Владикавказский математический журнал
2024, Том 26, Выпуск 1, С. 13–26

УДК 517.9
DOI 10.46698/z4058-1920-7739-f

О НАИЛУЧШЕМ ВОССТАНОВЛЕНИИ СЕМЕЙСТВА ОПЕРАТОРОВ НА КЛАССЕ ФУНКЦИЙ ПО НЕТОЧНО ЗАДАННОМУ ИХ СПЕКТРУ

Е. В. Абрамова[1], **Е. О. Сивкова**[1,2]

[1] Национальный исследовательский университет «МЭИ»,
Россия, 111250, Москва, Красноказарменная улица, 14;
[2] Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
Россия, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 53

E-mail: abramova_elena@inbox.ru, sivkova_elena@inbox.ru

Аннотация. В работе рассматривается однопараметрическое семейство линейных непрерывных операторов в $L_2(\mathbb{R}^d)$ и ставится задача об оптимальном восстановлении оператора при данном значении параметра на классе функций, преобразования Фурье которых интегрируемы в квадрате со степенным весом (пространства такой структуры играют важную роль в вопросах вложения функциональных пространств и теории дифференциальных уравнений) по следующей информации: о каждой функции из этого класса известно (вообще говоря, приближенно) ее преобразование Фурье на некотором измеримом подмножестве $\mathbb{R}^d$. Построено семейство оптимальных методов восстановления операторов при каждом значении параметра. Оптимальные методы не используют всю доступную информацию о преобразовании Фурье функций из класса, а используют только информацию о преобразовании Фурье функции в шаре с центром в нуле максимального радиуса, обладающего тем свойством, что его мера равна мере его пересечения с множеством, где известно (точно или приближенно) преобразование Фурье. В качестве следствий доказанного результата получено семейство оптимальных методов восстановления решения уравнения теплопроводности в $\mathbb{R}^d$ в данный момент времени при условии, что о начальной функции, принадлежащей указанному классу, известно точно или приближенно ее преобразование Фурье на некотором измеримом множестве, а также семейство оптимальных методов восстановления решения задачи Дирихле для полупространства на гиперплоскости по преобразованию Фурье граничной функции, принадлежащей указанному классу, которое известно точно или приближенно на некотором измеримом множестве в $\mathbb{R}^d$.

Ключевые слова: оптимальное восстановление, оптимальный метод, экстремальная задача, преобразование Фурье, уравнение теплопроводности, задача Дирихле.

AMS Subject Classification: 42B10, 42B15, 42B35.

Образец цитирования: *Абрамова Е. В., Сивкова Е. О.* О наилучшем восстановлении семейства операторов на классе функций по неточно заданному их спектру // Владикавк. мат. журн.—2024.—Т. 26, вып. 1.—С. 13–26. DOI: 10.46698/z4058-1920-7739-f.

1. Постановка задачи и формулировка основного результата

Пусть $d \in \mathbb{N}$. Через $\mathbb{R}^d$ обозначаем евклидово пространство всех упорядоченных наборов из d вещественных чисел со скалярным произведением $\langle x, \xi \rangle = \sum_{i=1}^d x_i \xi_i$, где $x = (x_1, \ldots, x_d)$ и $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_d)$. Евклидову норму (длину, модуль) вектора $\xi \in \mathbb{R}^d$ обозначаем $|\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + \ldots + \xi_d^2}$.

Пусть n — целое неотрицательное число. Если $n \geqslant 1$, то обозначим через $\mathscr{W}_2^n(\mathbb{R}^d)$ пространство функций $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$, у которых $\int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2n}|F[f](\xi)|^2 d\xi < \infty$ ($F[f](\cdot)$ — преобразование Фурье функции $f(\cdot)$), а через $W_2^n(\mathbb{R}^d)$ обозначим класс функций

$$W_2^n(\mathbb{R}^d) = \left\{ f(\cdot) \in \mathscr{W}_2^n(\mathbb{R}^d) : \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2n} \big|F[f](\xi)\big|^2 d\xi \leqslant 1 \right\}.$$

Если $n = 0$, то $W_2^0(\mathbb{R}^d)$ — единичный шар в $L_2(\mathbb{R}^d)$.

Пусть $a(\cdot)$ — непрерывная неубывающая функция на $\mathbb{R}_+$, $a(0) = 0$ и $a(\eta) \to +\infty$ при $\eta \to +\infty$. Определим семейство операторов $T_a(t)\colon L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)$, $t \geqslant 0$, действующих в образах Фурье по формулам

$$F[T_a(t)f](\xi) = e^{-ta(|\xi|)} F[f](\xi) \text{ для п. в. } \xi \in \mathbb{R}^d \quad \big(\forall\, f(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)\big).$$

Очевидно, что это семейство линейных непрерывных операторов в $L_2(\mathbb{R}^d)$.

Мы ставим следующую задачу. Пусть A — измеримое подмножество $\mathbb{R}^d$ и $\delta \geqslant 0$. Предположим, что о каждой функции $f(\cdot) \in W_2^n(\mathbb{R}^d)$ известно ее преобразование Фурье на множестве A с точностью до δ в метрике $L_2(A)$, т. е. известна некоторая функция $g(\cdot) \in L_2(A)$ такая, что

$$\frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \big\|F[f](\cdot) - g(\cdot)\big\|_{L_2(A)} \leqslant \delta$$

(если $\delta = 0$, то сужение $F[f](\cdot)$ на A известно точно). По этой информации мы хотим восстановить (по возможности, наилучшим образом) значение оператора $T_a(\tau)$ на классе $W_2^n(\mathbb{R}^d)$, где $\tau \geqslant 0$.

Точная постановка такова. Любое отображение $m\colon L_2(A) \to L_2(\mathbb{R}^d)$ объявляется *методом восстановления* и его *погрешность* определяется по формуле

$$e\big(\tau, W_2^n(\mathbb{R}^d), A, \delta, m\big) = \sup_{\substack{f(\cdot)\in W_2^n(\mathbb{R}^d),\, g(\cdot)\in L_2(A),\\ (2\pi)^{-d/2}\|F[f](\cdot)-g(\cdot)\|_{L_2(A)}\leqslant\delta}} \big\|T_a(\tau)f(\cdot) - m(g(\cdot))(\cdot)\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

Если $\delta = 0$, то ясно, что

$$e\big(\tau, W_2^n(\mathbb{R}^d), A, 0, m\big) = \sup_{f(\cdot)\in W_2^n(\mathbb{R}^d)} \big\|T_a(\tau)f(\cdot) - m(F[f](\cdot)|_A)(\cdot)\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)},$$

где $F[f](\cdot)|_A$ — сужение $F[f](\cdot)$ на A.

