Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2024. Том 65, № 2

УДК 517.9

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ВОССТАНОВЛЕНИИ ОДНОГО СЕМЕЙСТВА ОПЕРАТОРОВ НА КЛАССЕ ФУНКЦИЙ ПО ПРИБЛИЖЕННОЙ ИНФОРМАЦИИ ОБ ИХ СПЕКТРЕ

Е. В. Абрамова, Е. О. Сивкова

Аннотация. Найдены явные выражения для оптимальных методов восстановления в задаче восстановления значений линейных непрерывных операторов на соболевском классе функций по следующей информации: преобразование Фурье этих функций известно приближенно на некотором измеримом подмножестве конечномерного пространства, на котором заданы функции. В качестве следствий получены оптимальные методы восстановления решения уравнения теплопроводности и решения задачи Дирихле для полупространства.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.201

Ключевые слова: оптимальное восстановление, оптимальный метод, преобразование Фурье, экстремальная задача.

Введение

Работа посвящена оптимальному восстановлению значений одного класса линейных непрерывных операторов в $L_2(\mathbb{R}^d)$ на соболевском классе функций по следующей информации: о каждой функции из этого класса известно приближенно ее преобразование Фурье на некотором измеримом подмножестве в $\mathbb{R}^d$. По этой информации для рассматриваемого оператора построен оптимальный метод восстановления. Этот метод использует не всю доступную информацию о преобразовании Фурье, а используемую предварительно «сглаживает». В качестве непосредственных следствий доказанного результата получены оптимальные методы восстановления решения уравнения теплопроводности в данный момент времени по неточно заданной информации о преобразовании Фурье начальной функции и решения задачи Дирихле для полупространства на гиперплоскости по неточно заданной информации о преобразовании Фурье граничной функции.

Тематика данной работы относится к той ветви теории приближений, которая получила название теории оптимального (наилучшего) восстановления значений линейных функционалов и операторов на классах множеств, элементы которых известны приближенно. Началом развития этой теории послужила работа С. А. Смоляка [1]. Затем эта тематика развивалась в самых различных направлениях. Отметим здесь обзоры [2, 3], монографию [4] и статьи [5, 6]. По поводу тематики данной работы, отметим статьи [7–13].

1. Постановка задачи и формулировка основного результата

Пусть $d \in \mathbb{N}$. Через $\mathbb{R}^d$ обозначаем евклидово пространство всех упорядоченных наборов из d вещественных чисел со скалярным произведением $\langle x, \xi \rangle = \sum_{i=1}^{d} x_i \xi_i$, где $x = (x_1, \ldots, x_d)$, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_d)$. Евклидову норму (длину) вектора $\xi \in \mathbb{R}^d$ обозначаем через $|\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + \ldots + \xi_d^2}$.

Определим пространство функций $\mathscr{W}_{2,\infty}(\mathbb{R}^d) = \{f(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d) : F[f](\cdot) \in L_\infty(\mathbb{R}^d)\}$, где $F[f](\xi)$ — преобразование Фурье функции $f(\cdot)$, и класс функций

$$W^n_{2,\infty}(\mathbb{R}^d) = \left\{ f(\cdot) \in \mathscr{W}_{2,\infty}(\mathbb{R}^d) : \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2n} |F[f](\xi)|^2 \, d\xi \le 1 \right\},$$

где n — целое неотрицательное число.

Пусть $a(\cdot)$ — непрерывная неубывающая функция на $\mathbb{R}_+$ и $a(0) = 0$. Определим оператор $T_a : L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)$, действующий в образах Фурье по формуле

$$F[T_a f(\cdot)](\xi) = e^{-a(|\xi|)} F[f](\xi) \text{ для п. в. } \xi \in \mathbb{R}^d, \quad f(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d).$$

Очевидно, что этот оператор линеен и непрерывен.

Поставим следующую задачу. Пусть A — измеримое подмножество $\mathbb{R}^d$ и $\delta \ge 0$. Предположим, что о каждой функции $f(\cdot) \in W^n_{2,\infty}(\mathbb{R}^d)$ известно ее преобразование Фурье на множестве A с точностью до δ в метрике $L_\infty(A)$, т. е. известна некоторая функция $g(\cdot) \in L_\infty(A)$ такая, что

$$\|F[f](\cdot) - g(\cdot)\|_{L_\infty(A)} \le \delta.$$

Если $\delta = 0$, то сужение $F[f](\cdot)$ на A известно точно. По этой информации мы хотим восстановить значения оператора T_a на классе $W^n_{2,\infty}(\mathbb{R}^d)$.

