Математические заметки

Том 0 выпуск 0 июнь 1966

УДК 517.5

Дискретные аналоги неравенства Л.В. Тайкова и восстановление последовательностей, заданных неточно

Е. В. Введенская, К. Ю. Осипенко

В работе рассматривается задача восстановления разделенной разности k-го порядка по неточно заданной последовательности, с ограниченной разделенной разностью n-го порядка, $0 \leqslant k < n$. При решении этой задачи возникает экстремальная задача, аналогичная той, которая в непрерывном случае известна как неравенство Л.В. Тайкова.

Библиография: 4 названия.

1. Введение. Для функций $x(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$, у которых $(n-1)$-ая производная локально абсолютно непрерывна и $x^{(n)}(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$, при всех $0 \leqslant k \leqslant n-1$ Л.В. Тайковым [1] было получено точное неравенство

$$\|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \leqslant K \|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^{\frac{2n-2k-1}{2n}} \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^{\frac{2k+1}{2n}},$$

где

$$K = \left((2k+1)\sin \pi \frac{2k+1}{2n}\right)^{-1/2} \left(\frac{2k+1}{2n-2k-1}\right)^{\frac{2n-2k-1}{4n}}$$

(точность этого неравенства означает, что константу K нельзя заменить меньшей). Эта задача тесно связана со следующей экстремальной задачей

$$x^{(k)}(0) \to \max, \quad \|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant \delta, \quad \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant 1. \tag{1.1}$$

Значение этой задачи по обобщенной теореме С. А. Смоляка (см., например, [2] [3]) равно погрешности оптимального восстановления k-ой производной в нуле по неточно заданной самой функции на соболевском классе $W_2^n(\mathbb{R})$, состоящем из функций $x(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$, у которых $(n-1)$-ая производная локально абсолютно непрерывна

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант №10-01-00188).

и $\|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant 1$. Задачи такого типа рассматривались в работе [4]. Мы рассматриваем дискретный аналог (1.1) и его связь с задачей восстановления неточно заданной последовательности.

Через $\mathcal{L}_{2,h}$, $h > 0$, будем обозначать пространство последовательностей $x = \{x_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, $x_j \in \mathbb{C}$, для которых

$$\|x\|_{\mathcal{L}_{2,h}} = \left(h\sum_{j\in\mathbb{Z}} |x_j|^2\right)^{1/2} < \infty.$$

Положим

$$\Delta_h^1 x = \Delta_h x = \left\{\frac{x_{j+1}-x_j}{h}\right\}_{j\in\mathbb{Z}}, \quad \Delta_h^k x = \Delta_h(\Delta_h^{k-1}x), \quad k = 2, 3, \dots .$$

Через $l_{2,h}^n$ обозначим класс последовательностей $x = \{x_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, для которых $x \in \mathcal{L}_{2,h}$ и $\|\Delta_h^n x\|_{\mathcal{L}_{2,h}} \leqslant 1$.

Рассматривается задача об оптимальном восстановлении значения $(\Delta_h^k x)_0$ по неточно заданной последовательности $x \in l_{2,h}^n$, $0 \leqslant k < n$. Предполагается, что для каждого $x \in l_{2,h}^n$ известна последовательность $\widetilde{x} \in \mathcal{L}_{2,h}$ такая, что $\|x - \widetilde{x}\|_{\mathcal{L}_{2,h}} \leqslant \delta$. В качестве методов восстановления рассматриваются всевозможные отображения $m\colon \mathcal{L}_{2,h} \to \mathbb{C}$. Погрешностью метода m называется величина

$$e(k,n,h,\delta,m) = \sup_{\substack{x\in l_{2,h}^n,\ \widetilde{x}\in\mathcal{L}_{2,h}\\ \|x-\widetilde{x}\|_{\mathcal{L}_{2,h}}\leqslant\delta}} |(\Delta_h^k x)_0 - m(\widetilde{x})|.$$

Погрешностью оптимального восстановления называется величина

$$E(k,n,h,\delta) = \inf_{m\colon \mathcal{L}_{2,h}\to\mathbb{C}} e(k,n,h,\delta,m).$$

Метод, на котором достигается нижняя грань, будем называть оптимальным методом.

2. Основные результаты.

Теорема 1. *При всех $n \in \mathbb{N}$ и $0 \leqslant k \leqslant n-1$*

$$E(k,n,h,\delta) = K + \frac{\sin^{1/2}\pi\frac{2k+1}{2n}}{16\sqrt{2k+1}\sin\pi\frac{2k+3}{2n}}\left(\frac{(2k+1)\delta^2}{2n-2k-1}\right)^{\frac{2n-2k-5}{4n}} h^2 + o(h^2).$$

При достаточно малой погрешности в качестве оптимального метода надо брать k-ую разделенную разность от приближенных данных. При этом удается точно вычислить погрешность оптимального восстановления.

Теорема 2. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$ и выполнено условие*

$$\delta \leqslant \left(\frac{h}{2}\right)^n \left(\frac{(2k+2)(2k+4)\dots(2k+2n)}{(2k+1)(2k+3)\dots(2k+2n-1)}\right)^{1/2}. \tag{2.1}$$

Тогда

$$E(k,n,h,\delta) = \frac{2^k}{h^{k+1/2}}\left(\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\right)^{1/2}\delta,$$

а метод $\widehat{m}(\widetilde{x}) = (\Delta_h^k \widetilde{x})_0$ — оптимальный.

При малых n и k поставленную задачу удается решить при любых δ и h. При $n=1$ и $k=0$ имеет место следующий результат.