Нас интересует величина

$$E\big(\tau, W_2^n(\mathbb{R}^d), A, \delta\big) = \inf_m e\big(\tau, W_2^n(\mathbb{R}^d), A, \delta, m\big),$$

где m пробегает все отображения $m\colon L_2(A) \to L_2(\mathbb{R}^d)$, называемая *погрешностью оптимального восстановления*, и те методы $\widehat{m}$, на которых нижняя грань достигается, т. е.

$$E\big(\tau, W_2^n(\mathbb{R}^d), A, \delta\big) = e\big(\tau, W_2^n(\mathbb{R}^d), A, \delta, \widehat{m}\big).$$

Такие методы мы называем *оптимальными методами восстановления*.

Пусть $B(x, r)$ — замкнутый шар в $\mathbb{R}^d$ с центром в точке x радиуса $r \geqslant 0$ ($B(x, 0) = x$). Положим

$$r_A = \sup\big\{r \geqslant 0 : \operatorname{mes}(A \cap B(0, r)) = \operatorname{mes} B(0, r)\big\}.$$

Теорема. *Пусть A — измеримое множество в $\mathbb{R}^d$ и $\delta \geqslant 0$.*

1. *Если $r_A = 0$, то*
$$E\big(\tau, W_2^n\big(\mathbb{R}^d\big), A, \delta\big) = +\infty.$$

2. *Если $0 < r_A < +\infty$ и $\delta = 0$, то*
$$E\big(\tau, W_2^n\big(\mathbb{R}^d\big), A, 0\big) = \frac{e^{-2\tau a(r_A)}}{r_A^{2n}}.$$

Оптимальный метод — линейный оператор $\widehat{m}\colon L_2(A) \to L_2(\mathbb{R}^d)$, действующий для п. в. $x \in \mathbb{R}^d$ по формуле
$$\widehat{m}\big(F[f](\cdot)|_A\big)(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{B(0,\, r_A)} e^{-\tau a(|\xi|)} F[f](\xi) e^{i\langle \xi, x\rangle}\, d\xi.$$

3. *Если $0 < r_A \leqslant +\infty$ и $\delta > 0$, то*
$$E\big(\tau, W_2^n\big(\mathbb{R}^d\big), A, \delta\big) = \begin{cases} \sqrt{\delta^2 + \dfrac{e^{-2\tau a(r_A)}}{r_A^{2n}}}, & r_A < +\infty, \\ \delta, & r_A = +\infty. \end{cases}$$

При $r_A < +\infty$ для каждой функции $\omega(\cdot) \in L_\infty(\mathbb{R}^d)$ такой, что $\omega(\xi) = 0$, если $\xi \notin B(0, r_A)$ и
$$|\omega(\xi)|^2 + \frac{|1 - \omega(\xi)|^2}{e^{-2\tau a(r_A)} r_A^{-2n} |\xi|^{2n}} \leqslant 1 \tag{1}$$

для п. в. $\xi \in B(0, r_A)$, оптимальный метод — линейный оператор $\widehat{m}_\omega\colon L_2(A) \to L_2(\mathbb{R}^d)$, действующий для п. в. $x \in \mathbb{R}^d$ по формуле
$$\widehat{m}_\omega(g(\cdot))(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{B(0, r_A)} e^{-\tau a(|\xi|)} \omega(\xi) g(\xi) e^{i\langle \xi, x\rangle}\, d\xi.$$

При $r_A = +\infty$ оптимальный метод — линейный оператор $\widehat{m}\colon L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)$, действующий в образах Фурье по правилу
$$F\big[\widehat{m}(g(\cdot))\big](\xi) = e^{-\tau a(|\xi|)} g(\xi) \ \text{ для п. в. } \ \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Сделаем несколько замечаний по поводу сформулированной теоремы. Первое ее утверждение означает, что если $r_A = 0$, то погрешность любого метода восстановления бесконечна, и значит, никаким способом нельзя восстановить соответствующий оператор на всем классе.

Если $0 < r_A < +\infty$ и преобразование Фурье функции $f(\cdot)$ на A известно с точностью до $\delta \geqslant 0$, то чем больше радиус шара с центром в нуле, который можно вписать (в указанном смысле) в A, тем погрешность оптимального восстановления меньше. Но знание преобразования Фурье за пределами этого шара оказывается лишним — оптимальный метод эту информацию не использует.

Ясно, что функция $\omega(\cdot) = 1$ удовлетворяет неравенству (1), т. е. метод, где используется само наблюдение, является оптимальным. В доказательстве будет показано (см. п. 4 в § 2), что существуют и другие функции $\omega(\cdot)$, удовлетворяющие (1). Используя их (уже «обрабатывая» наблюдение) можно получить для конкретной функции оценку, лучшую той, что указана в теореме.

2. Доказательство теоремы

1. Покажем сначала, что справедлива следующая оценка:

$$E\big(\tau, W_2^n\big(\mathbb{R}^d\big), \delta, A\big) \geqslant \sup_{\substack{f(\cdot)\in W_2^n(\mathbb{R}^d),\\ (2\pi)^{-d/2}\|F[f](\cdot)\|_{L_2(A)}\leqslant\delta}} \big\|T_a(\tau)f(\cdot)\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}. \tag{2}$$

Действительно, пусть $f_0(\cdot) \in W_2^n(\mathbb{R}^d)$ и $\frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\|F[f_0](\cdot)\|_{L_2(A)} \leqslant \delta$. Тогда функция $-f_0(\cdot)$ также удовлетворяет этим соотношениям, и мы имеем для любого $m\colon L_2(A) \to L_2(\mathbb{R}^d)$

$$\begin{aligned}2\big\|T_a(\tau)f_0(\cdot)\big\|_{L_2(\mathbb{R})} &= \big\|T_a(\tau)f_0(\cdot) - m(0)(\cdot) - (T_a(\tau)(-f_0(\cdot)) - m(0)(\cdot))\big\|_{L_2(\mathbb{R})}\\ &\leqslant 2 \sup_{\substack{f(\cdot)\in W_2^n(\mathbb{R}^d),\\ (2\pi)^{-d/2}\|F[f](\cdot)\|_{L_2(A)}\leqslant\delta}} \big\|T_a(\tau)f(\cdot) - m(0)(\cdot)\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\end{aligned}$$

$$\leqslant 2 \sup_{\substack{f(\cdot)\in W_2^n(\mathbb{R}^d),\, g(\cdot)\in L_2(\mathbb{R}^d),\\ (2\pi)^{-d/2}\|F[f](\cdot)-g(\cdot)\|_{L_2(A)}\leqslant\delta}} \big\|T_a(\tau)f(\cdot) - m(g(\cdot))(\cdot)\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = 2e\big(\tau, W_2^n\big(\mathbb{R}^d\big), A, \delta, m\big).$$

Переходя слева к верхней грани по всем функциям $f(\cdot)$ таким, что $f(\cdot) \in W_2^n(\mathbb{R}^d)$ и $\frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\|F[f](\cdot)\|_{L_2(A)} \leqslant \delta$, приходим к неравенству

$$\sup_{\substack{f(\cdot)\in W_2^n(\mathbb{R}^d),\\ (2\pi)^{-d/2}\|F[f](\cdot)\|_{L_2(A)}\leqslant\delta}} \big\|T_a(\tau)f(\cdot)\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant e\big(\tau, W_2^n\big(\mathbb{R}^d\big), A, \delta, m\big).$$

Метод m был выбран произвольно, и поэтому переходя справа к нижней грани по всем методам m, получаем оценку (2).