Точная постановка такова. Каждое отображение $m : L_\infty(A) \to L_2(\mathbb{R}^d)$ объявляется *методом восстановления* и его *погрешность* определяется по формуле

$$e(W^n_{2,\infty}(\mathbb{R}^d), A, \delta, m) = \sup_{\substack{f(\cdot) \in W^n_{2,\infty}(\mathbb{R}^d),\, g(\cdot) \in L_\infty(A) \\ \|F[f](\cdot) - g(\cdot)\|_{L_\infty(A)} \le \delta}} \|T_a f(\cdot) - m(g(\cdot))(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

Если $\delta = 0$, то ясно, что

$$e(W^n_{2,\infty}(\mathbb{R}^d), A, 0, m) = \sup_{f(\cdot) \in W^n_{2,\infty}(\mathbb{R}^d)} \|T_a f(\cdot) - m(F[f](\cdot)|_A)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)},$$

где $F[f](\cdot)|_A$ — сужение $F[f](\cdot)$ на A.

Нас интересуют величина

$$E(W^n_2(\mathbb{R}^d), A, \delta) = \inf_{m : L_\infty(A) \to L_2(\mathbb{R}^d)} e(W^n_2(\mathbb{R}^d), A, \delta, m),$$

где m пробегает все методы (отображения) $m : L_\infty(A) \to L_2(\mathbb{R}^d)$, называемая *погрешностью оптимального восстановления*, и те методы $\widehat{m}$, на которых нижняя грань достигается, т. е.

$$E(W^n_2(\mathbb{R}^d), A, \delta) = e(W^n_2(\mathbb{R}^d), A, \delta, \widehat{m}).$$

Перед формулировкой теоремы введем некоторые обозначения. Пусть $B(x, r)$ — замкнутый шар в $\mathbb{R}^d$ с центром в точке x радиуса $r \ge 0$ ($B(x, 0) = x$). Положим

$$r_A = \sup\{r \ge 0 : \operatorname{mes}(A \cap B(0, r)) = \operatorname{mes} B(0, r)\}.$$

При $\delta > 0$ обозначим

$$\widehat{r} = (2^{d-1} \pi^{d/2} \Gamma(d/2)(d + 2n) \delta^{-2})^{1/(d+2n)},$$

где $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция Эйлера, и пусть $r_0 = \min\{r_A, \widehat{r}\}$.

Теорема. *Пусть A — измеримое подмножество $\mathbb{R}^d$ и $\delta \geq 0$.*

1. *Если $r_A = 0$, то*
$$E(W_2^n(\mathbb{R}^d), A, \delta) = +\infty.$$

2. *Если $0 < r_A < +\infty$ и $\delta = 0$, то*
$$E(W_2^n(\mathbb{R}^d), A, 0) = \frac{e^{-2a(r_A)}}{r_A^{2n}}$$
и линейный оператор $\widehat{m} : L_\infty(A) \to L_2(\mathbb{R}^d)$, действующий для п. в. $x \in \mathbb{R}^d$ по формуле
$$\widehat{m}(F[f](\cdot)|_A)(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{B(0,r_A)} e^{-a(|\xi|)} F[f](\xi) e^{i\langle \xi, x\rangle}\, d\xi,$$
является оптимальным методом.

3. *Если $0 < r_A < +\infty$ и $\delta > 0$, то*
$$E(W_2^n(\mathbb{R}^d), A, \delta) = \sqrt{\frac{\delta^2}{(2\pi)^d} \int\limits_{B(0,r_0)} e^{-2a(|\xi|)}\, d\xi + r_A^{-2n} e^{-2a(r_A)} \left(1 - \left(\frac{r_A}{\widehat{r}}\right)^{d+2n}\right)_+}$$
и линейный оператор $\widehat{m} : L_\infty(A) \to L_2(\mathbb{R}^d)$, действующий для п. в. $x \in \mathbb{R}^d$ по формуле
$$\widehat{m}(g(\cdot))(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{B(0,r_0)} e^{-a(|\xi|)} (1 - e^{2(a(|\xi|) - a(r_0))} |\xi|^{2n} r_0^{-2n}) g(\xi) e^{i\langle \xi, x\rangle}\, d\xi,$$
является оптимальным методом.

Прокомментируем утверждения сформулированной теоремы.

Первое утверждение говорит о том, что какое бы ни было множество, на котором известно преобразование Фурье функций из данного класса, восстановить значения оператора невозможно, если в это множество нельзя вписать (в указанном выше смысле) никакой шар с центром в нуле.

Второе утверждение говорит о том, что если $0 < r_A < +\infty$ и $\delta = 0$, то для оптимального восстановления значений оператора достаточно знать преобразования Фурье функций из данного класса только на вписанном в множество A шаре $B(0, r_A)$, и чем больше этот шар, тем погрешность оптимального восстановления меньше. Оптимальный метод состоит в том, что надо взять обратное преобразования от того, что мы наблюдаем на шаре.