Теорема 3. *Имеет место равенство*

$$E(0,1,h,\delta)=\begin{cases}\dfrac{\delta}{\sqrt{h}}, & \delta\leqslant h/\sqrt{2},\\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}(4\delta^2-h^2)^{1/4}, & \delta>h/\sqrt{2}.\end{cases}$$

При $\delta\leqslant h/\sqrt{2}$ метод $\widehat{m}(\widetilde{x})=\widetilde{x}_0$ — оптимальный, а при $\delta>h/\sqrt{2}$ метод

$$\widehat{m}(\widetilde{x})=\frac{h}{\sqrt{4\delta^2-h^2}}\sum_{j\in\mathbb{Z}}\left(\frac{2\delta^2-h\sqrt{4\delta^2-h^2}}{2\delta^2-h^2}\right)^{|j|}\widetilde{x}_j$$

— оптимальный.

Таким образом, при большой погрешности в исходных данных для наилучшего восстановления значения последовательности надо использовать все приближенные значения, сглаживая их определенным образом.

Аналогичный результат имеет место для $n=2$ и $k=0,1$. В силу теоремы 2 мы формулируем теорему лишь для случая $\delta>h^2/\sqrt{4k+6}$.

Теорема 4. *Пусть $\delta>h^2/\sqrt{4k+6}$. Тогда для $k=1,2$*

$$E(k,2,h,\delta)=\frac{(d_k+1)^{3/4-k/2}\sqrt{d_k}}{2^{5/4-k}\sqrt{(2k+1)d_k+2}}h^{3/2-k},$$

где d_k — решение уравнения.

$$\frac{(d_k+1)((3-2k)d_k^2+(2k-1)d_k+2)}{(2k+1)d_k+2}=\frac{16\delta^2}{h^4}. \tag{2.2}$$

Метод

$$\widehat{m}(\widetilde{x})=-\frac{4}{h\sqrt{d_k^2-1}}(\Delta_h^k\nu_k,\widetilde{x})_{\mathcal{L}_{2,h}},$$

где

$$(\nu_k)_j=\operatorname{Im}\frac{\mu_k^{|j|+1}}{1-\mu_k^2},\quad \mu_k=\left(1-\sqrt{\frac{2}{d_k+1}}\right)\left(1-i\sqrt{\frac{2}{d_k-1}}\right), \tag{2.3}$$

является оптимальным.

3. Доказательства. Положим для $x=\{x_j\}_{j\in\mathbb{Z}}\in\mathcal{L}_{2,h}$ и $y=\{y_j\}_{j\in\mathbb{Z}}\in\mathcal{L}_{2,h}$

$$(x,y)_{\mathcal{L}_{2,h}}=h\sum_{j\in\mathbb{Z}}x_j\overline{y}_j.$$

Нам потребуется следующий вспомогательный результат.

Лемма 1. *Пусть существуют такие $\widehat{\lambda}_1\geqslant 0$, $\widehat{\lambda}_2\geqslant 0$ и $\widehat{x}\in l_{2,h}^n$, при которых для всех $x\in\mathcal{L}_{2,h}$ справедливо тождество*

$$(\Delta_h^k x)_0=\widehat{\lambda}_1(x,\widehat{x})_{\mathcal{L}_{2,h}}+\widehat{\lambda}_2(\Delta_h^n x,\Delta_h^n\widehat{x})_{\mathcal{L}_{2,h}}, \tag{3.1}$$

а элемент $\widehat{x}$ *удовлетворяет условиям* $\|\widehat{x}\|_{\mathcal{L}_{2,h}}=\delta$ *и* $\|\Delta_h^n\widehat{x}\|_{\mathcal{L}_{2,h}}=1$ *при* $\widehat{\lambda}_2>0$ *или* $\|\Delta_h^n\widehat{x}\|_{\mathcal{L}_{2,h}}\leqslant 1$ *при* $\widehat{\lambda}_2=0$. *Тогда метод*

$$\widehat{m}(\widetilde{x})=\widehat{\lambda}_1(\widetilde{x},\widehat{x})_{\mathcal{L}_{2,h}}$$

будет оптимальным и

$$E(k,n,h,\delta)=\widehat{\lambda}_1\delta^2+\widehat{\lambda}_2. \tag{3.2}$$

Доказательство. Пусть m — произвольный метод восстановления, а $x\in l_{2,h}^n$ такой, что $\|x\|_{\mathcal{L}_{2,h}}\leqslant\delta$. Тогда

$$2|(\Delta_h^kx)_0|=|(\Delta_h^kx)_0-m(0)-((\Delta_h^k(-x))_0-m(0))|\leqslant 2e(k,n,h,\delta,m)$$

В силу произвольности метода имеем

$$E(k,n,h,\delta)\geqslant\sup_{\substack{x\in l_{2,h}^n\\ \|x\|_{\mathcal{L}_{2,h}}\leqslant\delta}}|(\Delta_h^kx)_0|\geqslant(\Delta_h^k\widehat{x})_0=\widehat{\lambda}_1\delta^2+\widehat{\lambda}_2.$$

С другой стороны, из тождества (3.1) получаем

$$\begin{aligned}|(\Delta_h^kx)_0-\widehat{m}(\widetilde{x})|&=|(\Delta_h^kx)_0-\widehat{\lambda}_1(x,\widehat{x})_{\mathcal{L}_{2,h}}+\widehat{\lambda}_1(\widetilde{x}-x,\widehat{x})_{\mathcal{L}_{2,h}}|\\&\leqslant|\widehat{\lambda}_2(\Delta_h^nx,\Delta_h^n\widehat{x})_{\mathcal{L}_{2,h}}|+\widehat{\lambda}_1\delta^2\leqslant\widehat{\lambda}_2+\widehat{\lambda}_1\delta^2.\end{aligned}$$

Отсюда вытекает равенство (3.2) и оптимальность метода $\widehat{m}$. Лемма доказана.