Величина справа в (2) есть значение следующей экстремальной задачи:

$$\big\|T_a(\tau)f(\cdot)\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \to \max, \quad \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\big\|F[f](\cdot)\big\|_{L_2(A)} \leqslant \delta, \quad f(\cdot) \in W_2^n\big(\mathbb{R}^d\big), \tag{3}$$

т. е. точная верхняя грань максимизируемого функционала при данных ограничениях.

В образах Фурье, согласно теореме Планшереля, квадрат значения задачи (3) равен значению такой задачи:

$$\begin{gathered}\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-2\tau a(|\xi|)}\big|F[f](\xi)\big|^2\,d\xi \to \max, \quad \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{A}\big|F[f](\xi)\big|^2\,d\xi \leqslant \delta^2,\\ \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d}|\xi|^{2n}\big|F[f](\xi)\big|^2\,d\xi \leqslant 1, \quad f(\cdot) \in L_2\big(\mathbb{R}^d\big).\end{gathered} \tag{4}$$

2. Докажем первое утверждение теоремы. Для этого, в силу (2), достаточно показать, что значение задачи (4) (а значит, и задачи (3)) равно $+\infty$.

Действительно, в этом случае $\operatorname{mes}(A \cap B(0,\varepsilon)) < \operatorname{mes} B(0,\varepsilon)$ для любого $\varepsilon > 0$, и значит, мера множества $\Omega_\varepsilon = (\mathbb{R}^d \setminus A) \cap B(0,\varepsilon)$ положительна. Положим

$$F[f_\varepsilon](\xi) = \begin{cases}(2\pi)^{d/2}\left(\int\limits_{\Omega_\varepsilon}|x|^{2n}\,dx\right)^{-1/2}, & \xi \in \Omega_\varepsilon,\\ 0, & \xi \notin \Omega_\varepsilon.\end{cases}$$

Эта функция допустима в задаче (4), поскольку

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_A \bigl|F[f](\xi)\bigr|^2\,d\xi = 0 \leqslant \delta^2 \quad \text{и} \quad \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2n}\bigl|F[f_\varepsilon](\xi)\bigr|^2\,d\xi = \frac{\int\limits_{\Omega_\varepsilon}|\xi|^{2n}\,d\xi}{\int\limits_{\Omega_\varepsilon}|x|^{2n}\,dx} = 1.$$

Оценим значение максимизируемого функционала в этой задаче. При $\xi \in \Omega_\varepsilon$ имеем $|\xi|^{-2} \geqslant \varepsilon^{-2}$, $e^{2\tau a(|\xi|)} \leqslant e^{2\tau a(\varepsilon)}$, и поэтому

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-2\tau a(|\xi|)}\bigl|F[f](\xi)\bigr|^2\,d\xi = \frac{\int\limits_{\Omega_\varepsilon} e^{-2\tau a(|\xi|)}\,d\xi}{\int\limits_{\Omega_\varepsilon}|x|^{2n}dx}$$

$$= \frac{\int\limits_{\Omega_\varepsilon} e^{-2\tau a(|\xi|)}|\xi|^{2n}|\xi|^{-2n}\,d\xi}{\int\limits_{\Omega_\varepsilon} e^{2\tau a(|x|)}e^{-2\tau a(|x|)}|x|^{2n}\,dx} \geqslant \frac{\varepsilon^{-2n}\int\limits_{\Omega_\varepsilon} e^{-2\tau a(|\xi|)}|\xi|^{2n}\,d\xi}{e^{2\tau a(\varepsilon)}\int\limits_{\Omega_\varepsilon} e^{-2\tau a(|x|)}|x|^{2n}\,dx} \geqslant e^{-2\tau a(\varepsilon)}\varepsilon^{-2n}$$

для п. в. $\xi \in \Omega_\varepsilon$, откуда, в силу произвольности ε, следует, что значение максимизируемого функционала в (4) может быть сделано сколь угодно большим.

3. Докажем второе утверждение теоремы. Сначала оценим снизу погрешность оптимального восстановления $E(\tau, W_2^n(\mathbb{R}^d), A, 0)$. Как показано выше, квадрат этой величины не меньше значения задачи (4). Поскольку $\delta = 0$, то второе ограничение в (4) означает, что $F[f](\xi) = 0$ для п. в. $\xi \in A$, а тогда сама задача (4) переписывается в этом случае так:

$$\begin{gathered}\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d\setminus A} e^{-2\tau a(|\xi|)}\bigl|F[f](\xi)\bigr|^2\,d\xi \to \max,\ \ F[f](\xi) = 0 \ \text{ для п. в. } \ \xi \in A,\\ \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d\setminus A} |\xi|^{2n}\bigl|F[f](\xi)\bigr|^2\,d\xi \leqslant 1, \quad f(\cdot) \in L_2\bigl(\mathbb{R}^d\bigr).\end{gathered} \tag{5}$$

Построим последовательность допустимых функций в задаче (5). В силу определения r_A для каждого $k \in \mathbb{N}$ множество $\Omega_k = (\mathbb{R}^d \setminus A) \cap B(0, r_A + 1/k)$ имеет ненулевую меру. Рассмотрим семейство функций $f_k(\cdot)$, преобразование Фурье которых имеет вид

$$F[f_k](\xi) = \begin{cases} \dfrac{(2\pi)^{d/2}}{(r_A + 1/k)^n\sqrt{\operatorname{mes}\Omega_k}}\,, & \xi \in \Omega_k,\\ 0, & \xi \notin \Omega_k.\end{cases}$$

Легко видеть, что $f_k(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$, $F[f_k](\xi) = 0$ для $\xi \in A$, и так как

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d\setminus A} |\xi|^{2n}\bigl|F[f_k](\xi)\bigr|^2\,d\xi = \frac{1}{(r_A + 1/k)^{2n}\cdot\operatorname{mes}\Omega_k}\int\limits_{\Omega_k}|\xi|^{2n}\,d\xi$$

$$\leqslant \frac{(r_A + 1/k)^{2n}}{(r_A + 1/k)^{2n}\cdot\operatorname{mes}\Omega_k}\int\limits_{\Omega_k} d\xi = 1,$$

то функции $f_k(\cdot)$ допустимы в задаче (5).