Третье утверждение наиболее интересно. Если $0 < r_A < +\infty$ и $\delta > 0$, то снова преобразование Фурье достаточно знать только на шаре $B(0, r_A)$ и погрешность оптимального восстановления уменьшается с ростом радиуса шара, но только до величины $\widehat{r}$. Далее эта погрешность стабилизируется — информация о преобразовании Фурье за пределами шара $B(0, \widehat{r})$ становится лишней. Другими словами, если нарушается соотношение $r_A \leq \widehat{r}$, т. е.
$$r_A^{d+2n} \delta^2 \leq 2^{d-1} \pi^{d/2} \Gamma(d/2)(d + 2n)$$
между погрешностью задания исходных данных и шаром r_A, то доступная информация о преобразовании Фурье функций оказывается излишней.

Оптимальный метод в данном случае — это обратное преобразование Фурье от «сглаженной» наблюдаемой информации о преобразовании Фурье на шаре $B(0, r_0)$.

2. Доказательство теоремы

1. Покажем сначала, что справедлива следующая оценка:

$$E(W^n_{2,\infty}(\mathbb{R}^d), A, \delta) \geq \sup_{\substack{f(\cdot)\in W^n_{2,\infty}(\mathbb{R}^d),\\ \|F[f](\cdot)\|_{L_\infty(A)}\leq\delta}} \|T_a f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}. \tag{1}$$

Действительно, пусть $f_0(\cdot) \in W^n_{2,\infty}(\mathbb{R}^d)$ и $\|F[f_0](\cdot)\|_{L_\infty(A)} \leq \delta$. Тогда функция $-f_0(\cdot)$ также удовлетворяет этим соотношениям и для любого $m : L_\infty(A) \to L_2(\mathbb{R}^d)$ имеем

$$\begin{aligned} 2\|T_a f_0(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} &= \|T_a f_0(\cdot) - m(0)(\cdot) - (T_a(-f_0(\cdot)) - m(0)(\cdot))\|_{L_2(\mathbb{R})} \\ &\leq 2 \sup_{\substack{f(\cdot)\in W^n_{2,\infty}(\mathbb{R}^d),\\ \|F[f](\cdot)\|_{L_\infty(A)}\leq\delta}} \|T_a f(\cdot) - m(0)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq 2 \sup_{\substack{f(\cdot)\in W^n_{2,\infty}(\mathbb{R}^d),\ g(\cdot)\in L_\infty(\mathbb{R}^d),\\ [2pt]\|F[f](\cdot)-g(\cdot)\|_{L_\infty(A)}\leq\delta}} \|T_a f(\cdot) - m(g(\cdot))(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &= 2e(W^n_{2,\infty}(\mathbb{R}^d), A, \delta, m). \end{aligned}$$

Переходя слева к верхней грани по всем функциям $f(\cdot)$ таким, что $f(\cdot) \in W^n_{2,\infty}(\mathbb{R}^d)$ и $\|F[f](\cdot)\|_{L_\infty(A)} \leq \delta$, приходим к неравенству

$$\sup_{\substack{f(\cdot)\in W^n_{2,\infty}(\mathbb{R}^d),\\ \|F[f](\cdot)\|_{L_\infty(A)}\leq\delta}} \|T_a f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq e(W^n_{2,\infty}(\mathbb{R}^d), A, \delta, m).$$

Метод m был выбран произвольно, поэтому, переходя справа к нижней грани по всем методам m, получаем оценку (1).

Величина справа в (1) есть значение следующей экстремальной задачи:

$$\|T_a f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \to \max, \quad \|F[f](\cdot)\|_{L_\infty(A)} \leq \delta, \quad f(\cdot) \in W^n_{2,\infty}(\mathbb{R}^d). \tag{2}$$

т. е. точная верхняя грань максимизируемого функционала при данных ограничениях.

Согласно теореме Планшереля квадрат значения задачи (2) в образах Фурье равен значению такой задачи:

$$\begin{gathered} \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-2a(|\xi|)} |F[f](\xi)|^2\, d\xi \to \max, \quad |F[f](\xi)| \leq \delta \text{ для п. в. } \xi \in A, \\ \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2n} |F[f](\xi)|^2\, d\xi \leq 1, \quad f(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d). \end{gathered} \tag{3}$$

2. Докажем первое утверждение теоремы. В силу оценки (1) достаточно показать, что значение задачи (3) (а значит, и задачи (2)) равно $+\infty$.