С каждой последовательностью $\{x_j\}_{j\in\mathbb{Z}}\in\mathcal{L}_{2,h}$ свяжем функцию

$$Fx(t)=\sum_{j\in\mathbb{Z}}x_je^{ijt}\in L_2(\mathbb{T}),$$

где $\mathbb{T}$ — отрезок $[-\pi,\pi]$ с идентифицированными концами, а

$$\|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}=\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}|x(t)|^2\,dt\right)^{1/2}.$$

Положим

$$(x(\cdot),y(\cdot))_{L_2(\mathbb{T})}=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}x(t)\overline{y(t)}\,dt.$$

Тогда нетрудно убедиться, что

$$(x,y)_{\mathcal{L}_{2,h}}=h(Fx(\cdot),Fy(\cdot))_{L_2(\mathbb{T})}.$$

Тем самым тождество (3.1) может быть записано в виде

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}F(\Delta_h^kx)(t)\,dt=\frac{\widehat{\lambda}_1h}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}Fx(t)\overline{F\widehat{x}(t)}\,dt+\frac{\widehat{\lambda}_2h}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}F(\Delta_h^nx)(t)\overline{F(\Delta_h^n\widehat{x})(t)}\,dt. \tag{3.3}$$

В силу того, что

$$F(\Delta_hx)(t)=\frac{1}{h}(e^{-it}-1)Fx(t),$$

имеем
$$F(\Delta_h^k x)(t) = \frac{1}{h^k}(e^{-it}-1)^k Fx(t).$$
Следовательно, равенство (3.3) переписывается в виде
$$\frac{1}{2\pi h^k}\int_{\mathbb{T}}(e^{-it}-1)^k Fx(t)\,dt = \frac{\widehat{\lambda}_1 h}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} Fx(t)\overline{F\widehat{x}(t)}\,dt \\ + \frac{\widehat{\lambda}_2}{2\pi h^{2n-1}}\int_{\mathbb{T}}|e^{it}-1|^{2n}Fx(t)\overline{F\widehat{x}(t)}\,dt. \quad (3.4)$$
Отсюда
$$F\widehat{x}(t) = \frac{h^{2n-k-1}(e^{it}-1)^k}{\widehat{\lambda}_1 h^{2n} + \widehat{\lambda}_2|e^{it}-1|^{2n}},$$
а $\widehat{\lambda}_1$ и $\widehat{\lambda}_2$ должны быть выбраны из условий (будем пока искать $\widehat{\lambda}_2 > 0$)
$$h\|F\widehat{x}(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{T})} = \delta^2,$$
$$h\|F(\Delta_h^n\widehat{x})(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{T})} = 1,$$
которые записываются в виде
$$\begin{aligned}\frac{h^{4n-2k-1}}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}\frac{|e^{it}-1|^{2k}}{(\widehat{\lambda}_1 h^{2n}+\widehat{\lambda}_2|e^{it}-1|^{2n})^2}\,dt = \delta^2,\\ \frac{h^{2n-2k-1}}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}\frac{|e^{it}-1|^{2(n+k)}}{(\widehat{\lambda}_1 h^{2n}+\widehat{\lambda}_2|e^{it}-1|^{2n})^2}\,dt = 1.\end{aligned} \quad (3.5)$$

Доказательство теоремы 1. Сделав в (3.5) замену $u = \operatorname{tg}\dfrac{t}{2}$, будем иметь
$$\begin{aligned}\frac{4^k h^{4n-2k-1}}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{u^{2k}(1+u^2)^{2n-k-1}}{(\widehat{\lambda}_1 h^{2n}(1+u^2)^n+\widehat{\lambda}_2 4^n u^{2n})^2}\,du = \delta^2,\\ \frac{4^{n+k} h^{2n-2k-1}}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{u^{2(n+k)}(1+u^2)^{n-k-1}}{(\widehat{\lambda}_1 h^{2n}(1+u^2)^n+\widehat{\lambda}_2 4^n u^{2n})^2}\,du = 1.\end{aligned} \quad (3.6)$$
Перейдем теперь к переменной $v = h^{-1}u$. Получим систему
$$\frac{4^k}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{v^{2k}(1+h^2v^2)^{2n-k-1}}{(\widehat{\lambda}_1(1+h^2v^2)^n+\widehat{\lambda}_2 4^n v^{2n})^2}\,dv = \delta^2,$$
$$\frac{4^{n+k}}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{v^{2(n+k)}(1+h^2v^2)^{n-k-1}}{(\widehat{\lambda}_1(1+h^2v^2)^n+\widehat{\lambda}_2 4^n v^{2n})^2}\,dv = 1.$$
Положим $b = 4^n\widehat{\lambda}_2/\widehat{\lambda}_1$. Тогда эта система запишется в виде
$$\begin{aligned}\frac{4^k}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{v^{2k}(1+h^2v^2)^{2n-k-1}}{((1+h^2v^2)^n+bv^{2n})^2}\,dv = \delta^2\widehat{\lambda}_1^2,\\ \frac{4^{n+k}}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{v^{2(n+k)}(1+h^2v^2)^{n-k-1}}{((1+h^2v^2)^n+bv^{2n})^2}\,dv = \widehat{\lambda}_1^2.\end{aligned} \quad (3.7)$$

Тем самым для b получаем уравнение

$$\Phi(\tau, b) = 0, \tag{3.8}$$

где $\tau = h^2$, а

$$\Phi(\tau, b) = \int_{\mathbb{R}} \frac{v^{2k}(1+\tau v^2)^{2n-k-1}}{((1+\tau v^2)^n + bv^{2n})^2}\,dv - \delta^2 4^n \int_{\mathbb{R}} \frac{v^{2(n+k)}(1+\tau v^2)^{n-k-1}}{((1+\tau v^2)^n + bv^{2n})^2}\,dv.$$

