Труды международной конференции

Крымская осенняя математическая школа-симпозиум 2007

УДК 517.5 noindent MSC2000: 41A45, 41A46

Е.В. Введенская

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ВОССТАНОВЛЕНИИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ, ЗАДАННОЙ НЕТОЧНО

Пусть $\{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}}-$ числовая последовательность, принадлежащая классу

$$l_2^1 = \{\{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \in l_2, \sum_{k\in\mathbb{Z}}(x_{k+1}-x_k)^2 \le 1\}.$$

Предположим, что вместо $\{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ известна последовательность

$$\{\widetilde{x}_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \in l_2,$$

такая, что

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}(x_k-\widetilde{x}_k)^2 \le \delta^2.$$

Рассматривается задача восстановления значения x_0 по информации о $\{\widetilde{x}_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$. Под методами восстановления будем понимать всевозможные отображения

$$\varphi : l_2 \to \mathbb{R}.$$

Погрешностью метода φ назовем величину

$$e(\delta,\varphi) = \sup_{\substack{\{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}}\in l_2^1,\\ \{\widetilde{x}_k\}_{k\in\mathbb{Z}}\in l_2,\\ \sum_{k\in\mathbb{Z}}(x_k-\widetilde{x}_k)^2\le\delta^2}} |x_0-\varphi(\{\widetilde{x}_k\}_{k\in\mathbb{Z}})|,$$

а погрешностью оптимального восстановления — величину

$$E(\delta) = \inf_{\varphi:l_2^1\to\mathbb{R}} e(\delta,\varphi).$$

Метод, на котором достигается нижняя грань, назовем оптимальным методом. Согласно общей теории (см.[1],[2],[3]) вычисление погрешности оптимального восстановления сводится к решению следующей экстремальной задачи

$$E(\delta) = \sup_{\substack{\{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}}\in l_2^1,\\ \sum_{k\in\mathbb{Z}}{x_k}^2\le\delta^2}} |x_0|.$$

Функция Лагранжа для этой задачи имеет вид

$$L(\{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}},\lambda_1,\lambda_2) = -x_0+\lambda_1\sum_{k\in\mathbb{Z}}{x_k}^2+\lambda_2\sum_{k\in\mathbb{Z}}(x_{k+1}-x_k)^2.$$

Необходимые условия экстремума функции Лагранжа приводят к уравнениям

$$\frac{\partial L}{\partial x_0} = 0 \Rightarrow 2\lambda_2 x_1 - 2(\lambda_1+2\lambda_2)x_0 + 2\lambda_2 x_{-1} = -1 \tag{1}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = 0 \Rightarrow x_{j+1} - \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}+2\right)x_j + x_{j-1} = 0 \tag{2}$$

Будем искать решение (1) и (2) в виде

$$x_j = x_0\mu^{|j|}, j\in\mathbb{Z}. \tag{3}$$

При этом из (1) следует

$$\mu_1 = \mu = \frac{\lambda_1}{2\lambda_2}+1-\sqrt{\left(\frac{\lambda_1}{2\lambda_2}+1\right)^2-1} < 1,$$

$$\mu_2=\frac{1}{\mu}=\frac{\lambda_1}{2\lambda_2}+1+\sqrt{\left(\frac{\lambda_1}{2\lambda_2}+1\right)^2-1}>1 \quad (4)$$

Из (4) видно, что $\mu>0$. Из (3) и из равенства $\sum_{k\in\mathbb{Z}} {x_k}^2=\delta^2$ получим ${x_0}^2\left(1+\frac{2\mu^2}{1-\mu^2}\right)=\delta^2$, откуда

$$ {x_0}^2=\delta^2\frac{1-\mu^2}{1+\mu^2} \quad (5)$$

Из того, что

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}(x_{k+1}-x_k)^2=1,$$

вытекает равенство $\sum_{k\in\mathbb{Z}} {x_0}^2(\mu^{|k+1|}-\mu^{|k|})^2=1$, из которого следует

$$ {x_0}^2=\frac{1+\mu}{2(1-\mu)}. \quad (6)$$

Из (5) и (6) получим

$$\mu=\frac{2\delta^2-\sqrt{4\delta^2-1}}{2\delta^2-1}, \quad \delta>\frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (7)$$

Из (6) и (7) следует, что

$$\widehat{x}_0=\frac{\sqrt[4]{4\delta^2-1}}{\sqrt{2}}. \quad (8)$$

Здесь $\{\widehat{x}_k\},\widehat{\lambda}_1,\widehat{\lambda}_2-$ это последовательность из l_2 и множители Лагранжа, для которых выполняются необходимые условия (1) и (2). Из равенства (1) учитывая, что $\widehat{x}_1=\widehat{x}_0\mu=\widehat{x}_{-1}$, получим, используя (4), (7), (8), а также легко проверяемое равенство $\widehat{\lambda}_1=\frac{2\widehat{\lambda}_2}{2\delta^2-1}$,

$$\widehat{\lambda}_1=\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt[4]{(4\delta^2-1)^3}}, \quad \widehat{\lambda}_2=\frac{2\delta^2-1}{2\sqrt{2}\sqrt[4]{(4\delta^2-1)^3}}.$$