Действительно, в этом случае $\operatorname{mes}(A \cap B(0,\varepsilon)) < \operatorname{mes} B(0,\varepsilon)$ для любого $\varepsilon > 0$ и тем самым мера множества $\Omega_\varepsilon = (\mathbb{R}^d \setminus A) \cap B(0,\varepsilon)$ положительна. Пусть функции $f_\varepsilon(\cdot)$, $\varepsilon > 0$, такие, что

$$F[f_\varepsilon](\xi) = \begin{cases} (2\pi)^d (\int\limits_{\Omega_\varepsilon} |x|^{2n} dx)^{-1/2}, & \xi \in \Omega_\varepsilon, \\ 0, & \xi \notin \Omega_\varepsilon. \end{cases}$$

Очевидно, что эти функции принадлежат $L_2(\mathbb{R}^d)$ и допустимы в задаче (3), так как $F[f](\xi)=0$, если $\xi\in A$ и

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d}|\xi|^{2n}|F[f_\varepsilon](\xi)|^2\,d\xi=\frac{\int\limits_{\Omega_\varepsilon}|\xi|^{2n}\,d\xi}{\int\limits_{\Omega_\varepsilon}|x|^{2n}dx}=1.$$

Оценим значения максимизируемого функционала в этой задаче на этих функциях. Если $\xi\in\Omega_\varepsilon$, то $|\xi|\le\varepsilon$, поэтому $e^{2a(|\xi|)}\le e^{2a(\varepsilon)}$ и тогда

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d}e^{-2a(|\xi|)}|F[f_\varepsilon](\xi)|^2\,d\xi=\frac{\int\limits_{\Omega_\varepsilon}e^{-2a(|\xi|)}\,d\xi}{\int\limits_{\Omega_\varepsilon}|x|^{2n}dx}$$

$$=\frac{\int\limits_{\Omega_\varepsilon}e^{-2a(|\xi|)}|\xi|^{2n}|\xi|^{-2n}\,d\xi}{\int\limits_{\Omega_\varepsilon}e^{2a(|x|)}e^{-2a(|x|)}|x|^{2n}dx}\ge\frac{\varepsilon^{-2n}\int\limits_{\Omega_\varepsilon}e^{-2a(|\xi|)}|\xi|^{2n}\,d\xi}{e^{2a(\varepsilon)}\int\limits_{\Omega_\varepsilon}e^{-2a(|x|)}|x|^{2n}dx}\ge e^{-2a(\varepsilon)}\varepsilon^{-2n},$$

откуда в силу произвольности ε следует, что значение максимизируемого функционала в (3) может быть сделано сколь угодно большим.

3. Докажем второе утверждение теоремы. Сначала оценим снизу погрешность оптимального восстановления $E(W_2^n(\mathbb{R}^d),A,0)$. Как показано выше, квадрат этой величины не меньше значения задачи (3), которая в данном случае ($\delta=0$) записывается так:

$$\begin{gathered}\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d\setminus A}e^{-2a(|\xi|)}|F[f](\xi)|^2\,d\xi\to\max,\quad F[f](\xi)=0\ \text{для п. в. }\xi\in A,\\ \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d\setminus A}|\xi|^{2n}|F[f](\xi)|^2\,d\xi\le 1,\quad f(\cdot)\in L_2(\mathbb{R}^d).\end{gathered}\tag{4}$$

Предъявим последовательность допустимых функций в задаче (4), которая сразу даст нужную оценку снизу для значения этой задачи (т. е. оценку, совпадающую с величиной погрешности оптимального восстановления в формулировке теоремы). Скажем несколько слов по поводу происхождения этой последовательности.

Задача (4) относительно переменной $u(\cdot)=|F[f](\cdot)|^2$ является задачей выпуклого программирования. Используя необходимые условия в теореме Каруша — Куна — Таккера (см., например, [14]), легко проверить, что решения в данной задаче нет. Если расширить задачу (4) до задачи на линейном пространстве всех вещественных конечных мер на σ-алгебре измеримых по Лебегу подмножеств $\mathbb{R}^d$, то, используя достаточные условия в теореме Каруша — Куна — Таккера, нетрудно показать, что эта задача имеет решение и это решение есть δ-функция Дирака (поводом для такого расширения является то, что задачу (4) можно рассматривать как задачу на множестве положительных мер вида $d\mu_f(\xi)=(2\pi)^{-d}\int\limits_E|F[f](\xi)|^2\,d\xi$, когда $f(\cdot)$ пробегает все допустимые функции). Ясно, что найденное значение расширенной задачи не меньше значения исходной задачи (4). Беря δ-образную последовательность допустимых в задаче (4) функций, аппроксимирующую решение расширенной задачи, получаем оценку снизу для задачи (4), которая, как оказывается, совпадает со значением расширенной задачи, т. е. значения задачи (4) и ее расширения одинаковы. Опуская все эти рутинные рассуждения (которые в разных вариантах использовались и ранее, см., например, [5, 12]), сразу предъявляем последовательность, которая дает нужную оценку.