Положим $h = 0$. Тогда

$$\Phi(0, b) = \int_{\mathbb{R}} \frac{v^{2k}}{(1+bv^{2n})^2}\,dv - \delta^2 4^n \int_{\mathbb{R}} \frac{v^{2(n+k)}}{(1+bv^{2n})^2}\,dv.$$

Сделав замену $u^{2n} = bv^{2n}$, получаем

$$\Phi(0, b) = b^{-\frac{2k+1}{2n}} \int_{\mathbb{R}} \frac{u^{2k}}{(1+u^{2n})^2}\,du - \delta^2 4^n b^{-\frac{2n+2k+1}{2n}} \int_{\mathbb{R}} \frac{u^{2(n+k)}}{(1+u^{2n})^2}\,du.$$

Воспользуемся равенствами

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}} \frac{u^{2k}}{(1+u^{2n})^2}\,du = \frac{\pi}{2n^2}(2n-2k-1)\sin^{-1}\pi\frac{2k+1}{2n}, \\ &\int_{\mathbb{R}} \frac{u^{2(k+n)}}{(1+u^{2n})^2}\,du = \frac{\pi}{2n^2}(2k+1)\sin^{-1}\pi\frac{2k+1}{2n}, \end{aligned} \tag{3.9}$$

которые легко получить, выразив эти интегралы через бета-функцию $B(\cdot,\cdot)$ и применив формулу приведения

$$B(a, 1-a) = \frac{\pi}{\sin \pi a}.$$

Тогда будем иметь

$$\Phi(0, b) = b^{-\frac{2k+1}{2n}} \frac{\pi}{2n^2} \sin^{-1}\pi\frac{2k+1}{2n}(2n-2k-1-\delta^2 4^n b^{-1}(2k+1)).$$

Отсюда $\Phi(0, b_0) = 0$, где

$$b_0 = \delta^2 4^n \frac{2k+1}{2n-2k-1}.$$

Для того чтобы применить теорему о неявной функции вычислим $\Phi'_\tau(0, b_0)$ и $\Phi'_b(0, b_0)$. Имеем

$$\begin{aligned} \Phi'_\tau(0, b) = (2n-k-1)\int_{\mathbb{R}} \frac{v^{2k+2}}{(1+bv^{2n})^2}\,dv - 2n\int_{\mathbb{R}} \frac{v^{2k+2}}{(1+bv^{2n})^3}\,dv \\ - \delta^2 4^n (n-k-1)\int_{\mathbb{R}} \frac{v^{2n+2k+2}}{(1+bv^{2n})^2}\,dv + \delta^2 4^n 2n\int_{\mathbb{R}} \frac{v^{2n+2k+2}}{(1+bv^{2n})^3}\,dv. \end{aligned}$$

Сделаем ту же замену $u^{2n} = bv^{2n}$. Тогда

$$\begin{aligned} \Phi'_\tau(0, b) = (2n-k-1)b^{-\frac{2k+3}{2n}}\int_{\mathbb{R}} \frac{u^{2k+2}}{(1+u^{2n})^2}\,du - 2nb^{-\frac{2k+3}{2n}}\int_{\mathbb{R}} \frac{u^{2k+2}}{(1+u^{2n})^3}\,du \\ - \delta^2 4^n (n-k-1)b^{-\frac{2n+2k+3}{2n}}\int_{\mathbb{R}} \frac{u^{2n+2k+2}}{(1+u^{2n})^2}\,du + \delta^2 4^n 2nb^{-\frac{2n+2k+3}{2n}}\int_{\mathbb{R}} \frac{u^{2n+2k+2}}{(1+u^{2n})^3}\,du. \end{aligned}$$

Аналогично (3.9) можно получить

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{u^{2k+2}}{(1+u^{2n})^3}\,du = \frac{\pi}{8n^3}(4n-2k-3)(2n-2k-3)\sin^{-1}\pi\frac{2k+3}{2n},$$
$$\int_{\mathbb{R}} \frac{u^{2n+2k+2}}{(1+u^{2n})^3}\,du = \frac{\pi}{8n^3}(2n-2k-3)(2k+3)\sin^{-1}\pi\frac{2k+3}{2n}.$$

Таким образом,

$$\Phi'_\tau(0,b) = \frac{\pi}{4n^2}b^{-\frac{2k+3}{2n}}(2n-2k-3)\sin^{-1}\pi\frac{2k+3}{2n} - \delta^2 4^n\frac{\pi}{4n^2}b^{-\frac{2n+2k+3}{2n}}(2k+3)\sin^{-1}\pi\frac{2k+3}{2n}.$$

Отсюда

$$\Phi'_\tau(0,b_0) = -\frac{\pi}{n(2k+1)}b_0^{-\frac{2k+3}{2n}}\sin^{-1}\pi\frac{2k+3}{2n}.$$

Для $\Phi'_b(0,b)$ имеем

$$\Phi'_b(0,b) = -2\int_{\mathbb{R}} \frac{v^{2n+2k}}{(1+bv^{2n})^3}\,dv + 2\delta^2 4^n\int_{\mathbb{R}} \frac{v^{4n+2k}}{(1+bv^{2n})^3}\,dv.$$

После замены $u^{2n} = bv^{2n}$ получим

$$\begin{aligned}\Phi'_b(0,b) &= -2b^{-\frac{2n+2k+1}{2n}}\int_{\mathbb{R}} \frac{u^{2n+2k}}{(1+u^{2n})^3}\,du + 2\delta^2 4^n b^{-\frac{4n+2k+1}{2n}}\int_{\mathbb{R}} \frac{u^{4n+2k}}{(1+u^{2n})^3}\,du \\ &= -2b^{-\frac{2n+2k+1}{2n}}\frac{\pi(2k+1)}{8n^3}\sin^{-1}\pi\frac{2k+1}{2n}(2n-2k-1-\delta^2 4^n b^{-1}(2n+2k+1)).\end{aligned}$$

