon = \delta^2(1 + \|\tilde{\xi}\|^2)^r = 1. \end{aligned}$$

Итак, функции $x_\varepsilon(\cdot)$ допустимы в задаче (4) и значит, для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ значение этой задачи не меньше

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\alpha} |Fx_\varepsilon(\xi)|^2 d\xi &= \frac{\delta^2}{\text{mes } \tilde{B}_\varepsilon} \int_{\tilde{B}_\varepsilon} |\xi|^{2\alpha} d\xi \\ &= \frac{1}{(1 + \|\tilde{\xi}\|^2)^r \text{mes } \tilde{B}_\varepsilon} \int_{\tilde{B}_\varepsilon} |\xi|^{2\alpha} d\xi. \end{aligned}$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$ эта величина стремится (по теореме о среднем) к числу

$$\frac{|\tilde{\xi}|^{2\alpha}}{(1 + \|\tilde{\xi}\|^2)^r} = \frac{\alpha^\alpha (1 - \delta^{2/r})^{\bar{\alpha}}}{\bar{\alpha}^{\bar{\alpha}} \delta^{2\bar{\alpha}/r}} \delta^2 = \left(\frac{r}{\bar{\alpha}} \left(\widehat{\delta}^{2/r} - \delta^{2/r} \right) + 1 \right) h(\delta).$$

Тогда, по тем же соображениям, что и выше, для рассматриваемого случая доказана оценка

$$E(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), A, \delta) \geq \sqrt{\left(\frac{r}{\bar{\alpha}} \left(\widehat{\delta}^{2/r} - \delta^{2/r} \right) + 1 \right) h(\delta)}, \quad (7)$$

правая часть которой совпадает с величиной погрешности оптимального восстановления, указанной в теореме, поскольку в рассматриваемом случае $\Delta = \delta$.

3) $0 \leq \delta < \widehat{\delta}$, $\lambda(A) > h(\delta)$. Пусть сначала $\lambda(A) = \widehat{\lambda}$. Тогда для каждого $0 < \lambda < \widehat{\lambda}$ справедливо неравенство $\text{mes}(A \cap \Omega_\lambda) < \text{mes } \Omega_\lambda$ и значит, для таких λ

$$\text{mes}(\Omega_\lambda \cap (\mathbb{R}^d \setminus A)) = \text{mes}(\Omega_\lambda \setminus A) = \text{mes } \Omega_\lambda - \text{mes}(A \cap \Omega_\lambda) > 0.$$

Обозначим $G_\lambda = \Omega_\lambda \cap (\mathbb{R}^d \setminus A)$ и определим функции на \mathbb{R}^d по правилу

$$z_\lambda(\xi) = \begin{cases} (2\pi)^{d/2} \left(\int_{G_\lambda} (1 + \|\eta\|^2)^r d\eta \right)^{-1/2}, & \xi \in G_\lambda, \\ 0, & \xi \notin G_\lambda. \end{cases}$$

Ясно, что $z_\lambda(\cdot) \in \widehat{L}_2(\mathbb{R}^d)$. Положим $x_\lambda(\cdot) = F^{-1}z_\lambda(\cdot)$. Элементарно проверяется, что функции $x_\lambda(\cdot)$ допустимы в задаче (5). Тогда для всех указанных λ (учитывая, что $f(\xi) \geq \lambda$, если $\xi \in \Omega_\lambda$) имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\alpha} |Fx_\lambda(\xi)|^2 d\xi &= \left(\int_{G_\lambda} (1 + \|\eta\|^2)^r d\eta \right)^{-1} \int_{G_\lambda} |\xi|^{2\alpha} d\xi \\ &= \left(\int_{G_\lambda} (1 + \|\eta\|^2)^r d\eta \right)^{-1} \int_{G_\lambda} \frac{|\xi|^{2\alpha}}{(1 + \|\xi\|^2)^r} (1 + \|\xi\|^2)^r d\xi \\ &\geq \left(\int_{G_\lambda} (1 + \|\eta\|^2)^r d\eta \right)^{-1} \lambda \int_{G_\lambda} (1 + \|\xi\|^2)^r d\xi = \lambda \end{aligned}$$

и тем самым значение задачи (5) не меньше λ . Переходя к пределу при $\lambda \rightarrow \widehat{\lambda}$, получаем, что значение этой задачи не меньше $\widehat{\lambda}$.

Снова, поскольку квадрат погрешности оптимального восстановления не меньше значения задачи (5), то для случая $\lambda(A) = \widehat{\lambda}$ доказана оценка

$$E(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), A, \delta) \geq \sqrt{\widehat{\lambda}}, \quad (8)$$

где, снова величина справа совпадает с величиной погрешности оптимального восстановления из формулировки теоремы, так как в рассматриваемой ситуации $\Delta = \widehat{\delta}$.