В силу определения r_A множество $\Omega_k = (\mathbb{R}^d \setminus A) \cap B(0, r_A + 1/k)$ для каждого $k \in \mathbb{N}$ имеет ненулевую меру. Рассмотрим семейство функций $f_k(\cdot)$, преобразование Фурье которых имеет вид

$$F[f_k](\xi) = \begin{cases} \frac{(2\pi)^{d/2}}{(r_A+1/k)^n \sqrt{\operatorname{mes}\Omega_k}}, & \xi \in \Omega_k, \\ 0, & \xi \notin \Omega_k. \end{cases}$$

Очевидно, эти функции $f_k(\cdot)$ принадлежат $L_2(\mathbb{R}^d)$ и они допустимы в задаче (4), поскольку

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{\mathbb{R}^d \setminus A} |\xi|^{2n} |F[f_k](\xi)|^2 \, d\xi = \frac{1}{(r_A + 1/k)^{2n} \operatorname{mes}\Omega_k} \int\limits_{\Omega_k} |\xi|^{2n} \, d\xi$$
$$\le \frac{(r_A + 1/k)^{2n}}{(r_A + 1/k)^{2n} \operatorname{mes}\Omega_k} \int\limits_{\Omega_k} d\xi = 1.$$

Оценим значение максимизируемого функционала в (4) на этих функциях:

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{\mathbb{R}^d \setminus A} e^{-2a(|\xi|)} |F[f_k](\xi)|^2 \, d\xi = \frac{1}{(r_A + 1/k)^{2n} \operatorname{mes}\Omega_k} \int\limits_{\Omega_k} e^{-2a(|\xi|)} \, d\xi$$
$$\ge \frac{e^{-2a(r_A+1/k)}}{(r_A + 1/k)^{2n} \operatorname{mes}\Omega_k} \int\limits_{\Omega_k} d\xi \ge \frac{e^{-2a(r_A+1/k)}}{(r_A + 1/k)^{2n}}.$$

Выражение справа стремится к величине $r_A^{-2n} e^{-2a(r_A)}$ и тем самым значение задачи (4) не меньше этой величины. Тогда в силу (1) получаем оценку

$$E(W_2^n(\mathbb{R}^d), A, 0) \ge \frac{e^{-a(r_A)}}{r_A^n}. \tag{5}$$

Докажем оценку сверху для погрешности оптимального восстановления и оптимальность метода восстановления из утверждения 2 теоремы.

Оптимальность метода $\widehat{m}$ означает, что его погрешность, т. е. значение задачи

$$\|T_a f(\cdot) - \widehat{m}(F[f](\cdot)|_A)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \to \max, \quad f(\cdot) \in W_{2,\infty}^n(\mathbb{R}^d), \tag{6}$$

совпадает с величиной $E(W_2^n(\mathbb{R}^d), A, 0)$.

Переходя к образам Фурье в задаче (6), по теореме Планшереля получим, что квадрат ее значения равен значению такой задачи:

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-2a(|\xi|)} |F[f](\xi) - g(\xi)|^2 \, d\xi \to \max,$$
$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2n} |F[f](\xi)|^2 d\xi \le 1, \quad f(\cdot) \in \mathscr{W}_2^n(\mathbb{R}^d).$$

Оценим значение максимизируемого функционала. Так как функция $g(\cdot)$ совпадает с $F[f](\cdot)$ на шаре $B(0,r_A)$ и равна нулю вне него, то

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-2a(|\xi|)}|F[f](\xi)-g(\xi)|^2\,d\xi = \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d\setminus B(0,r_A)} e^{-2a(|\xi|)}|F[f](\xi)|^2\,d\xi$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d\setminus B(0,r_A)} e^{-2a(|\xi|)}|\xi|^{-2n}|\xi|^{2n}|F[f](\xi)|^2\,d\xi$$

$$\le \frac{e^{-2a(r_A)}}{(2\pi)^d r_A^{2n}}\int\limits_{\mathbb{R}^d\setminus B(0,r_A)} |\xi|^{2n}|F[f](\xi)|^2\,d\xi$$

$$\le \frac{e^{-2a(r_A)}}{(2\pi)^d r_A^{2n}}\int\limits_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2n}|F[f](\xi)|^2\,d\xi \le \frac{e^{-2a(r_A)}}{r_A^{2n}}.$$

Отсюда следует, что $E(W_2^n(\mathbb{R}^d),A,0) \le r_A^{-n}e^{-a(r_A)}$. Вместе с оценкой (5) это означает, что

$$E(W_2^n(\mathbb{R}^d),A,0) = \frac{e^{-a(r_A)}}{r_A^n}$$

и что $\widehat{m}$ — оптимальный метод. Утверждение 2 теоремы доказано.

4. Докажем третье утверждение теоремы. Как и раньше, начинаем с оценки снизу величины $E(W_2^n(\mathbb{R}^d),\delta,A)$. В п. 2 показано, что квадрат этой величины не меньше значения задачи (3).

Пусть сначала $r_A \ge \widehat{r}$. Это означает, что $\operatorname{mes}(B(0,\widehat{r})\cap A) = \operatorname{mes} B(0,\widehat{r})$. Покажем, что в этом случае у задачи (3) существует решение.