Оценим значение максимизируемого функционала в этой задаче на данных функциях:

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d\setminus A} e^{-2\tau a(|\xi|)}\big|F[f_k](\xi)\big|^2\,d\xi = \frac{1}{(r_A+1/k)^{2n}\cdot\operatorname{mes}\Omega_k}\int\limits_{\Omega_k} e^{-2\tau a(|\xi|)}\,d\xi$$

$$\geqslant \frac{e^{-2\tau a(r_A+1/k)}}{(r_A+1/k)^{2n}\cdot\operatorname{mes}\Omega_k}\int\limits_{\Omega_k} d\xi = \frac{e^{-2\tau a(r_A+1/k)}}{(r_A+1/k)^{2n}}.$$

Величина справа стремится к $r_A^{-2n}e^{-2\tau a(r_A)}$. Отсюда следует, что значение задачи (5) не меньше этой величины.

Таким образом, для погрешности оптимального восстановления справедлива оценка

$$E\big(\tau, W_2^n\big(\mathbb{R}^d\big), A, 0\big) \geqslant \frac{e^{-\tau a(r_A)}}{r_A^n}. \tag{6}$$

Перейдем теперь к доказательству оценки сверху для погрешности оптимального восстановления и оптимальности указанного в утверждении 2 теоремы метода восстановления.

Оптимальность метода $\widehat{m}$ означает, что его погрешность, т. е. значение задачи

$$\big\|T_a(\tau)f(\cdot) - \widehat{m}(F[f](\cdot)|_A)(\cdot)\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \to \max, \quad f(\cdot)\in W_2^n\big(\mathbb{R}^d\big), \tag{7}$$

совпадает с величиной $E(\tau, W_2^n(\mathbb{R}^d), A, 0)$.

Переходя к образам Фурье в задаче (7), получим по теореме Планшереля, что квадрат ее значения равен значению такой задачи:

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-2\tau a(|\xi|)}\big|F[f](\xi) - F[f](\xi)|_A\big|^2\,d\xi \to \max,$$

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2n}\big|F[f](\xi)\big|^2\,d\xi \leqslant 1, \quad f(\cdot)\in L_2\big(\mathbb{R}^d\big),$$

где мы полагаем $F[f](\cdot)|_A$ равным нулю за пределами множества A. Оценим значение максимизируемого функционала. Используя неубывание функции $a(|\cdot|)$, имеем

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-2\tau a(|\xi|)}\big|F[f](\xi) - F[f](\xi)|_A\big|^2\,d\xi = \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d\setminus B(0,r_A)} e^{-2\tau a(|\xi|)}\big|F[f](\xi)\big|^2\,d\xi$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d\setminus B(0,r_A)} e^{-2\tau a(|\xi|)}|\xi|^{-2n}|\xi|^{2n}\big|F[f](\xi)\big|^2\,d\xi \leqslant \frac{e^{-2\tau a(r_A)}}{(2\pi)^d r_A^{2n}}\int\limits_{\mathbb{R}^d\setminus B(0,r_A)} |\xi|^{2n}\big|F[f](\xi)\big|^2\,d\xi$$

$$\leqslant \frac{e^{-2\tau a(r_A)}}{(2\pi)^d r_A^{2n}}\int\limits_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2n}\big|F[f](\xi)\big|^2\,d\xi \leqslant \frac{e^{-2\tau a(r_A)}}{r_A^{2n}}.$$

Отсюда следует, что $E(\tau, W_2^n(\mathbb{R}^d), A, 0) \leqslant \frac{e^{-\tau a(r_A)}}{r_A^n}$. Вместе с оценкой (6) это означает, что

$$E\big(\tau, W_2^n\big(\mathbb{R}^d\big), A, 0\big) = \frac{e^{-\tau a(r_A)}}{r_A^n},$$

и что $\widehat{m}$ — оптимальный метод. Утверждение 2 теоремы доказано.

4. Докажем третье утверждение теоремы. Как и раньше, начинаем с оценки снизу величины $E(\tau, W_2^n(\mathbb{R}^d), A, \delta)$.

Для каждого $k \in \mathbb{N}$ обозначим через B_k замкнутый шар в $\mathbb{R}^d$ с центром в нуле радиуса r_A/k и, как и выше, $\Omega_k = (\mathbb{R}^d \setminus A) \cap B(0, r_A + 1/k)$. Напомним, что силу определения r_A, для каждого $k \in \mathbb{N}$ множество Ω_k имеет ненулевую меру. Также легко видеть, что $\operatorname{mes}(B_k \cap \Omega_k) = 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$, и соответственно $\operatorname{mes}(\Omega_k \setminus B_k) = \operatorname{mes}\Omega_k$. Для достаточно больших k рассмотрим семейство функций $\varphi_k(\cdot)$, преобразование Фурье которых имеет вид

$$F[\varphi_k](\xi) = \begin{cases} K_1(k), & \xi \in B_k, \\ K_2(k), & \xi \in \Omega_k \setminus B_k, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases}$$

где

$$K_1^2(k) = \frac{(2\pi)^d \delta^2}{\operatorname{mes} B_k}, \quad K_2^2(k) = (2\pi)^d \, \frac{1 - \delta^2 (r_A/k)^{2n}}{(r_A + 1/k)^{2n} \cdot \operatorname{mes}\Omega_k}\,.$$

Легко видеть, что функции $\varphi_k(\cdot)$ допустимы в задаче (4), так как

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_A \bigl|F[\varphi_k](\xi)\bigr|^2 \, d\xi = \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{B_k} K_1^2(k) \, d\xi = \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{B_k} \frac{(2\pi)^d \delta^2}{\operatorname{mes} B_k} \, d\xi = \delta^2$$

и

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2n} \bigl|F[\varphi_k](\xi)\bigr|^2 \, d\xi = \frac{1}{(2\pi)^d} \Biggl(\int\limits_{B_k} K_1^2(k) |\xi|^{2n} d\xi + \int\limits_{\Omega_k \setminus B_k} K_2^2(k) |\xi|^{2n} d\xi \Biggr)$$
$$\leqslant \delta^2 (r_A/k)^{2n} + \frac{1 - \delta^2 (r_A/k)^{2n}}{(r_A + 1/k)^{2n}} \, (r_A + 1/k)^{2n} = 1.$$

Оценим значение максимизируемого функционала в задаче (4) на этих функциях:

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-2\tau a(|\xi|)} \bigl|F[\varphi_k](\xi)\bigr|^2 \, d\xi = \frac{1}{(2\pi)^d} \Biggl(K_1^2(k) \int\limits_{B_k} e^{-2\tau a(|\xi|)} \, d\xi + K_2^2(k) \int\limits_{\Omega_k \setminus B_k} e^{-2\tau a(|\xi|)} \, d\xi \Biggr)$$
$$\geqslant \frac{K_1^2(k) e^{-2\tau a(r_A/k)} \cdot \operatorname{mes} B_k}{(2\pi)^d} + \frac{K_2^2(n) e^{-2\tau a(r_A + 1/k)} \cdot \operatorname{mes}\Omega_k}{(2\pi)^d}$$
$$= \delta^2 e^{-2\tau a(r_A/k)} + \frac{1 - \delta^2 (r_A/k)^{2n}}{(r_A + 1/k)^{2n}} \, e^{-2\tau a(r_A + 1/k)}.$$

Ясно, что величина справа стремится к $\delta^2 + e^{-2\tau a(r_A)} r_A^{-2n}$. Отсюда следует, что значение задачи (4) не меньше этой величины.