Тем самым

$$\Phi'_b(0,b_0) = \frac{\pi(2n-2k-1)}{2n^2}b_0^{-\frac{2n+2k+1}{2n}}\sin^{-1}\pi\frac{2k+1}{2n}.$$

По теореме о неявной функции в достаточно малой окрестности нуля существует функция $b = b(\tau)$, удовлетворяющая уравнению (3.8). При этом

$$b'(0) = -\frac{\Phi'_\tau(0,b_0)}{\Phi'_b(0,b_0)} = \frac{2n\sin\pi\frac{2k+1}{2n}}{(2n-2k-1)(2k+1)\sin\pi\frac{2k+3}{2n}}\left(\frac{(2k+1)\delta^2 4^n}{2n-2k-1}\right)^{\frac{n-1}{n}}.$$

Отсюда

$$b(h) = \delta^2 4^n\frac{2k+1}{2n-2k-1} + \frac{2n\sin\pi\frac{2k+1}{2n}}{(2n-2k-1)(2k+1)\sin\pi\frac{2k+3}{2n}}\left(\frac{(2k+1)\delta^2 4^n}{2n-2k-1}\right)^{\frac{n-1}{n}} h^2 + o(h^2).$$

Для нахождения асимптотики $\widehat{\lambda}_1$ рассмотрим функцию

$$c(\tau) = \frac{4^{n+k}}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{v^{2(n+k)}(1+\tau v^2)^{n-k-1}}{((1+\tau v^2)^n + bv^{2n})^2}\,dv.$$

Имеем

$$c(0)=\frac{4^{n+k}}{\pi}\int_{\mathbb R}\frac{v^{2(n+k)}}{(1+b_0v^{2n})^2}\,dv=\frac{4^{n+k}}{\pi}b_0^{-\frac{2n+2k+1}{2n}}\int_{\mathbb R}\frac{u^{2(n+k)}}{(1+u^{2n})^2}\,du$$
$$=4^{n+k}b_0^{-\frac{2n+2k+1}{2n}}\frac{2k+1}{2n^2}\sin^{-1}\pi\frac{2k+1}{2n}.$$

Далее,

$$c'(0)=\frac{4^{n+k}}{\pi}(n-k-1)\int_{\mathbb R}\frac{v^{2n+2k+2}}{(1+b_0v^{2n})^2}\,dv-\frac{4^{n+k}}{\pi}2n\int_{\mathbb R}\frac{v^{2n+2k+2}}{(1+b_0v^{2n})^3}\,dv$$
$$-\frac{4^{n+k}}{\pi}2b'(0)\int_{\mathbb R}\frac{v^{4n+2k}}{(1+b_0v^{2n})^3}\,dv$$
$$=4^{n+k-1}b_0^{-\frac{2n+2k+3}{2n}}\frac{(2k+1)(2n-2k-5)}{n^2(2n-2k-1)}\sin^{-1}\pi\frac{2k+3}{2n}.$$

Отсюда

$$\widehat\lambda_1=\sqrt{c(\tau)}=\sqrt{c(0)}+\frac{c'(0)}{2\sqrt{c(0)}}\tau+o(\tau)=2^{n+k-1/2}b_0^{-\frac{2n+2k+1}{4n}}\frac{\sqrt{2k+1}}{n}\sin^{-1/2}\pi\frac{2k+1}{2n}$$
$$+2^{n+k-5/2}b_0^{-\frac{2n+2k+5}{4n}}\frac{\sqrt{2k+1}(2n-2k-5)}{n(2n-2k-1)}\frac{\sin^{1/2}\pi\frac{2k+1}{2n}}{\sin\pi\frac{2k+3}{2n}}h^2+o(h^2).$$

Следовательно, для погрешности оптимального восстановления имеем

$$E(k,n,h,\delta)=\widehat\lambda_1\delta^2+\widehat\lambda_2=\widehat\lambda_1\left(\delta^2+\frac{b}{4^n}\right)$$
$$=K\delta^{\frac{2n-2k-1}{2n}}+\frac{\sin^{1/2}\pi\frac{2k+1}{2n}}{16\sqrt{2k+1}\sin\pi\frac{2k+3}{2n}}\left(\frac{(2k+1)\delta^2}{2n-2k-1}\right)^{\frac{2n-2k-5}{4n}}h^2+o(h^2).$$

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Положим теперь $\widehat\lambda_2=0$. Тогда

$$F\widehat x(t)=\frac{(e^{it}-1)^k}{\widehat\lambda_1h^{k+1}},$$

а $\widehat\lambda_1$ должно быть выбрано из условий

$$h\|F\widehat x(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb T)}=\delta^2,$$
$$h\|F(\Delta_h^n\widehat x)(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb T)}\leqslant 1,$$

которые записываются в виде

$$\begin{gathered}\frac{1}{2\pi\widehat\lambda_1^2h^{2k+1}}\int_{\mathbb T}|e^{it}-1|^{2k}\,dt=\delta^2,\\ \frac{1}{2\pi\widehat\lambda_1^2h^{2n+2k+1}}\int_{\mathbb T}|e^{it}-1|^{2(n+k)}\,dt\leqslant 1.\end{gathered}\tag{3.10}$$

Используя хорошо известную формулу

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2k}\tau\, d\tau = \frac{\pi}{2}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!},$$

получаем

$$\int_{\mathbb{T}} |e^{it}-1|^{2k}\, dt = 4^k \int_{\mathbb{T}} \sin^{2k}\frac{t}{2}\, dt = 2\pi 4^k \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}.$$

Тем самым условия (3.10) записываются в виде

$$\frac{4^k}{\widehat{\lambda}_1^2 h^{2k+1}}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} = \delta^2,$$
$$\frac{4^{n+k}}{\widehat{\lambda}_1^2 h^{2n+2k+1}}\frac{(2n+2k-1)!!}{(2n+2k)!!} \leqslant 1.$$

Отсюда

$$\widehat{\lambda}_1 = \frac{2^k}{\delta h^{k+1/2}}\left(\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\right)^{1/2},$$

а δ должно удовлетворять условию (2.1). Теорема доказана.