Пусть теперь $\lambda(A) < \widehat{\lambda}$. Покажем сначала, что для всех $0 < \varepsilon < \lambda(A)$ мера множества

$$F_\varepsilon = (\mathbb{R}^d \setminus A) \cap (\Omega_{\lambda(A)-\varepsilon} \setminus \Omega_{\lambda(A)})$$

положительна. Предположим, что $\text{mes } F_\varepsilon = 0$ для некоторого ε . Тогда отсюда, учитывая, что $\Omega_{\lambda(A)} \subset \Omega_{\lambda(A)-\varepsilon}$, получим

$$\begin{aligned} \text{mes}(A \cap (\Omega_{\lambda(A)-\varepsilon} \setminus \Omega_{\lambda(A)})) &= \text{mes}(\Omega_{\lambda(A)-\varepsilon} \setminus \Omega_\lambda) = \text{mes } \Omega_{\lambda(A)-\varepsilon} \\ &\quad - \text{mes}(\Omega_{\lambda(A)} \cap \Omega_{\lambda(A)-\varepsilon}) = \text{mes } \Omega_{\lambda(A)-\varepsilon} - \text{mes } \Omega_{\lambda(A)}. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \text{mes}(A \cap (\Omega_{\lambda(A)-\varepsilon} \setminus \Omega_{\lambda(A)})) &= \text{mes}((A \cap \Omega_{\lambda(A)-\varepsilon}) \setminus \Omega_{\lambda(A)}) \\ &= \text{mes}(A \cap \Omega_{\lambda(A)-\varepsilon}) - \text{mes}(A \cap \Omega_{\lambda(A)}). \end{aligned}$$

Из определения $\lambda(A)$ легко вытекает, что $\text{mes}(A \cap \Omega_{\lambda(A)}) = \text{mes } \Omega_{\lambda(A)}$. Тогда из полученных выражений следует равенство $\text{mes}(A \cap \Omega_{\lambda(A)-\varepsilon}) = \text{mes } \Omega_{\lambda(A)-\varepsilon}$, которое противоречит определению $\lambda(A)$. Итак, $\text{mes } F_\varepsilon \neq 0$ для всех $0 < \varepsilon < \lambda(A)$.

Пусть сначала $\delta = 0$. Для указанных ε определим функции на \mathbb{R}^d по правилу

$$z_\varepsilon(\xi) = \begin{cases} (2\pi)^{d/2} \left(\int_{F_\varepsilon} (1 + \|\eta\|^2)^r d\eta \right)^{-1/2}, & \xi \in F_\varepsilon, \\ 0, & \xi \notin F_\varepsilon. \end{cases}$$

Ясно, что $z_\varepsilon(\cdot) \in \widehat{L}_2(\mathbb{R}^d)$. Положим $x_\varepsilon(\cdot) = F^{-1}z_\varepsilon(\cdot)$. Элементарно проверяется, что функции $x_\varepsilon(\cdot)$ допустимы в задаче (5). Те же рассуждения, что и в начале этого пункта показывают, что

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\alpha} |Fx_\varepsilon(\xi)|^2 d\xi \geq \lambda(A) - \varepsilon,$$

откуда, как и раньше, следует, что

$$E(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), A, 0) \geq \sqrt{\lambda(A)}. \quad (9)$$

Величина справа совпадает с величиной погрешности оптимального восстановления из формулировки теоремы, так как в рассматриваемом случае $\delta = 0$ и $h(\Delta) = \lambda(A)$.

Пусть теперь $\delta > 0$. Положим

$$\xi' = \left(\sqrt{\frac{\alpha_1(1 - \Delta^{2/r})}{\bar{\alpha} \Delta^{2/r}}}, \dots, \sqrt{\frac{\alpha_d(1 - \Delta^{2/r})}{\bar{\alpha} \Delta^{2/r}}} \right).$$

Для каждого $\varepsilon > 0$ обозначим

$$\xi'_\varepsilon = \left(1 - \frac{\varepsilon}{\|\xi'\|} \right) \xi'$$

и рассмотрим шар $B'_\varepsilon = \{ \xi \in \mathbb{R}^d \mid \|\xi - \xi'_\varepsilon\| \leq \varepsilon \}$.

Так как $\lambda(A) < \widehat{\lambda}$, то $\Delta = h^{-1}(\lambda(A)) < h^{-1}(\widehat{\lambda}) = \widehat{\delta}$ и тогда аналогично предыдущему случаю имеем

$$\begin{aligned} f(\xi') &= \frac{|\xi'|^{2\alpha}}{(1 + \|\xi'\|^2)^r} = \frac{\alpha^\alpha}{r\bar{\alpha}^{\alpha-1}} (1 - \Delta^{2/r})^{\bar{\alpha}-1} \Delta^{2(1-\bar{\alpha}/r)} \\ &= \frac{r}{\bar{\alpha}} (1 - \Delta^{2/r}) h(\Delta) > h(\Delta) = \lambda(A). \end{aligned}$$

Это означает, что $\xi' \in \text{int } \Omega_{\lambda(A)}$. Следовательно, для достаточно малых $\varepsilon > 0$ шар B'_ε принадлежит $\Omega_{\lambda(A)}$ и тем самым $B'_\varepsilon \cap F_\varepsilon = \emptyset$.