Относительно переменной $|F[f](\cdot)|^2$ задача (3) является задачей выпуклого программирования с континуумом ограничений типа неравенств. Для нахождения ее решения воспользуемся естественной модификацией достаточных условий в классической теореме Каруша — Куна — Таккера, где число подобных ограничений конечно.

Сопоставим задаче (3) следующую функцию Лагранжа:

$$\mathscr{L}(f(\cdot),\lambda) = -\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-2a(|\xi|)}|F[f](\xi)|^2\,d\xi + \int\limits_A \lambda_1(\xi)|F[f](\xi)|^2\,d\xi + \lambda_2\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d}|\xi|^{2n}|F[f](\xi)|^2\,d\xi,$$

где $\lambda = (1,\lambda_1(\cdot),\lambda_2)$. Покажем, что если найдутся п. в. неотрицательная и ограниченная измеримая функция $\lambda_1(\cdot)$ на $\mathbb{R}^d$, число $\lambda_2 \ge 0$ и допустимая в задаче (3) функция $\widehat{f}(\cdot)$ такие, что

$$\mathscr{L}(f(\cdot),\lambda) \ge \mathscr{L}(\widehat{f}(\cdot),\lambda) \tag{7}$$

для всех функций $f(\cdot)\in L_2(\mathbb{R}^d)$, а также

$$\int\limits_A \lambda_1(\xi)(|(F[\widehat{f}](\xi)|^2-\delta^2)\,d\xi = 0, \tag{8}$$

$$\lambda_2\Big(\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d}|\xi|^{2n}|F[\widehat{f}](\xi)|^2\,d\xi - 1\Big) = 0, \tag{9}$$

то $\widehat{f}(\cdot)$ — решение задачи (3).

Действительно, пусть $f(\cdot)$ — допустимая функция в задаче (3). Используя это обстоятельство и неотрицательность $\lambda_1(\cdot)$ и λ_2, равенства (8) и (9), а затем неравенство (7), будем иметь

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-2a(|\xi|)}|F[f](\xi)|^2\,d\xi \ge -\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-2a(|\xi|)}|F[f](\xi)|^2\,d\xi \\
+\int\limits_A \lambda_1(\xi)(|F[f](\xi)|^2-\delta^2)\,d\xi+\lambda_2\Big(\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d}|\xi|^{2n}|F[f](\xi)|^2\,d\xi-1\Big) \\
=\mathscr{L}(f(\cdot),\lambda)-\delta^2\int\limits_A\lambda_1(\xi)\,d\xi-\lambda_2 \ge \mathscr{L}(\widehat{f}(\cdot),\lambda)-\delta^2\int\limits_A\lambda_1(\xi)\,d\xi-\lambda_2 \\
=-\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-2a(|\xi|)}|F[\widehat{f}](\xi)|^2\,d\xi,
\end{aligned}
$$

откуда следует, что $\widehat{f}(\cdot)$ — решение задачи (3).

Анализируя соотношения (7)–(9), можно понять вид функций $\widehat{f}(\cdot)$, $\lambda_1(\cdot)$ и значение λ_2. Опуская этот анализ, предъявим $\widehat{f}(\cdot)$, $\lambda_1(\cdot)\ge 0$ и $\lambda_2\ge 0$, удовлетворяющие условиям (7)–(9).

Пусть функция $\widehat{f}(\cdot)$ такова, что

$$
F[\widehat{f}](\xi)=\begin{cases}\delta, & \xi\in B(0,\widehat{r}),\\ 0, & \xi\notin B(0,\widehat{r}),\end{cases}
$$

$$
\lambda_1(\xi)=\begin{cases}\frac{1}{(2\pi)^d}(e^{-2a(|\xi|)}-\lambda_2|\xi|^{2n}), & \xi\in B(0,r_0),\\ 0, & \xi\notin B(0,r_0),\end{cases}
$$

$\lambda_2=r_0^{-2n}e^{-2a(r_0)}$, где, напомним, $r_0=\min\{r_A,\widehat{r}\}$.

Проверим, что функция $\widehat{f}(\cdot)$ допустима в задаче (3). Очевидно, что $\widehat{f}(\cdot)\in L_2(\mathbb{R}^d)$ и удовлетворяет первому ограничению в (3). Если теперь учесть нетрудно проверяемое равенство

$$
\int\limits_{B(0,r)}|\xi|^{2s}\,d\xi=\frac{2\pi^{d/2}}{(d+2s)\Gamma(d/2)}r^{d+2s},
$$

справедливое для любых $s>0$ и $r>0$, и выражение для $\widehat{r}$, то будем иметь

$$
\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d}|\xi|^{2n}|F[\widehat{f}](\xi)|^2\,d\xi=\frac{\delta^2}{(2\pi)^d}\int\limits_{B(0,\widehat{r})}|\xi|^{2n}\,d\xi=1.
$$

Таким образом, функция $\widehat{f}(\cdot)$ удовлетворяет второму ограничению в задаче (3) и, значит, она допустима в этой задаче.