Доказательство теоремы 3. При $\delta \leqslant h/\sqrt{2}$ утверждение теоремы вытекает из теоремы 2. Будем считать, что $\delta > h/\sqrt{2}$. Система (3.7) в рассматриваемом случае принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{1+h^2v^2}{(1+(h^2+b)v^2)^2}\, dv &= \delta^2\widehat{\lambda}_1^2, \\ \frac{4}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{v^2}{(1+(h^2+b)v^2)^2}\, dv &= \widehat{\lambda}_1^2. \end{aligned} \tag{3.11}$$

После замены $v = (h^2+b)^{-1/2}u$ имеем (см. (3.9))

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+(h^2+b)v^2)^2}\, dv = (h^2+b)^{-1/2}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+u^2)^2}\, du = \frac{\pi}{2}(h^2+b)^{-1/2}.$$

Аналогично

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{v^2}{(1+(h^2+b)v^2)^2}\, dv = (h^2+b)^{-3/2}\int_{\mathbb{R}} \frac{u^2}{(1+u^2)^2}\, du = \frac{\pi}{2}(h^2+b)^{-3/2}.$$

Таким образом, из системы (3.11) получаем

$$\frac{1}{2}(h^2+b)^{-1/2} + \frac{1}{2}h^2(h^2+b)^{-3/2} = \delta^2\widehat{\lambda}_1^2,$$
$$2(h^2+b)^{-3/2} = \widehat{\lambda}_1^2.$$

Отсюда

$$b = 4\delta^2 - 2h^2, \quad \widehat{\lambda}_1 = \frac{\sqrt{2}}{(4\delta^2-h^2)^{3/4}}, \quad \widehat{\lambda}_2 = \frac{2\delta^2-h^2}{\sqrt{2}(4\delta^2-h^2)^{3/4}}.$$

Следовательно,

$$F\widehat{x}(t) = \frac{h}{\widehat{\lambda}_1 h^2 + 2\widehat{\lambda}_2(1-\cos t)} = \frac{h(4\delta^2-h^2)^{3/4}}{\sqrt{2}(2\delta^2-h^2)}\frac{1}{a-\cos t},$$

где $a = 2\delta^2/(2\delta^2 - h^2)$. Для нахождения коэффициентов Фурье функции $F\widehat{x}(\cdot)$ воспользуемся легко проверяемым равенством

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \mu^{|j|} e^{ijt} = \frac{\frac{1-\mu^2}{2\mu}}{\frac{1+\mu^2}{2\mu} - \cos t}, \tag{3.12}$$

справедливым для любых μ, $0 < |\mu| < 1$. Положив

$$\mu = a - \sqrt{a^2-1} = \frac{2\delta^2 - h\sqrt{4\delta^2 - h^2}}{2\delta^2 - h^2},$$

получаем

$$\frac{1}{a - \cos t} = \frac{2\mu}{1-\mu^2} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \mu^{|j|} e^{ijt} = \frac{1}{\sqrt{a^2-1}} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \mu^{|j|} e^{ijt} = \frac{2\delta^2 - h^2}{h\sqrt{4\delta^2 - h^2}} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \mu^{|j|} e^{ijt}.$$

Таким образом,

$$F\widehat{x}(t) = \frac{(4\delta^2 - h^2)^{1/4}}{\sqrt{2}} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \mu^{|j|} e^{ijt}.$$

Отсюда

$$\widehat{x}_j = \frac{(4\delta^2 - h^2)^{1/4}}{\sqrt{2}} \mu^{|j|}.$$

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 4. Здесь нам удобнее будет иметь дело с системой (3.6), которая для рассматриваемого случая имеет вид

$$\begin{gathered}
\frac{4^k h^{7-2k}}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{u^{2k}(1+u^2)^{3-k}}{(\widehat{\lambda}_1 h^4 (1+u^2)^2 + 16\widehat{\lambda}_2 u^4)^2}\, du = \delta^2, \\
\frac{4^{2+k} h^{3-2k}}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{u^{4+2k}(1+u^2)^{1-k}}{(\widehat{\lambda}_1 h^4 (1+u^2)^2 + 16\widehat{\lambda}_2 u^4)^2}\, du = 1.
\end{gathered}$$

Эта система переписывается в виде

$$\begin{gathered}
\frac{4^k}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{u^{2k}(1+u^2)^{3-k}}{((1+u^2)^2 + a^2u^4)^2}\, du = h^{1+2k}\delta^2\widehat{\lambda}_1^2, \\
\frac{4^{2+k}}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{u^{4+2k}(1+u^2)^{1-k}}{((1+u^2)^2 + a^2u^4)^2}\, du = h^{5+2k}\widehat{\lambda}_1^2,
\end{gathered} \tag{3.13}$$

где $a = 4h^{-2}\sqrt{\lambda_2/\lambda_1}$. Положим $c = p + iq$, где

$$p = \sqrt{\frac{\sqrt{1+a^2} - 1}{2(1+a^2)}}, \quad q = \sqrt{\frac{\sqrt{1+a^2} + 1}{2(1+a^2)}}. \tag{3.14}$$