Простая проверка показывает, что $\|\xi\| \leq \|\xi'\|$, если $\xi \in B'_\varepsilon$ и $(1 + \|\xi'\|^2)^r = 1/\Delta^2$. Далее, поскольку $\lambda(A) > h(\delta)$, то $\Delta = h^{-1}(\lambda(A)) > \delta$ и поэтому

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2}{\text{mes } B'_\varepsilon} \int_{B'_\varepsilon} (1 + \|\xi\|^2)^r d\xi &\leq \frac{\delta^2}{\text{mes } B'_\varepsilon} \int_{B'_\varepsilon} (1 + \|\xi'\|^2)^r d\xi \\ &= \delta^2 (1 + \|\xi'\|^2)^r = \frac{\delta^2}{\Delta^2} < 1. \end{aligned}$$

Обозначим через C_ε левую часть этого неравенства и для указанных выше ε определим функции на \mathbb{R}^d по правилу

$$z_\varepsilon(\xi) = \begin{cases} (2\pi)^{d/2} \frac{\delta}{\sqrt{\text{mes } B'_\varepsilon}}, & \xi \in B'_\varepsilon, \\ (2\pi)^{d/2} \sqrt{1 - C_\varepsilon} \left(\int_{F_\varepsilon} (1 + \|\eta\|^2)^r d\eta \right)^{-1/2}, & \xi \in F_\varepsilon, \\ 0, & \xi \notin B'_\varepsilon \cup F_\varepsilon. \end{cases}$$

Ясно, что $z_\varepsilon(\cdot) \in \widehat{L}_2(\mathbb{R}^d)$. Положим $x_\varepsilon(\cdot) = F^{-1}z_\varepsilon(\cdot)$ и покажем, что функции $x_\varepsilon(\cdot)$ допустимы в задаче (5).

Действительно, так как $B'_\varepsilon \subset \Omega_{\lambda(A)}$, то $\text{mes } B'_\varepsilon = \text{mes}(A \cap B'_\varepsilon)$ и следовательно,

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int_A |Fx_\varepsilon(\xi)|^2 d\xi = \frac{\delta^2}{\text{mes } B'_\varepsilon} \int_{A \cap B'_\varepsilon} d\xi = \frac{\delta^2}{\text{mes } B'_\varepsilon} \text{mes}(A \cap B'_\varepsilon) = \delta^2.$$

Далее

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} (1 + \|\xi\|^2)^r |Fx_\varepsilon(\xi)|^2 d\xi = \frac{\delta^2}{\text{mes } B'_\varepsilon} \int_{B'_\varepsilon} (1 + \|\xi\|^2)^r d\xi \\ & + (1 - C_\varepsilon) \left(\int_{F_\varepsilon} (1 + \|\eta\|^2)^r d\eta \right)^{-1} \int_{F_\varepsilon} (1 + \|\xi\|^2)^r d\xi = C_\varepsilon + 1 - C_\varepsilon = 1 \end{aligned}$$

и таким образом, функции $x_\varepsilon(\cdot)$ для достаточно малых ε допустимы в задаче (5). Тогда для всех таких ε ее значение не меньше

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\alpha} |Fx_\varepsilon(\xi)|^2 d\xi = \frac{\delta^2}{\text{mes } B'_\varepsilon} \int_{B'_\varepsilon} |\xi|^{2\alpha} d\xi \\ & + (1 - C_\varepsilon) \left(\int_{F_\varepsilon} (1 + \|\eta\|^2)^r d\eta \right)^{-1} \int_{F_\varepsilon} |\xi|^{2\alpha} d\xi. \quad (10) \end{aligned}$$

Поступая также как и выше, получаем, что произведение двух последних сомножителей во втором слагаемом справа не меньше $\lambda(A) - \varepsilon$. Оценивая первое слагаемое и C_ε по теореме о среднем, получаем, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ все выражение справа в (10) стремится к величине

$$\begin{aligned} & \delta^2 |\xi'|^{2\alpha} + (1 - \delta^2 (1 + \|\xi'\|^2)^r) \lambda(A) = \frac{\alpha^\alpha (1 - \Delta^{2/r})^{\bar{\alpha}}}{\bar{\alpha}^{\bar{\alpha}} \Delta^{2\bar{\alpha}/r}} \delta^2 \\ & + \left(1 - \frac{\delta^2}{\Delta^2} \right) \lambda(A) = \left(\frac{r\delta^2}{\bar{\alpha}\Delta^2} \left(\widehat{\delta}^{2/r} - \Delta^{2/r} \right) + 1 \right) \lambda(A). \end{aligned}$$

Следовательно, для случая $0 \leq \delta < \widehat{\delta}$, $\lambda(A) > h(\delta)$ получена оценка

$$E(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), A, \delta) \geq \sqrt{\left(\frac{r\delta^2}{\bar{\alpha}\Delta^2} \left(\widehat{\delta}^{2/r} - \Delta^{2/r} \right) + 1 \right) \lambda(A)} \quad (11)$$

правая часть которой совпадает с величиной погрешности оптимального восстановления из формулировки теоремы, так как в рассматриваемом случае $h(\Delta) = \lambda(A)$.

Итак, для всех $\delta \geq 0$ и измеримых множеств $A \subset \mathbb{R}^d$ таких, что $\delta + \lambda(A) \neq 0$ получена оценка снизу для погрешности оптимального восстановления (см. (6) – (9) и (11)), которая совпадает с величиной погрешности оптимального восстановления приведенной в формулировке теоремы. Займемся теперь оценкой сверху этой величины и построением оптимальных методов.

Пусть $\delta \geq 0$ и $A \subset \mathbb{R}^d$ фиксированы и $\delta + \lambda(A) \neq 0$. Оптимальность метода $\varphi: \text{Im } I^\alpha(A) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)$ означает, что его погрешность, т. е. значение задачи

$$\begin{aligned} \|D^\alpha x(\cdot) - \varphi(y(\cdot))(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \rightarrow \max, \quad x(\cdot) \in H_2^r(\mathbb{R}^d), \\ \|Fx(\cdot) - y(\cdot)\|_{\widehat{L}_2(A)} \leq \delta, \quad y(\cdot) \in \widehat{L}_2(A), \end{aligned} \quad (12)$$

совпадает с $E(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), A, \delta)$.