Итак, справедлива следующая

Теорема 1. *Для любой последовательности $\{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}}\in l_2^1$ при $\delta>\frac{1}{\sqrt{2}}$ имеет место тождество*

$$x_0=2\widehat{\lambda}_1\sum_{k\in\mathbb{Z}}x_k\widehat{x}_k+2\widehat{\lambda}_2\sum_{k\in\mathbb{Z}}(x_{k+1}-x_k)(\widehat{x}_{k+1}-\widehat{x}_k), \quad (9)$$

где

$$\widehat{\lambda}_1=\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt[4]{(4\delta^2-1)^3}}, \quad \widehat{\lambda}_2=\frac{2\delta^2-1}{2\sqrt{2}\sqrt[4]{(4\delta^2-1)^3}},$$

а $\widehat{x}_k=\widehat{x}_0\mu^{|k|}$, где $\widehat{x}_0=\frac{\sqrt[4]{4\delta^2-1}}{\sqrt{2}}$, а $\mu=\frac{2\delta^2-\sqrt{4\delta^2-1}}{2\delta^2-1}$.

В справедливости теоремы 1 можно убедиться непосредственной проверкой. Из теоремы 1 следует

Теорема 2. *При $\delta>\frac{1}{\sqrt{2}}$*

$$E(\delta)=2\widehat{\lambda}_1\delta^2+2\widehat{\lambda}_2$$

а метод

$$\widehat{\varphi}(\{\widetilde{x}_k\}_{k\in\mathbb{Z}}\in l_2)=2\widehat{\lambda}_1\sum_{k\in\mathbb{Z}}\widehat{x}_k\widetilde{x}_k \quad (10)$$

является оптимальным.

Из тождества (9) и того, что

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{x}_k^2 = \delta^2$$

и

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\widehat{x}_{k+1} - \widehat{x}_k^2\right)^2 = 1,$$

следует оценка снизу для погрешности оптимального восстановления:

$$E(\delta) \geq \widehat{x}_0 = 2\widehat{\lambda}_1 \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{x}_k^2 + 2\widehat{\lambda}_2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\widehat{x}_{k+1} - \widehat{x}_k\right)^2 = 2\widehat{\lambda}_1\delta^2 + 2\widehat{\lambda}_2.$$

Оценим теперь погрешность метода $\widehat{\varphi}(\{\widetilde{x}_k\}_{k\in\mathbb{Z}})$ сверху, используя тождество (9):

$$|x_0 - \widehat{\varphi}(\{\widetilde{x}_k\}_{k\in\mathbb{Z}})| =$$

$$|x_0 - 2\widehat{\lambda}_1 \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{x}_k(\widetilde{x}_k - x_k + x_k)| \leq$$

$$|x_0 - 2\widehat{\lambda}_1 \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{x}_k x_k| + 2\widehat{\lambda}_1 \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{x}_k|\widetilde{x}_k - x_k| \leq$$

$$2\widehat{\lambda}_2 |\sum_{k\in\mathbb{Z}} (x_{k+1} - x_k)(\widehat{x}_{k+1} - \widehat{x}_k)| + 2\widehat{\lambda}_1 \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{x}_k\right)^{\frac{1}{2}} \delta \leq$$

$$2\widehat{\lambda}_2 + 2\widehat{\lambda}_1\delta^2,$$

так как, в силу неравенства Коши-Буняковского,

$$\left|\sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{x}_k(\widetilde{x}_k - x_k)\right| \leq \sqrt{\sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{x}_k^2 \cdot \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widetilde{x}_k - x_k|^2}$$

и $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widetilde{x}_k - x_k|^2 \leq \delta^2$, а $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{x}_k^2 = \delta^2$, а также

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(|x_{k+1} - x_k|\right)^2 \leq 1, \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\widehat{x}_{k+1} - \widehat{x}_k\right)^2 = 1.$$

Итак,

$$E(\delta) = 2\widehat{\lambda}_1\delta^2 + 2\widehat{\lambda}_2,$$

а метод(10) является оптимальным. Теорема 2 доказана.

Список литературы

[1] *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление функций и их производных по коэффициентам Фурье, заданным с погрешностью // Матем. сб. 2002. Т. 193. №3. с. 79-100.

[2] *C.A.Micchelli and T.J.Rivlin* Lectures of Optimal Recovery // Numerical analisis (Sammer School, Lancaster, 1984) pp 21-93, Lecture Notes in Math., V.1129, Springer-Vorlag, Berlin, 1985.

[3] *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных // Функ. анализ и его прил. 2003. Т. 37. с. 51-64.