Таким образом, в случае, когда $\delta > 0$, $0 < r_A < +\infty$ для погрешности оптимального восстановления получена оценка

$$E\bigl(\tau, W_2^n\bigl(\mathbb{R}^d\bigr), A, \delta\bigr) \geqslant \sqrt{\delta^2 + \frac{e^{-2\tau a(r_A)}}{r_A^{2n}}}\,. \tag{8}$$

При $r_A \to +\infty$ величина справа в (8) стремится к δ. Поэтому при $r_A = +\infty$

$$E\bigl(\tau, W_2^n\bigl(\mathbb{R}^d\bigr), A, \delta\bigr) \geqslant \delta. \tag{9}$$

Противоположные неравенства докажем одновременно с доказательством оптимальности указанных в утверждении 3 теоремы методов восстановления.

Пусть $r_A < +\infty$. Оптимальные методы будем искать среди линейных методов следующего вида. Пусть функция $\omega(\cdot)$ принадлежит $L_\infty(\mathbb{R}^d)$ и равна нулю вне шара $B(0, r_A)$. Каждая такая функция задает оператор $m_\omega\colon L_2(A) \to L_2(\mathbb{R}^d)$, сопоставляющий функции $g(\cdot) \in L_2(A)$ функцию $m_\omega(g(\cdot))(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$, преобразование Фурье которой имеет вид $F[m_\omega(g(\cdot))](\cdot) = e^{-\tau a(|\cdot|)}\omega(\cdot)g(\cdot)$, считая, что $g(\cdot) = 0$ вне множества A.

Выбор такого семейства операторов обусловлен тем, что оператор $T_a(\tau)$, который мы восстанавливаем, в образах Фурье есть умножение преобразования Фурье функции $f(\cdot)$ на функцию $e^{-\tau a(|\cdot|)}$, а также тем, что из полученной оценки снизу видно, что информация о преобразовании Фурье за пределами шара $B(0, r_A)$ не нужна (в оценке участвует только величина r_A), так что естественно ограничиться функциями $\omega(\cdot)$, которые равны нулю вне $B(0,\, r_A)$.

Проверим сначала, что множество измеримых функций $\omega(\cdot)$, удовлетворяющих неравенству (1), состоит не только из функции $\omega(\cdot) = 1$. Действительно, обозначив $\lambda = e^{-2\tau a(r_A)} r_A^{-2n}$, после несложных преобразований имеем

$$|\omega(\xi)|^2 + \frac{|1-\omega(\xi)|^2}{\lambda|\xi|^{2n}} = |\omega(\xi)|^2 + \frac{|\omega(\xi)|^2}{\lambda|\xi|^{2n}} - \frac{2}{\lambda|\xi|^{2n}}\operatorname{Re}\omega(\xi) + \frac{1}{\lambda|\xi|^{2n}}$$
$$= \frac{1+\lambda|\xi|^{2n}}{\lambda|\xi|^{2n}}\left(|\omega(\xi)|^2 - \frac{2}{1+\lambda|\xi|^{2n}}\operatorname{Re}\omega(\xi)\right) + \frac{1}{\lambda|\xi|^{2n}} = \frac{1+\lambda|\xi|^{2n}}{\lambda|\xi|^{2n}}\left|\omega(\xi) - \frac{1}{1+\lambda|\xi|^{2n}}\right|^2$$
$$- \frac{1}{\lambda|\xi|^{2n}(1+\lambda|\xi|^{2n})} + \frac{1}{\lambda|\xi|^{2n}} = \frac{1+\lambda|\xi|^{2n}}{\lambda|\xi|^{2n}}\left|\omega(\xi) - \frac{1}{1+\lambda|\xi|^{2n}}\right|^2 + \frac{1}{1+\lambda|\xi|^{2n}}\,.$$

Отсюда уже легко следует, что

$$\left|\omega(\xi) - \frac{1}{1+\lambda|\xi|^{2n}}\right| \leqslant \frac{\lambda|\xi|^{2n}}{1+\lambda|\xi|^{2n}},$$

и тем самым видно, что множество функций $\omega(\cdot)$, удовлетворяющих неравенству (1), достаточно велико.

Оптимальность метода m_ω означает, что его погрешность равна погрешности оптимального восстановления, т. е. значение задачи

$$\begin{gathered}\big\|T_a(\tau)f(\cdot) - m_\omega(g(\cdot))(\cdot)\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \to \max,\\ \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\,\big\|F[f](\cdot) - g(\cdot)\big\|_{L_2(A)} \leqslant \delta, \quad f(\cdot) \in W_2^n\big(\mathbb{R}^d\big),\ g(\cdot) \in L_2(A),\end{gathered} \tag{10}$$

совпадает с величиной $E(\tau, W_2^n(\mathbb{R}^d), A, \delta)$.

Переходя к образам Фурье в задаче (10), получим по теореме Планшереля, что квадрат ее значения равен значению такой задачи:

$$\begin{gathered}\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-2\tau a(|\xi|)}\big|F[f](\xi) - \omega(\xi)g(\xi)\big|^2\,d\xi \to \max,\\ \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_A \big|F[f](\xi) - g(\xi)\big|^2\,d\xi \leqslant \delta^2, \quad \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2n}\big|F[f](\xi)\big|^2\,d\xi \leqslant 1, \quad f(\cdot) \in L_2\big(\mathbb{R}^d\big).\end{gathered} \tag{11}$$

Оценим по неравенству Коши — Буняковского для каждого $\xi \in B(0, r_A)$ выражение под знаком интеграла в максимизируемом функционале в (11):

$$e^{-2\tau a(|\xi|)}\big|F[f](\xi) - \omega(\xi)g(\xi)\big|^2 = e^{-2\tau a(|\xi|)}\big|\omega(\xi)(F[f](\xi) - g(\xi)) + (1 - \omega(\xi))F[f](\xi)\big|^2$$

$$= e^{-2\tau a(|\xi|)}\left|\omega(\xi)(F[f](\xi) - g(\xi)) + \frac{1 - \omega(\xi)}{e^{-\tau a(r_A)}r_A^{-n}|\xi|^n}\, e^{-\tau a(r_A)}r_A^{-n}|\xi|^n F[f](\xi)\right|^2$$

$$\leqslant e^{-2\tau a(|\xi|)}\left(|\omega(\xi)|^2 + \frac{|1 - \omega(\xi)|^2}{e^{-2\tau a(r_A)}r_A^{-2n}|\xi|^{2n}}\right)\big(|F[f](\xi) - g(\xi)|^2 + e^{-2\tau a(r_A)}r_A^{-2n}|\xi|^{2n}|F[f](\xi)|^2\big).$$