Тогда $c^2 = -(1+ia)^{-1}$ и

$$((1+u^2)^2 + a^2u^4)^2 = (1+a^2)^2 (u-c)^2 (u+c)^2 (u-\overline{c})^2 (u+\overline{c})^2.$$

Вычислим каждый из интегралов с помощью вычетов (множители 4^k в обоих интегралов учтем потом). В верхней полуплоскости имеется два полюса знаменателя кратности 2: c и $-\overline{c}$. Поэтому

$$\begin{aligned}
I_{1k} &= \frac{1}{\pi(1+a^2)^2}\int_{\mathbb{R}} \frac{u^{2k}(1+u^2)^{3-k}}{(u-c)^2(u+c)^2(u-\overline{c})^2(u+\overline{c})^2}\,du \\
&= \frac{ic^{2k}(1+c^2)^{3-k}}{2(1+a^2)^2c^2(c-\overline{c})^2(c+\overline{c})^2}\left(\frac{2k-1}{c}+\frac{(6-2k)c}{1+c^2}-\frac{2}{c-\overline{c}}-\frac{2}{c+\overline{c}}\right) \\
&\quad + \frac{i\overline{c}^{2k}(1+\overline{c}^2)^{3-k}}{2(1+a^2)^2\overline{c}^2(c-\overline{c})^2(c+\overline{c})^2}\left(-\frac{2k-1}{\overline{c}}-\frac{(6-2k)\overline{c}}{1+\overline{c}^2}-\frac{2}{c-\overline{c}}+\frac{2}{c+\overline{c}}\right).
\end{aligned}$$

В силу того, что

$$(c-\overline{c})^2(c+\overline{c})^2 = -\frac{4a^2}{(1+a^2)^2}, \tag{3.15}$$

имеем

$$\begin{aligned}
I_{1k} = &-\frac{ic^{2k}(1+c^2)^{3-k}}{8a^2c^2}\left(\frac{(6-2k)c}{1+c^2}+\frac{2k-1}{c}-\frac{4c}{c^2-\overline{c}^2}\right) \\
&\qquad - \frac{i\overline{c}^{2k}(1+\overline{c}^2)^{3-k}}{8a^2\overline{c}^2}\left(-\frac{(6-2k)\overline{c}}{1+\overline{c}^2}-\frac{2k-1}{\overline{c}}-\frac{4\overline{c}}{c^2-\overline{c}^2}\right).
\end{aligned}$$

Учитывая, что $1+c^2=-iac^2$, а $1+\overline{c}^2=ia\overline{c}^2$, получаем

$$I_{1k} = \frac{3-k}{4a^ki^{k+1}}(\overline{c}^3-(-1)^kc^3)+\frac{(2k-1)a^{1-k}}{8i^k}((-1)^kc^3+\overline{c}^3)+\frac{a^{1-k}(\overline{c}^5-(-1)^kc^5)}{2i^k(c^2-\overline{c}^2)}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
I_{10} &= \frac{3}{2}q(q^2-3p^2)-\frac{a}{4p}(6p^4-13p^2q^2+q^4), \\
I_{11} &= -\frac{p(p^2-3q^2)}{a}-\frac{p^4-7p^2q^2+4q^4}{4q}.
\end{aligned}$$

Подставляя выражения p и q из (3.14), будем иметь

$$\begin{aligned}
I_{10} &= \frac{\sqrt{\sqrt{1+a^2}+1}}{2\sqrt{2}(1+a^2)^{3/2}}\left(3a^2-\sqrt{1+a^2}+5\right), \\
I_{11} &= \frac{a^2+\sqrt{1+a^2}+3}{4\sqrt{2}(1+a^2)^{3/2}\sqrt{\sqrt{1+a^2}+1}}.
\end{aligned}$$

Вычислим теперь второй интеграл

$$\begin{aligned}
I_{2k} &= \frac{16}{\pi(1+a^2)^2}\int_{\mathbb{R}} \frac{u^{4+2k}(1+u^2)^{1-k}}{(u-c)^2(u+c)^2(u-\overline{c})^2(u+\overline{c})^2}\,du \\
&= \frac{8ic^{2+2k}(1+c^2)^{1-k}}{(1+a^2)^2(c-\overline{c})^2(c+\overline{c})^2}\left(\frac{2(1-k)c}{1+c^2}+\frac{3+2k}{c}-\frac{2}{c-\overline{c}}-\frac{2}{c+\overline{c}}\right) \\
&\quad + \frac{8i\overline{c}^{2+2k}(1+\overline{c}^2)^{1-k}}{(1+a^2)^2(c-\overline{c})^2(c+\overline{c})^2}\left(-\frac{2(1-k)\overline{c}}{1+\overline{c}^2}-\frac{3+2k}{\overline{c}}-\frac{2}{c-\overline{c}}+\frac{2}{c+\overline{c}}\right).
\end{aligned}$$

Используя равенство (3.15), получаем

$$I_{2k} = -\frac{2i}{a^2}c^{2+2k}(1+c^2)^{1-k}\left(\frac{2(1-k)c}{1+c^2}+\frac{3+2k}{c}-\frac{4c}{c^2-\overline{c}^2}\right) \\ -\frac{2i}{a^2}\overline{c}^{2+2k}(1+\overline{c}^2)^{1-k}\left(-\frac{2(1-k)\overline{c}}{1+\overline{c}^2}-\frac{3+2k}{\overline{c}}-\frac{4\overline{c}}{c^2-c^2}\right).$$

Учитывая, что $1+c^2=-iac^2$, а $1+\overline{c}^2=ia\overline{c}^2$, получаем

$$I_{2k} = \frac{4-4k}{i^{k+1}a^{2+k}}((-1)^kc^3-\overline{c}^3)-\frac{6+4k}{i^ka^{1+k}}((-1)^kc^3+\overline{c}^3)+\frac{8((-1)^kc^5-\overline{c}^5)}{i^ka^{1+k}(c^2-\overline{c}^2)}. \quad (3.16)$$