Если $\delta = 0$, то задача переписывается так

$$\|D^\alpha x(\cdot) - \varphi(Fx(\cdot)|_A)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \rightarrow \max, \quad x(\cdot) \in H_2^r(\mathbb{R}^d). \quad (13)$$

Рассмотрим отдельно несколько случаев.

(а) $\delta = 0$. Поскольку отображение $x(\cdot) \mapsto D^\alpha x(\cdot)$ в образах Фурье есть умножение функции $\xi \mapsto (i\xi)^\alpha$ на $Fx(\cdot)$, то и оптимальные методы естественно искать среди подобных отображений. Каждой измеримой функции $a(\cdot)$ на A такой, что $a(\cdot)\sqrt{f(\cdot)} \in L_\infty(A)$ сопоставим отображение $\varphi_a: \text{Im } I^0(A) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)$, действующее в образах Фурье по правилу: $F\varphi_a(y(\cdot))(\xi) = (i\xi)^\alpha \tilde{a}(\xi) \tilde{y}(\xi)$ для п. в. $\xi \in \mathbb{R}^d$, где $\tilde{a}(\cdot) = a(\cdot)$, $\tilde{y}(\cdot) = y(\cdot)$ на A и $\tilde{a}(\cdot) = 0$, $\tilde{y}(\cdot) = 0$ вне A . Определение корректно, так как если $y(\cdot) \in \text{Im } I^0(A)$, то $y(\cdot) = Fx(\cdot)|_A$ для некоторого $x(\cdot) \in \mathcal{H}_2^r(\mathbb{R}^d)$ и тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_A |F\varphi_a(y(\cdot))(\xi)|^2 d\xi &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_A |\xi|^{2\alpha} |a(\xi)|^2 |Fx(\xi)|^2 d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_A |a(\xi)|^2 \frac{|\xi|^{2\alpha}}{(1 + \|\xi\|^2)^r} (1 + \|\xi\|^2)^r |Fx(\xi)|^2 d\xi \leq \\ &\| |a(\cdot)|^2 f(\cdot) \|_{L_\infty(A)} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_A (1 + \|\xi\|^2)^r |Fx(\xi)|^2 d\xi < \infty. \end{aligned}$$

Таким образом, согласно теореме Планшереля, $\varphi_a(y(\cdot))(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$.

Пусть φ_a — такое отображение. Оценим квадрат максимизируемого функционала в (13) с $\varphi = \varphi_a$, переходя по теореме Планшереля к образам Фурье ($f(\xi) \leq \lambda(A)$, если $\xi \in \mathbb{R}^d \setminus A$)

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |(i\xi)^\alpha Fx(\xi) - \varphi_a(Fx(\cdot)|_A)(\xi)|^2 d\xi \\
&= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_A |(i\xi)^\alpha Fx(\xi) - (i\xi)^\alpha a(\xi) Fx(\xi)|^2 d\xi \\
&\quad + \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d \setminus A} |\xi|^{2\alpha} |Fx(\xi)|^2 d\xi \\
&= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_A |1 - a(\xi)|^2 \frac{|\xi|^{2\alpha}}{(1 + \|\xi\|^2)^r} (1 + \|\xi\|^2)^r |Fx(\xi)|^2 d\xi \\
&\quad + \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d \setminus A} \frac{|\xi|^{2\alpha}}{(1 + \|\xi\|^2)^r} (1 + \|\xi\|^2)^r |Fx(\xi)|^2 d\xi \\
&\leq \operatorname{vraisup}_{\xi \in A} |1 - a(\xi)|^2 f(\xi) \frac{1}{(2\pi)^d} \int_A (1 + \|\xi\|^2)^r |Fx(\xi)|^2 d\xi \\
&\quad + \lambda(A) \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d \setminus A} (1 + \|\xi\|^2)^r |Fx(\xi)|^2 d\xi. \quad (14)
\end{aligned}$$

Отсюда видно, что если

$$|1 - a(\xi)|^2 f(\xi) \leq \lambda(A) \quad (15)$$

для п. в. $\xi \in \mathbb{R}^d$, то величина справа в (14) не превосходит $\lambda(A)$ и значит, погрешность метода φ_a не превосходит $\sqrt{\lambda(A)}$. Тогда, с учетом (9) имеем

$$\sqrt{\lambda(A)} \leq E(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), A, 0) \leq e(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), A, 0, \varphi_a) \leq \sqrt{\lambda(A)},$$

т. е. $E(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), A, 0) = \sqrt{\lambda(A)}$, а φ_a — оптимальный метод.

Существование таких функций $a(\cdot)$ очевидно. Например, подходит функция, равная тождественно единице.

Если $\lambda(A) = \hat{\lambda}$, то $f(\xi) \leq \hat{\lambda}$ для любого $\xi \in \mathbb{R}^d$ и (15) выполняется с $a(\cdot) = 0$, т. е. нулевой метод оптимален в данном случае.