Ясно, что $\lambda_2>0$ и элементарно проверяется, что $\lambda_1(\cdot)\ge 0$. Очевидным образом выполняются условия (8) и (9). Наконец, простая проверка показывает, что $\mathscr{L}(f(\cdot),\lambda)\ge 0$ для всех функций $f(\cdot)\in L_2(\mathbb{R}^d)$ и $\mathscr{L}(\widehat{f}(\cdot),\lambda)=0$. Следовательно, соотношение (7) также выполняется и тем самым $\widehat{f}(\cdot)$ — решение задачи (3).

Теперь можно вычислить значение этой задачи:

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-2a(|\xi|)}|F[\widehat{f}](\xi)|^2\,d\xi = \frac{\delta^2}{(2\pi)^d}\int\limits_{B(0,\widehat{r})} e^{-2a(|\xi|)}\,d\xi.$$

Отсюда и из (1) следует нужная оценка снизу для погрешности оптимального восстановления для случая, когда $r_A \ge \widehat{r}$:

$$E(W_2^n(\mathbb{R}^d), A, \delta) \ge \sqrt{\frac{\delta^2}{(2\pi)^d}\int\limits_{B(0,\widehat{r})} e^{-2a(|\xi|)}\,d\xi}. \tag{10}$$

Пусть теперь $r_A < \widehat{r}$. В этой ситуации, снова руководствуясь соображениями, связанными с теоремой Каруша — Куна — Таккера, предъявим допустимую последовательность в задаче (3), которая даст нужную оценку снизу для погрешности оптимального восстановления.

Для каждого $k \in \mathbb{N}$ обозначим $\Omega_k = (\mathbb{R}^d \setminus A) \cap B(0, r_A + 1/k)$. Напомним, что силу определения r_A для каждого $k \in \mathbb{N}$ множество Ω_k имеет ненулевую меру. Также легко видеть, что $\operatorname{mes}(B(0,r_A) \cap \Omega_k) = 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$ и соответственно $\operatorname{mes}(\Omega_k \setminus B(0,r_A)) = \operatorname{mes}\Omega_k$. Рассмотрим семейство функций $f_k(\cdot)$, преобразование Фурье которых имеет вид

$$F[f_k](\xi) = \begin{cases} \sqrt{\frac{(2\pi)^d(1-(\frac{r_A}{\widehat{r}})^{d+2n})}{\operatorname{mes}\Omega_k(r_A+1/k)^{2n}}}, & \xi \in \Omega_k \setminus B(0,r_A), \\ \delta, & \xi \in B(0,r_A), \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Легко видеть, что $\widehat{f}(\cdot)$ принадлежит $L_2(\mathbb{R}^d)$ и удовлетворяет первому ограничению в задаче (3). Обозначая для краткости $\alpha = 1 - (r_A/\widehat{r})^{d+2n}$ и учитывая, что

$$\alpha = 1 - \frac{\delta^2 r_A^{d+2n}}{2^{d-1}\pi^{d/2}\Gamma(d/2)(d+2n)} = 1 - \frac{\delta^2}{(2\pi)^d}\int\limits_{B(0,r_A)} |\xi|^{2n}\,d\xi,$$

будем иметь

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2n}|F[f_k](\xi)|^2\,d\xi \\ &\quad= \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{B(0,r_A)} |\xi|^{2n}|F[f_k](\xi)|^2\,d\xi + \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\Omega_k\setminus B(0,r_A)} |\xi|^{2n}|F[f_k](\xi)|^2\,d\xi \\ &\quad= \frac{\delta^2}{(2\pi)^d}\int\limits_{B(0,r_A)} |\xi|^{2n}\,d\xi + \frac{(r_A+1/k)^{-2n}\alpha}{\operatorname{mes}\Omega_k}\int\limits_{\Omega_k\setminus B(0,r_A)} |\xi|^{2n}\,d\xi \\ &\quad\le \frac{\delta^2}{(2\pi)^d}\int\limits_{B(0,r_A)} |\xi|^{2n}\,d\xi + \frac{(r_A+1/k)^{-2n}\alpha}{\operatorname{mes}\Omega_k}(r_A+1/k)^{2n}\operatorname{mes}\Omega_k \\ &\quad= \frac{\delta^2}{(2\pi)^d}\int\limits_{B(0,r_A)} |\xi|^{2n}\,d\xi + \alpha = 1. \end{aligned}$$

Таким образом, функции $f_k(\cdot)$ допустимы в задаче (3).