Отсюда

$$I_{20} = \frac{8q}{a^2}(3p^2-q^2)+\frac{4}{ap}(2p^4-p^2q^2+q^4),$$
$$I_{21} = \frac{20q}{a^2}(3p^2-q^2)+\frac{4}{a^2q}(p^4-10p^2q^2+5q^4).$$

Подстановка p и q из (3.14) дает

$$I_{20} = \frac{2^{3/2}(2+\sqrt{1+a^2})}{\sqrt{\sqrt{1+a^2}+1}(1+a^2)^{3/2}},$$
$$I_{21} = \frac{2^{3/2}(2+3\sqrt{1+a^2})}{(\sqrt{1+a^2}+1)^{3/2}(1+a^2)^{3/2}}.$$

Рассмотрим сначала случай, когда $k=0$. Тогда система (3.13) имеет вид

$$\frac{\sqrt{\sqrt{1+a^2}+1}}{2(2(1+a^2))^{3/2}}\left(3a^2-\sqrt{1+a^2}+5\right)=h\delta^2\widehat{\lambda}_1^2,$$
$$\frac{8(2+\sqrt{1+a^2})}{\sqrt{\sqrt{1+a^2}+1}(2(1+a^2))^{3/2}}=h^5\widehat{\lambda}_1^2.$$

Положив $d=\sqrt{a^2+1}$, получаем для d уравнение (2.2) при $k=0$

$$\frac{(d+1)(3d^2-d+2)}{d+2}=\frac{16\delta^2}{h^4}.$$

Нетрудно показать, что это уравнение при $d>1$ имеет единственное решение для всех $\delta>h^2/\sqrt{6}$ (при желании его можно явно найти, пользуясь формулами для корней кубического уравнения). Для $\widehat{\lambda}_1$ и $\widehat{\lambda}_2$ получаем

$$\widehat{\lambda}_1 = \frac{2^{3/4}(2+d)^{1/2}}{(d+1)^{1/4}d^{3/2}h^{5/2}},$$
$$\widehat{\lambda}_2 = \frac{a^2h^4\widehat{\lambda}_1}{16}=\frac{(d^2-1)h^4\widehat{\lambda}_1}{16}.$$

Следовательно, при $\delta > h^2/\sqrt{6}$

$$E(0,2,h,\delta) = \widehat{\lambda}_1\delta^2 + \widehat{\lambda}_2 = \widehat{\lambda}_1\left(\delta^2 + \frac{(d^2-1)h^4}{16}\right) = \frac{(d+1)^{3/4}\sqrt{d}}{2^{5/4}\sqrt{d+2}}h^{3/2}.$$

Построим теперь оптимальный метод восстановления x_0. Имеем

$$F\widehat{x}(t) = \frac{h^3}{\widehat{\lambda}_1h^4 + 4\widehat{\lambda}_2(1-\cos t)^2} = \frac{h^3}{4\widehat{\lambda}_2}\frac{1}{\lambda^2 + (1-\cos t)^2}$$
$$= \frac{ih^3}{8\lambda\widehat{\lambda}_2}\left(\frac{1}{1+i\lambda-\cos t} - \frac{1}{1-i\lambda-\cos t}\right),$$

где

$$\lambda = \frac{h^2}{2}\sqrt{\frac{\widehat{\lambda}_1}{\widehat{\lambda}_2}} = \frac{2}{\sqrt{d^2-1}}.$$

Выберем $|\mu| < 1$ из условия

$$\frac{1+\mu^2}{2\mu} = 1 + i\lambda.$$

Получим

$$\mu = \left(1 - \sqrt{\frac{2}{d+1}}\right)\left(1 - i\sqrt{\frac{2}{d-1}}\right).$$

Из (3.12) имеем

$$\frac{1}{1+i\lambda-\cos t} - \frac{1}{1+i\lambda-\cos t} = \sum_{j\in\mathbb{Z}}\left(\frac{2\mu}{1-\mu^2}\mu^{|j|} - \frac{2\overline{\mu}}{1-\overline{\mu}^2}\overline{\mu}^{|j|}\right)e^{ijt}.$$

Поэтому

$$\widehat{x}_j = \frac{ih^3}{8\lambda\widehat{\lambda}_2}\left(\frac{2\mu}{1-\mu^2}\mu^{|j|} - \frac{2\overline{\mu}}{1-\overline{\mu}^2}\overline{\mu}^{|j|}\right) = -\frac{4}{h\sqrt{d^2-1}\widehat{\lambda}_1}\operatorname{Im}\frac{\mu^{|j|+1}}{1-\mu^2}.$$

Случай $k = 1$ рассматривается аналогично. Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Л. В. Тайков, “Неравенства типа Колмогорова и наилучшие формулы численного дифференцирования”, *Матем. заметки*, **4**:2 (1968), 233–238.

[2] В. В. Арестов, “Наилучшее восстановление операторов и родственные задачи”, *Тр. Мат. ин-та АН СССР*, **189** (1989), 3–20.

[3] Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, “Об оптимальном восстановлении функционалов по неточным данным”, *Матем. заметки*, **50**:6 (1991), 85–93.

[4] Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, “Оптимальное восстановление значений функций и их производных на прямой по неточно заданному преобразованию Фурье”, *Матем. сб.*, **195**:10 (2004), 67–82.

Е. В. Введенская
МАТИ, г. Москва
E-mail: zayatslena@yahoo.com

К. Ю. Осипенко
МАТИ, г. Москва, ЮМН ВНЦ РАН, г. Владикавказ
E-mail: kosipenko@yahoo.com

Поступило
17.11.2010
Исправленный
вариант
00.00.2010