Если функция $\xi \mapsto (i\xi)^\alpha a(\xi) Fx(\xi)$ принадлежит $L_1(A)$ (например, если мера A конечна), то выражение для оптимального метода, приведенное в теореме есть формула обращения преобразования Фурье. В противном случае интеграл для каждого $t \in \mathbb{R}^d$ надо понимать в смысле главного значения.

b) $\delta > 0$, $\lambda(A) = \hat{\lambda}$. Покажем, что в этой ситуации нулевой метод является оптимальным.

В самом деле,

$$\begin{aligned} E(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), A, \delta) &\leq e(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), A, \delta, 0) \\ &= \sup_{\substack{x(\cdot) \in H_2^r(\mathbb{R}^d), y(\cdot) \in \widehat{L}_2(A) \\ \|Fx(\cdot) - y(\cdot)\|_{\widehat{L}_2(A)} \leq \delta}} \|D^\alpha x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \sup_{x(\cdot) \in H_2^r(\mathbb{R}^d)} \|D^\alpha x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned} \quad (16)$$

Согласно теореме Планшереля квадрат величины справа равен значению такой задачи

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\alpha} |Fx(\xi)|^2 d\xi \rightarrow \max, \\ \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} (1 + \|\xi\|^2)^r |Fx(\xi)|^2 d\xi \leq 1. \end{aligned} \quad (17)$$

Отсюда, в силу определения $\widehat{\lambda}$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\alpha} |Fx(\xi)|^2 d\xi \\ = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\xi|^{2\alpha}}{(1 + \|\xi\|^2)^r} (1 + \|\xi\|^2)^r |Fx(\xi)|^2 d\xi \leq \widehat{\lambda}, \end{aligned}$$

т. е. значение задачи (17) не превосходит $\widehat{\lambda}$. Следовательно, для случаев $\delta \geq \widehat{\delta}$ и $0 \leq \delta < \widehat{\delta}$, $\lambda(A) = \widehat{\lambda}$ (см. (6) и (8)) имеем

$$\sqrt{\widehat{\lambda}} \leq E(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), A, \delta) \leq e(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), A, \delta, 0) \leq \sqrt{\widehat{\lambda}},$$

т. е. $E(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), A, \delta) = \sqrt{\widehat{\lambda}}$ и $\widehat{\varphi} = 0$ — оптимальный метод.

с) $0 < \delta < \widehat{\delta}$, $0 \leq \lambda(A) < \widehat{\lambda}$. Для этих случаев выше были получены оценки снизу для погрешности оптимального восстановления (см. (7) и (11)), которые, как нетрудно проверить, можно записать в виде одной формулы:

$$E(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), A, \delta) \geq \sqrt{\lambda_1 \delta^2 + \lambda_2}, \quad (18)$$

причем $\lambda_i > 0$, $i = 1, 2$.

Пусть $a(\cdot)$ — измеримая функция на A такая, что функция $\xi \mapsto (i\xi)^\alpha a(\xi)$ принадлежит $L_\infty(A)$. Оптимальные методы, как и выше, будем искать среди таких отображений $\varphi_a: \text{Im } I^\delta(A) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)$, которые в образах Фурье действуют по правилу $F\varphi_a(y(\cdot))(\xi) = (i\xi)^\alpha \widetilde{a}(\xi) \widetilde{y}(\xi)$ для п. в. $\xi \in \mathbb{R}^d$, где $\widetilde{a}(\cdot) = a(\cdot)$, $\widetilde{y}(\cdot) = y(\cdot)$ на A и $\widetilde{a}(\cdot) = 0$, $\widetilde{y}(\cdot) = 0$ вне A . Ясно, что $\varphi_a(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$.

Пусть φ_a — такой метод. Оценим значение задачи (12) в этой ситуации. Переходя по теореме Планшереля к образам Фурье, получаем, что квадрат ее значения равен значению следующей задачи

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi)^d} \int_A |(i\xi)^\alpha Fx(\xi) - (i\xi)^\alpha a(\xi)y(\xi)|^2 d\xi \\ & \quad + \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d \setminus A} |\xi|^{2\alpha} |Fx(\xi)|^2 d\xi \rightarrow \max, \\ & \quad \frac{1}{(2\pi)^d} \int_A |Fx(\xi) - y(\xi)|^2 d\xi \leq \delta^2, \\ & \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} (1 + \|\xi\|^2)^r |Fx(\xi)|^2 d\xi \leq 1, \quad x(\cdot) \in \mathcal{H}_2^r(\mathbb{R}^d), \quad y(\cdot) \in \widehat{L}_2(A). \end{aligned} \tag{19}$$

Теперь оценим по неравенству Коши–Буняковского для каждого $\xi \in A$ выражение под знаком первого интеграла в максимизируемом функционале:

$$\begin{aligned} & |(i\xi)^\alpha Fx(\xi) - (i\xi)^\alpha a(\xi)y(\xi)|^2 \\ & \quad = |\xi|^{2\alpha} |(1 - a(\xi))Fx(\xi) + a(\xi)(Fx(\xi) - y(\xi))|^2 \\ & \leq |\xi|^{2\alpha} \left(\frac{|1 - a(\xi)|^2}{\lambda_2 (1 + \|\xi\|^2)^r} + \frac{|a(\xi)|^2}{\lambda_1} \right) (\lambda_2 (1 + \|\xi\|^2)^r |Fx(\xi)|^2 \\ & \quad \quad \quad + \lambda_1 |Fx(\xi) - y(\xi)|^2). \end{aligned}$$