Интегрируя это неравенство по шару $B(0, r_A)$, и учитывая, что

$$|\omega(\xi)|^2 + \frac{|1 - \omega(\xi)|^2}{e^{-2\tau a(r_A)}r_A^{-2n}|\xi|^{2n}} \leqslant 1$$

для п. в. $\xi \in B(0, r_A)$, будем иметь

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{B(0,r_A)} e^{-2\tau a(|\xi|)}\big|F[f](\xi) - \omega(\xi)g(\xi)\big|^2\, d\xi \leqslant \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{B(0,r_A)} e^{-2\tau a(|\xi|)}\big|F[f](\xi) - g(\xi)\big|^2\, d\xi$$

$$+ \frac{e^{-2\tau a(r_A)}r_A^{-2n}}{(2\pi)^d}\int\limits_{B(0,r_A)} e^{-2\tau a(|\xi|)}|\xi|^{2n}\big|F[f](\xi)\big|^2\, d\xi \leqslant \delta^2 + \frac{e^{-2\tau a(r_A)}}{r_A^{2n}(2\pi)^d}\int\limits_{B(0,r_A)} |\xi|^{2n}\big|F[f](\xi)\big|^2\, d\xi.$$

Оценим теперь интеграл по дополнению к $B(0, r_A)$ (учитывая, что функция $\omega(\cdot)$ на этом множестве равна нулю):

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d\setminus B(0,r_A)} e^{-2\tau a(|\xi|)}\big|F[f](\xi) - \omega(\xi)g(\xi)\big|^2\, d\xi = \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d\setminus B(0,r_A)} e^{-2\tau a(|\xi|)}\big|F[f](\xi)\big|^2\, d\xi$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d\setminus B(0,r_A)} e^{-2\tau a(|\xi|)}|\xi|^{-2n}|\xi|^{2n}\big|F[f](\xi)\big|^2\, d\xi \leqslant \frac{e^{-2\tau a(r_A)}}{r_A^{2n}(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d\setminus B(0,r_A)} |\xi|^{2n}\big|F[f](\xi)\big|^2.$$

Складывая полученные оценки, приходим к неравенству

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-2\tau a(|\xi|)}\big|F[f](\xi) - \omega(\xi)g(\xi)\big|^2 d\xi \leqslant \delta^2 + \frac{e^{-2\tau a(r_A)}}{r_A^{2n}},$$

и тем самым

$$E\big(\tau, W_2^n\big(\mathbb{R}^d\big), \delta, A\big) \leqslant \sqrt{\delta^2 + \frac{e^{-2\tau a(r_A)}}{r_A^{2n}}}\,.$$

Вместе с оценкой (8) это означает, что при таком $\omega(\cdot)$ метод m_ω оптимален и справедливо выражение для погрешности оптимального восстановления, указанное в теореме.

Пусть теперь $r_A = +\infty$, т. е. $A = \mathbb{R}^d$ с точностью до множества меры нуль. Оценка максимизируемого функционала в (11) очевидна:

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-2\tau a(|\xi|)}\big|F[f](\xi) - g(\xi)\big|^2 d\xi \leqslant \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} \big|F[f](\xi) - g(\xi)\big|^2 d\xi \leqslant \delta^2.$$

Вместе с оценкой (9) это означает, что метод $\widehat{m}$ оптимален и справедливо выражение для погрешности оптимального восстановления, указанное в теореме.

Утверждение 3, а вместе с ним и сама теорема доказаны.

3. Примеры

Рассмотрим теперь в качестве примера задачу об оптимальном восстановлении решения уравнения теплопроводности в $\mathbb{R}^d$. Распространение тепла на $\mathbb{R}^d$ описывается уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$$

(Δ — оператор Лапласа в $\mathbb{R}^d$ и $(t,x) \mapsto u(t,x)$ — функция на $[0,+\infty) \times \mathbb{R}^d$) с начальныи распределением температуры $u(0,\cdot) = f(\cdot)$.

Мы предполагаем, что $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$. Единственное решение данной задачи дается для всех $t > 0$, как хорошо известно, интегралом Пуассона

$$u(t,x) = u(t,x; f(\cdot)) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} f(y)\,dy,$$

и при этом $u(t,\cdot; f(\cdot)) \to f(\cdot)$ при $t \to 0$ в метрике $L_2(\mathbb{R}^d)$.

Таким образом, мы имеем семейство операторов $T(t)\colon L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)$, $T(t)f(\cdot) = u(t,\cdot)$, и, как хорошо известно, преобразование Фурье решения уравнения теплопроводности имеет вид

$$F[T(t)f(\cdot)](\xi) = F[u(t,x; f(\cdot))](\xi) = e^{-t|\xi|^2} F[f](\xi) \ \text{ для п. в. } \ \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Следовательно, если поставить задачу об оптимальном восстановлении температуры в $\mathbb{R}^d$ в момент времени τ по преобразованию Фурье начальной функции $f(\cdot) \in W_2^n(\mathbb{R}^d)$, известному точно или приближенно на некотором измеримом множестве A, то ее решение дается доказанной теоремой при $a(|\xi|) = |\xi|^2$, $\xi \in \mathbb{R}^d$.

В качестве второго примера рассмотрим задачу Дирихле

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \\ u(\,\cdot\,,0) = f(\cdot), \end{cases}$$

где Δ — оператор Лапласа в $\mathbb{R}^{d+1}$ и $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$, заключающуюся в нахождении гармонической функции $u(\cdot,\cdot)$ в верхнем полупространстве $\{(x,y) \in \mathbb{R}^{d+1} : y > 0\}$, такую, что $u(\cdot,y) \in L_2(\mathbb{R}^d)$ для любого $y > 0$, $\sup_{y>0} \|u(\cdot,y)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} < \infty$ и $u(\cdot,y) \to f(\cdot)$ при $y \to 0$ в метрике $L_2(\mathbb{R}^d)$.