Обозначим

$$S_a = \operatorname{vraisup}_{\xi \in A} |\xi|^{2\alpha} \left(\frac{|1 - a(\xi)|^2}{\lambda_2 (1 + \|\xi\|^2)^r} + \frac{|a(\xi)|^2}{\lambda_1} \right).$$

Если предположить, что $S_a \leq 1$, то интегрируя по A последнее неравенство и учитывая, что $f(\xi) \leq \lambda(A)$ за пределами A , получаем следующую оценку для максимизируемого функционала в (19)

$$\begin{aligned} & \lambda_2 \frac{1}{(2\pi)^d} \int_A (1 + \|\xi\|^2)^r |Fx(\xi)|^2 d\xi + \lambda_1 \frac{1}{(2\pi)^d} \int_A |Fx(\xi) - y(\xi)|^2 d\xi \\ & \quad + \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d \setminus A} \frac{|\xi|^{2\alpha}}{(1 + \|\xi\|^2)^r} (1 + \|\xi\|^2)^r |Fx(\xi)|^2 d\xi \\ & \leq \lambda_2 \frac{1}{(2\pi)^d} \int_A (1 + \|\xi\|^2)^r |Fx(\xi)|^2 d\xi + \lambda_1 \frac{1}{(2\pi)^d} \int_A |Fx(\xi) - y(\xi)|^2 d\xi \\ & \quad \quad \quad + \lambda(A) \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d \setminus A} (1 + \|\xi\|^2)^r |Fx(\xi)|^2 d\xi. \end{aligned}$$

Если $\lambda(A) \leq h(\delta)$, то $\Delta = \delta$ и тем самым $\lambda(A) \leq h(\Delta) = \lambda_2$. Если же $\lambda(A) \geq h(\delta)$, то $\lambda_2 = h(\Delta) = \lambda(A)$. Итак, всегда $\lambda(A) \leq \lambda_2$, и поэтому из последней оценки, учитывая ограничения в задаче (19), получаем, что максимизируемый функционал в этой задаче

не превосходит величины $\lambda_2 + \lambda_1 \delta^2$, т. е. погрешность метода φ_a не превосходит $\sqrt{\lambda_2 + \lambda_1 \delta^2}$. Вместе с (18) это означает, что метод φ_a оптимален.

Теперь покажем, что указанные функции $a(\cdot)$, для которых $S_a \leq 1$, существуют.

Если для п. в. $\xi \in \mathbb{R}^d$ выполняется неравенство

$$|\xi|^{2\alpha} \left(\frac{|1 - a(\xi)|^2}{\lambda_2 (1 + \|\xi\|^2)^r} + \frac{|\alpha(\xi)|^2}{\lambda_1} \right) \leq 1, \quad (20)$$

то $S_a \leq 1$. Далее, если

$$-|\xi|^{2\alpha} + \lambda_1 + \lambda_2 (1 + \|\xi\|^2)^r \geq 0, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d, \quad (21)$$

то нетрудно проверить (выделяя полный квадрат), что (20) равносильно соотношению, приведенному в теореме. Из него следует, что для любой измеримой функция $a(\cdot)$ ему удовлетворяющей, функция $\xi \mapsto (i\xi)^\alpha a(\xi)$ принадлежит $L_\infty(A)$ и таким образом оптимальных методов “достаточно много”.

Осталось доказать неравенство (21). Для этого рассмотрим функцию $g(\cdot)$ на полупрямой $[0, \infty)$, определенную формулой

$$g(x) = \frac{\alpha^\alpha}{\bar{\alpha}^\alpha} (x^{1/r} - 1)^{\bar{\alpha}}.$$

Простая проверка показывает, что эта функция вогнута на $[x_0, \infty)$, где $x_0 = (r/(r - \bar{\alpha}))^r$.

В нашем случае $\Delta < \hat{\delta}$, или равносильно, $\Delta^{-2} > x_0$. Непосредственный подсчет показывает, что прямая $x \mapsto \lambda_1 + \lambda_2 x$ является касательной к графику функции $g(\cdot)$ в точке Δ^{-2} и поэтому в силу вогнутости $g(\cdot)$

$$g(x) \leq \lambda_1 + \lambda_2 x, \quad \forall x \geq x_0.$$

Пусть $\xi \in \mathbb{R}^d$. Положим $x_\xi = (1 + \|\xi\|^2)^r$. Тогда

$$g(x_\xi) = \frac{\alpha^\alpha}{\bar{\alpha}^\alpha} \|\xi\|^{2\bar{\alpha}}.$$

Из теоремы о среднем арифметическом и среднем геометрическом (см. [19], стр. 29) легко следует, что

$$|\xi|^{2\alpha} \leq \frac{\alpha^\alpha}{\bar{\alpha}^\alpha} \|\xi\|^{2\bar{\alpha}}.$$

Объединяя последние соотношения, учитывая, что $x_\xi > x_0$, получаем

$$|\xi|^{2\alpha} \leq \frac{\alpha^\alpha}{\bar{\alpha}^\alpha} \|\xi\|^{2\bar{\alpha}} = g(x_\xi) \leq \lambda_1 + \lambda_2 x_\xi = \lambda_1 + \lambda_2 (1 + \|\xi\|^2)^r,$$

что и доказывает (21), а значит, и выражение для функций $a(\cdot)$ из формулировки теоремы.

Как и в случае $\delta = 0$, если функция $\xi \mapsto (i\xi)^\alpha a(\xi) Fx(\xi)$ принадлежит $L_1(A)$ (например, если мера A конечна), то выражение для

оптимального метода, приведенное в теореме есть формула обращения преобразования Фурье. В противном случае интеграл для каждого $t \in \mathbb{R}^d$ надо понимать в смысле главного значения. \square

Доказательство теоремы 2. Пусть $A_\sigma \in \mathcal{A}_\sigma$. Покажем, что $\lambda(A_\sigma) \geq \lambda(\sigma)$. Действительно, если $\lambda(A_\sigma) < \lambda(\sigma)$, то существует такое $\lambda < \lambda(\sigma)$, что $\text{mes}(A_\sigma \cap \Omega_\lambda) = \text{mes} \Omega_\lambda$ и так как $\text{mes} \Omega_\lambda > \text{mes} \Omega_{\lambda(\sigma)} = \sigma$, то $\text{mes} A_\sigma > \sigma$, что абсурдно.

Пусть $\delta = 0$. Из теоремы 1 вытекает, что

$$E(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), A_\sigma, 0) = \sqrt{\lambda(A_\sigma)} \geq \sqrt{\lambda(\sigma)}.$$

Но поскольку $\text{mes} \Omega_{\lambda(\sigma)} = \sigma$ и $\lambda(\Omega_{\lambda(\sigma)}) = \lambda(\sigma)$, то $\Omega_{\lambda(\sigma)}$ — оптимальное множество и, очевидно, что любое множество, отличающееся от $\Omega_{\lambda(\sigma)}$ лишь на множестве меры нуль, также оптимально.

Если $\delta \geq \widehat{\delta}$, то для любого множества и, в частности, для любого A_σ

$$E(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), A_\sigma, 0) = \sqrt{\widehat{\lambda}}.$$

Следовательно, в этом случае любое множество является оптимальным.

Пусть теперь $0 < \delta < \widehat{\delta}$ и $A_\sigma \in \mathcal{A}_\sigma$. Если $\lambda(\sigma) \geq h(\delta)$, то $\lambda(\sigma, \delta) = \lambda(\sigma)$. Чуть выше показано, что $\lambda(A_\sigma) \geq \lambda(\sigma)$ и тем самым $\lambda(A_\sigma) \geq h(\delta)$. В этом случае погрешность оптимального восстановления, как отмечено в комментарии к теореме 1, убывает с убыванием $\lambda(A)$, и поскольку $\lambda(A_\sigma) \geq \lambda(\sigma) = \lambda(\Omega_{\lambda(\sigma)})$, то

$$E(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), A_\sigma, \delta) \geq E(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), \Omega_{\lambda(\sigma)}, \delta).$$

Следовательно, $\Omega_{\lambda(\sigma)}$ — оптимальное множество.

Пусть $\lambda(\sigma) \leq h(\delta)$, тогда $\lambda(\sigma, \delta) = h(\delta)$. Если $\lambda(A_\sigma) \geq h(\delta)$, то по тем же соображениям, что и в предыдущем случае, получаем

$$E(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), A_\sigma, \delta) \geq E(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), \Omega_{h(\delta)}, \delta).$$

Если же $\lambda(A_\sigma) \leq h(\delta)$, то согласно теореме 1

$$\begin{aligned} E(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), A_\sigma, \delta) &= \sqrt{\left(\frac{r}{\alpha} \left(\widehat{\delta}^{2/r} - \delta^{2/r}\right) + 1\right) h(\delta)} \\ &= E(D^\alpha, H_2^r(\mathbb{R}^d), \Omega_{h(\delta)}, \delta), \end{aligned}$$

т. е. $\Omega_{h(\delta)}$ — оптимальное множество.

Итак, при $\delta > 0$ множество $\Omega_{\lambda(\sigma, \delta)}$ и любое множество, отличающееся от $\Omega_{\lambda(\sigma, \delta)}$ на множестве меры нуль, оптимальны. \square

Рассмотрим теперь один пример. Пусть $\alpha = (1, 0, \dots, 0)$ и $r = 2$. Иными словами, рассматривается задача восстановления частной производной $x_{t_1}(\cdot)$ на классе $H_2^2(\mathbb{R}^d)$. В этом случае

$$\widehat{\lambda} = \frac{1}{4}, \quad \widehat{\delta} = \frac{1}{2},$$

а

$$\Omega_\lambda = \left\{ (\xi_1, \dots, \xi_d) \in \mathbb{R}^d \mid \frac{\xi_1^2}{(1 + \xi_1^2 + \dots + \xi_d^2)^2} \geq \lambda \right\}.$$

Нетрудно убедиться, что Ω_λ при $\lambda < 1/4$ представляет собой два шара:

$$\Omega_\lambda = \left\{ (\xi_1, \dots, \xi_d) \in \mathbb{R}^d \mid \left(|\xi_1| - \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \right)^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_d^2 \leq \frac{1}{4\lambda} - 1 \right\}.$$

Из теоремы 1 получаем, что $E(D^\alpha, H_2^2(\mathbb{R}^d), A, \delta) = 1/2$ при $\delta \geq 1/2$, а при $\delta < 1/2$

$$E(D^\alpha, H_2^2(\mathbb{R}^d), A, \delta) = \begin{cases} \sqrt{(1-\delta)\delta}, & \lambda(A) \leq \delta/2, \\ \sqrt{\left(\frac{1-4\lambda(A)}{4\lambda(A)} \right) \delta^2 + \lambda(A)}, & \lambda(A) > \delta/2. \end{cases}$$