В этом случае решение задачи Дирихле единственно и выражается интегралом Пуассона (см. [1])

$$u(x,y) = u(x,y; f) = \frac{\Gamma((d+1)/2)}{\pi^{(d+1)/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \frac{y f(t)}{(|x-t|^2 + y^2)^{(d+1)/2}}\,dt.$$

Как и в предыдущем примере, мы имеем семейство операторов $T(y)\colon L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)$, $T(y)f(\cdot) = u(\cdot,y)$, которые в образах Фурье имеют вид

$$F[T(y)f](\xi) = F[u(x,y; f)](\xi) = e^{-y|\xi|} F[f](\xi).$$

Если поставить задачу об оптимальном восстановлении значений гармонической функции на гиперплоскости $y = Y$ по преобразованию Фурье граничной функции $f(\cdot) \in W_2^n(\mathbb{R}^d)$, известному точно или приближенно на некотором измеримом множестве A, то ее решение дается доказанной здесь теоремой, когда $a(|\xi|) = |\xi|$, $\xi \in \mathbb{R}^d$.

Рассмотренная в данной работе задача относится к задачам теории оптимального восстановления. Эта теория возникла в середине шестидесятых годов прошлого века и занимается задачами оптимального (наилучшего) восстановления значений линейных функционалов и операторов на классах множеств, элементы которых известны приближенно. Отметим здесь обзоры [2–4], монографию [5] и статьи [6, 7]. Что касается тематики данной статьи, то отметим работу [8], где рассматривался более общий класс операторов, но для них ставилась несколько иная задача. Также отметим работы [9, 10], где исследовались задачи оптимального восстановления семейств линейных операторов по неточным измерениям, и работы [11–17], где рассматривались задачи оптимального восстановления решений уравнения теплопроводности и задачи Дирихле в различных постановках.

Литература

1. *Стейн И. М., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах.—М.: Мир, 1974.
2. *Micchelli C. A., Rivlin T. J.* A survey of optimal recovery // Optimal Estimation in Approximation Theory / Eds. C. A. Micchelli and T. J. Rivlin.—N. Y.: Plenum Press, 1977.—P. 1–54. DOI: 10.1007/978-1-4684-2388-4_1.
3. *Melkman A. A., Micchelli C. A.* Optimal estimation of linear operators in Hilbert spaces from inaccurate data // SIAM J. Numer. Anal.—1979.—Vol. 16, № 1.—P. 87–105.
4. *Micchelli C. A., Rivlin T. J.* Lectures on optimal recovery // Lecture Notes Math.—Berlin: Springer–Verlag, 1985.—Vol. 1129.—P. 21–93. DOI: 10.1007/bfb0075157.
5. *Traub J. F., Woźniakowski H.* A General Theory of Optimal Algorithms.—N. Y.: Acad. Press, 1980.
6. *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных // Функцион. анализ и его прил.—2003.—Т. 37, № 3.—С. 51–64. DOI: 10.4213/faa157.
7. *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Об оптимальном гармоническом синтезе по неточно заданному спектру // Функцион. анализ и его прил.—2010.—Т. 44, № 3.—С. 76–79. DOI: 10.4213/faa2999.
8. *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* О восстановлении операторов сверточного типа по неточной информации // Труды МИАН.—2010.—Т. 269.—С. 181–192.
9. *Magaril-Il'yaev G. G., Sivkova E. O.* Optimal recovery of the semi-group operators from inaccurate data // Eurasian Math. J.—2019.—Vol. 10, № 4.—P. 75–84. DOI: 10.32523/2077-9879-2019-10-4-75-84.
10. *Сивкова Е. О.* Оптимальное восстановление семейства операторов по неточным измерениям на компакте // Владикавк. мат. журн.—2023.—Т. 25, № 2.—С. 124–135. DOI: 10.46698/b9762-8415-3252-n.
11. *Magaril-Il'yaev G. G., Osipenko K. Yu., Tikhomirov V. M.* On optimal recovery of heat equation solutions // Approximation Theory: A Volume Dedicated to B. Bojanov / Eds. D. K. Dimitrov, G. Nikolov and R. Uluchev.—Sofia: Marin Drinov Acad. Publ. House, 2004.—P. 163–175.
12. *Осипенко К. Ю.* О восстановлении решения задачи Дирихле по неточным исходным данным // Владикавк. мат. журн.—2004.—Т. 6, № 4.—С. 55–62.
13. *Балова Е. А.* Об оптимальном восстановлении решений задачи Дирихле по неточным исходным данным // Матем. заметки.—2007.—Т. 82, № 3.—С. 323–334. DOI: 10.4213/mzm3846.
14. *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление решения уравнения теплопроводности по неточным измерениям // Матем. сб.—2009.—Т. 200, № 5.—С. 37–54. DOI: 10.4213/sm7301.
15. *Абрамова Е. В.* Наилучшее восстановление решения задачи Дирихле по неточно заданному спектру граничной функции // Владикавк. мат. журн.—2017.—Т. 19, № 4.—С. 3–12. DOI: 10.23671/VNC.2018.4.9163.
16. *Балова Е. А., Осипенко К. Ю.* Оптимальные методы восстановления решений задачи Дирихле, точные на подпространствах сферических гармоник // Матем. заметки.—2018.—Т. 104, № 6.—С. 803–811. DOI: 10.4213/mzm11784.
17. *Абрамова Е. В., Магарил-Ильяев Г. Г., Сивкова Е. О.* Наилучшее восстановление решения задачи Дирихле для полупространства по неточным измерениям // Журн. вычисл. матем. и матем. физ.—2020.—Т. 60, № 10.—С. 1711–1720. DOI: 10.31857/S0044466920100038.

Статья поступила 24 июля 2023 г.

Абрамова Елена Владимировна
Национальный исследовательский университет «МЭИ»,
доцент кафедры высшей математики
РОССИЯ, 111250, Москва, ул. Красноказарменная, 14
E-mail: abramova_elena@inbox.ru
https://orcid.org/0009-0004-3067-0272

Сивкова Елена Олеговна
Южный математический институт — филилал ВНЦ РАН,
научный сотрудник отдела функцион. анализа
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 53;
Национальный исследовательский университет «МЭИ»,
доцент кафедры высшей математики
Россия, 111250, Москва, ул. Красноказарменная, 14
E-mail: sivkova_elena@inbox.ru
https://orcid.org/0000-0002-0365-4320

Vladikavkaz Mathematical Journal
2024, Volume 26, Issue 1, P. 13–26

ON THE BEST RECOVERY OF A FAMILY OF OPERATORS ON A CLASS OF FUNCTIONS ACCORDING TO THEIR INACCURATELY SPECIFIED SPECTRUM

Abramova, E. V.[1] and Sivkova, E. O.[1,2]

[1] National Research University “MPEI”,
14 Krasnokazarmennaya St., Moscow 111250, Russia;
[2] Southern Mathematical Institute VSC RAS,
53 Vatutin St., Vladikavkaz 362025, Russia

E-mail: abramova_elena@inbox.ru, sivkova_elena@inbox.ru

Abstract. The paper considers a one-parameter family of linear continuous operators in $L_2(\mathbb{R}^d)$ and poses the problem of optimal reconstruction of the operator for a given value of a parameter on a class of functions whose Fourier transforms are square integrable with power weight (spaces of such a structure play an important role in questions of embedding function spaces and the theory of differential equations) using the following information: about each function from this class is knows (generally speaking, approximately) its Fourier transform on some measurable subset of $\mathbb{R}^d$. A family of optimal methods for restoring operators for each parameter value is constructed. Optimal methods do not use all the available information about the Fourier transform of functions from the class, but use only information about the Fourier transform of a function in a ball centered at zero of maximum radius, which has the property that its measure is equal to the measure of its intersection with the set, where is known (exactly or approximately) Fourier transform of the function. As a consequence, the following results were obtained: a family of optimal methods for recovery the solution of the heat equation in $\mathbb{R}^d$ at a given time, provided that the initial function belongs to the specified class and its Fourier transform is known exactly or approximately on some measurable set, and also a family of optimal methods for reconstructing the solution of the Dirichlet problem for a half-space on a hyperplane from the Fourier transform of a boundary function belonging to the specified class, which is known exactly or approximately on some measurable set in $\mathbb{R}^d$.

Keywords: optimal recovery, optimal method, extremal problem, Fourier transform, heat equation, Dirichlet problem.

AMS Subject Classification: 42B10, 42B15, 42B35.

For citation: *Abramova, E. V. and Sivkova, E. O.* On the Best Recovery of a Family of Operators on a Class of Functions According to Their Inaccurately Specified Spectrum, *Vladikavkaz Math. J.*, 2024, vol. 26, no. 1, pp. 13–26 (in Russian). DOI: 10.46698/z4058-1920-7739-f.

References

1. *Stein, E. M. and Weiss, G. Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, Princeton University Press, 1971.
2. *Micchelli, C. A. and Rivlin, T. J.* A Survey of Optimal Recovery, *Optimal Estimation in Approximation Theory*, Eds. C. A. Micchelli and T. J. Rivlin, New York, Plenum Press, 1977, pp. 1–54. DOI: 10.1007/978-1-4684-2388-4_1.
3. *Melkman, A. A. and Micchelli, C. A.* Optimal Estimation of Linear Operators in Hilbert Spaces From Inaccurate Data, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 1979, vol. 16, no. 1, pp. 87–105.
4. *Micchelli, C. A. and Rivlin, T. J.* Lectures on Optimal Recovery, *Lecture Notes in Mathematics*, Berlin, Springer–Verlag, 1985, vol. 1129, pp. 21–93. DOI: 10.1007/bfb0075157.
5. *Traub, J. F. and Woźniakowski, H. A General Theory of Optimal Algorithms*, New York, Academic Press, 1980.
6. *Magaril-Il'yaev, G. G. and Osipenko, K. Yu.* Optimal Recovery of Functions and Their Derivatives from Inaccurate Information about the Spectrum and Inequalities for Derivatives, *Functional Analysis and Its Applications*, 2003, vol. 37, no. 3, pp. 203–214. DOI: 10.1023/A:1026084617039.
7. *Magaril-Il'yaev, G. G. and Osipenko, K. Yu.* On Optimal Harmonic Synthesis from Inaccurate Spectral Data, *Functional Analysis and Its Applications*, 2010, vol. 44, no. 3, pp. 223–225. DOI: 10.1007/s10688-010-0029-7.
8. *Magaril-Il'yaev, G. G. and Osipenko, K. Yu.* On the Reconstruction of Convolution-Type Operators from Inaccurate Information, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2010, vol 269, pp. 174–185. DOI: 10.1134/S008154381002015X.
9. *Magaril-Il'yaev, G. G. and Sivkova, E. O.* Optimal Recovery of the Semi-Group Operators from Inaccurate Data, *Eurasian Mathematical Journal*, 2019, vol. 10, no. 4, pp. 75–84. DOI: 10.32523/2077-9879-2019-10-4-75-84.
10. *Sivkova, E. O.* Optimal Recovery of a Family of Operators from Inaccurate Measurements on a Compact, *Vladikavkaz Mathematical Journal*, 2023, vol. 25, no. 2, pp. 124–135 (in Russian). DOI: 10.46698/b9762-8415-3252-n.
11. *Magaril-Il'yaev, G. G., Osipenko, K. Yu. and Tikhomirov, V. M.* On Optimal Recovery of Heat Equation Solutions, *Approximation Theory: A Volume Dedicated to B. Bojanov*, Eds. D. K. Dimitrov, G. Nikolov and R. Uluchev, Sofia, Marin Drinov Academic Publishing House, 2004, pp. 163–175.
12. *Osipenko, K. Yu.* On the Reconstruction of the Solution of the Dirichlet Problem from Inexact Initial Data, *Vladikavkaz Mathematical Journal*, 2004, vol. 6, no. 4, pp. 55–62 (in Russian).
13. *Balova, E. A.* Optimal Reconstruction of the Solution of the Dirichlet Problem From Inaccurate Input Data, *Mathematical Notes*, 2007, vol. 82, no. 3, pp. 285–294. DOI: 10.1134/S0001434607090015.
14. *Magaril-Il'yaev, G. G. and Osipenko, K. Yu.* Optimal Recovery of the Solution of the Heat Equation from Inaccurate Data, *Sbornik: Mathematics*, 2009, vol. 200, no. 5, pp. 665–682. DOI: 10.1070/SM2009v200n05ABEH004014.
15. *Abramova, E. V.* The Best Recovery of the Solution of the Dirichlet Problem from Inaccurate Spectrum of the Boundary Function, *Vladikavkaz Mathematical Journal*, 2017, vol. 19, no. 4, pp. 3–12 (in Russian). DOI: 10.23671/VNC.2018.4.9163.
16. *Balova, E. A. and Osipenko, K. Yu.* Optimal Recovery Methods for Solutions of the Dirichlet Problem that are Exact on Subspaces of Spherical Harmonics, *Mathematical Notes*, 2018, vol. 104, no. 6, pp. 781–788. DOI: 10.1134/S0001434618110238.
17. *Abramova, E. V., Magaril-Il'yaev, G. G. and Sivkova, E. O.* Best Recovery of the Solution of the Dirichlet Problem in a Half-Space from Inaccurate Data, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2020, vol. 60, no. 10, pp. 1656–1665. DOI: 10.1134/S0965542520100036.

Received Jule 24, 2023

Elena V. Abramova
National Research University "MPEI",
14 Krasnokazarmennaya St., Moscow 111250, Russia,
Assistant Professor
E-mail: abramova_elena@inbox.ru
https://orcid.org/0009-0004-3067-0272

Elena O. Sivkova
Southern Mathematical Institute VSC RAS,
53 Vatutin St., Vladikavkaz 362025, Russia,
Researcher;
National Research University "MPEI",
14 Krasnokazarmennaya St., Moscow 111250, Russia,
Assistant Professor
E-mail: sivkova_elena@inbox.ru
https://orcid.org/0000-0002-0365-4320