Семейство оптимальных методов для рассматриваемого случая также может быть легко получено из теоремы 1. В частности, при $0 < \delta < 1/2$ метод

$$\widehat{\varphi}(Fx(\cdot)|_A)(t) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_A \frac{i\xi_1}{1 + \frac{\Delta^2}{1-2\Delta}(1 + \xi_1^2 + \dots + \xi_d^2)^2} Fx(\xi) e^{\langle \xi, t \rangle} d\xi,$$

где

$$\Delta = \begin{cases} \delta, & \lambda(A) \leq \delta/2, \\ 2\lambda(A), & \lambda(A) > \delta/2, \end{cases}$$

является оптимальным.

В силу известной формулы для объема d -мерного шара имеем

$$\text{mes } \Omega_\lambda = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2 + 1)} \left(\frac{1}{4\lambda} - 1 \right)^{d/2}$$

и тем самым

$$\lambda(\sigma) = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sigma}{2} \Gamma(d/2 + 1) \right)^{2/d} \right)^{-1}.$$

Как отмечалось в доказательстве теоремы 2, при $\delta \geq 1/2$ любое множество оптимально. При $\delta < 1/2$ из той же теоремы вытекает, что шары

$$\left\{ (\xi_1, \dots, \xi_d) \in \mathbb{R}^d \mid \left(|\xi_1| - \sqrt{R^2 + 1} \right)^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_d^2 \leq R^2 \right\},$$

где

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\sigma}{2} \Gamma(d/2 + 1) \right)^{1/d}, & \sigma < \frac{2}{\pi^{d/2} \Gamma(d/2 + 1)} \left(\frac{1}{2\delta} - 1 \right)^{d/2}, \\ \sqrt{\frac{1}{2\delta} - 1}, & \sigma \geq \frac{2}{\pi^{d/2} \Gamma(d/2 + 1)} \left(\frac{1}{2\delta} - 1 \right)^{d/2}, \end{cases}$$

являются оптимальным множеством.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Kolmogorov A. N.* Über die beste Annäherung von Functionen einer gegebenen Functionenklasse // *Ann. of Math.* 1936, 37, 107–110.
- [2] *Sard A.* Best approximate integration formulas: best approximation formulas // *Amer. J. Math.* 1949, 71, 80–91.
- [3] *Никольский С. М.* К вопросу об оценках приближений квадратурными формулами // *УМН*, 1950, 5, № 2, 165–177.
- [4] *Смоляк С. А.* Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них. Канд. дисс. Москва: МГУ, 1965.
- [5] *Micchelli C. A., Rivlin T. J.* A survey of optimal recovery. In: *Optimal Estimation in Approximation Theory* (C. A. Micchelli and T. J. Rivlin, Eds.). P. 1–54. New York: Plenum Press, 1977.
- [6] *Traub J. F., Woźniakowski H.* A General Theory of Optimal Algorithms. New York: Academic Press, 1980.
- [7] *Micchelli C. A., Rivlin T. J.* Lectures on Optimal Recovery. Lecture Notes in Mathematics. V. 1129. P. 21–93. Berlin: Springer-Verlag, 1985.
- [8] *Арестов В. В.* Наилучшее восстановление операторов и родственные задачи // *Тр. Мат. ин-та АН СССР*. 1989. Т. 189. С. 3–20.
- [9] *Osipenko K. Yu.* Optimal Recovery of Analytic Functions, Nova Science Publ., Inc., Huntington, New York 2000.
- [10] *Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М.* Выпуклый анализ и его приложения, М.: Эдиториал УРСС, 2011 (3-е изд).
- [11] *Magaril-Ilyayev G. G., Tichomirov V. M.* Convex Analysis: Theory and Applications, Translations of Math. Monographs, vol. 222, AMS, Providence, RI, 2003.
- [12] *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных // *Функ. анализ и его прил.* 2003. Т. 37. С. 51–64.
- [13] *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* О восстановлении операторов сверточного типа по неточной информации // *Тр. МИАН*, 2010, 269, 181–192.
- [14] *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Об оптимальном гармоническом синтезе по неточно заданному спектру // *Функ. анализ и его прил.* 2010. Т. 44. С. 76–79.
- [15] *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* О наилучшем выборе информации в задаче восстановления функции по спектру, Математический форум. Т.1. Исследования по математическому анализу. Владикавказ: ВНЦ РАН, 2008, 142–150.
- [16] *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Как наилучшим образом восстановить функцию по неточно заданному спектру?, *Мат. заметки*, **92**:1 (2012), 59–67.
- [17] *Магарил-Ильяев Г. Г., Сивкова Е. О.* Наилучшее восстановление оператора Лапласа функции по ее неточно заданному спектру, *Матем. сб.* **203**:4 (2012), 119–130.
- [18] *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление производных на соболевских классах // *Владикавказский мат. журнал*, **5**:1 (2003), 39–47.
- [19] *Харди Г. Г., Литтльвуд Д. Е., Полиа. Г.* Неравенства. М.: Иностранная литература, 1948.

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА

ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ ИМ. А. А. ХАРКЕВИЧА РАН

МАТИ — РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. К. Э. ЦИОЛКОВСКОГО