Оценим значение максимизируемого функционала в этой задаче на этих функциях:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-2a(|\xi|)}|F[f_k](\xi)|^2\,d\xi \\
&\quad= \frac{\delta^2}{(2\pi)^d}\int\limits_{B(0,r_A)} e^{-2a(|\xi|)}\,d\xi + \frac{(r_A+1/k)^{-2n}\alpha}{\operatorname{mes}\Omega_k}\int\limits_{\Omega_k\setminus B(0,r_A)} e^{-2a(|\xi|)}\,d\xi \\
&\quad\ge \frac{\delta^2}{(2\pi)^d}\int\limits_{B(0,r_A)} e^{-2a(|\xi|)}\,d\xi + \frac{(r_A+1/k)^{-2n}\alpha}{\operatorname{mes}\Omega_k}e^{-2a(r_A+1/k)}\operatorname{mes}\Omega_k \\
&\quad= \frac{\delta^2}{(2\pi)^d}\int\limits_{B(0,r_A)} e^{-2a(|\xi|)}\,d\xi + e^{-2a(r_A+1/k)}(r_A+1/k)^{-2n}\alpha.
\end{aligned}
$$

Ясно, что величина справа стремится к

$$
\frac{\delta^2}{(2\pi)^d}\int\limits_{B(0,r_A)} e^{-2a(|\xi|)}\,d\xi + e^{-2a(r_A)}r_A^{-2n}\alpha.
$$

Отсюда следует, что значение задачи (3) не меньше этой величины и тем самым в случае $0 < r_A < \widehat{r}$ получена следующая оценка:

$$
E(W_2^n(\mathbb{R}^d),A,\delta) \ge \sqrt{\frac{\delta^2}{(2\pi)^d}\int\limits_{B(0,r_A)} e^{-2a(|\xi|)}\,d\xi + e^{-2a(r_A)}r_A^{-2n}\alpha},
$$

которая вместе с (10) доказывает нужную оценку снизу для погрешности оптимального восстановления.

В терминах введенных выше функции $\lambda_1(\cdot)$ и числа λ_2 эту оценку можно записать так:

$$
E(W_2^n(\mathbb{R}^d),A,\delta) \ge \sqrt{\delta^2\int\limits_{B(0,r_0)} \lambda_1(\xi)\,d\xi + \lambda_2}. \tag{11}
$$

Теперь докажем оценку сверху для погрешности оптимального восстановления и оптимальность указанного в утверждении (3) теоремы метода восстановления.

Поясним схему нахождения оптимального метода, указанного в теореме. Будем искать оптимальный метод среди методов, подобных оператору T_a, т. е. методов $m_\omega : L_\infty(A) \to L_2(\mathbb{R}^d)$, которые в образах Фурье имеют вид

$$
F[m_\omega(g(\cdot))](\cdot) = e^{-a(\cdot)}\omega(\cdot)g(\cdot),
$$

где $\omega(\cdot) \in L_\infty(\mathbb{R}^d)$ (считая, что функция $g(\cdot)$ за пределами A равна нулю). Кроме того, из полученной оценки для погрешности оптимального восстановления следует, что информация о преобразовании Фурье за пределами шара $B(0,r_0)$ не используется, поэтому будем предполагать, что функция $\omega(\cdot)$ равна нулю вне шара $B(0,r_0)$.

Оптимальность метода m_ω означает, что его погрешность равна погрешности оптимального восстановления, т. е. значение задачи

$$
\begin{gathered}
\|T_a f(\cdot) - m_\omega(g(\cdot))(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \to \max, \\
\|F[f](\cdot) - g(\cdot)\|_{L_\infty(A)} \le \delta, \quad f(\cdot) \in W^n_{2,\infty}(\mathbb{R}^d), \quad g(\cdot) \in L_\infty(A),
\end{gathered} \tag{12}
$$

совпадает с величиной $E(W_2^n(\mathbb{R}^d), A, \delta)$.

Переходя к образам Фурье в задаче (12), получим по теореме Планшереля, что квадрат ее значения равен значению такой задачи:

$$\begin{gathered}\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-2a(|\xi|)}|F[f](\xi)-\omega(\xi)g(\xi)|^2\,d\xi\to\max,\\ |F[f](\xi)-g(\xi)|^2\le\delta^2\quad\text{для п. в. }\xi\in A,\\ \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d}|\xi|^{2n}|F[f](\xi)|^2\,d\xi\le 1,\quad f(\cdot)\in L_2(\mathbb{R}^d),\quad g(\cdot)\in L_\infty(A).\end{gathered}\tag{13}$$

Оценим выражение под знаком интеграла в максимизируемом функционале. Пусть сначала $\xi\in B(0,r_0)$. Имеем по неравенству Коши — Буняковского

$$\begin{aligned}&e^{-2a(|\xi|)}|F[f](\xi)-\omega(\xi)g(\xi)|^2\\ &\quad= e^{-2a(|\xi|)}|\omega(\xi)(F[f](\xi)-g(\xi))+(1-\omega(\xi))F[f](\xi)|^2\\ &\quad= e^{-2a(|\xi|)}\bigg|\frac{\omega(\xi)}{(2\pi)^{d/2}\sqrt{\lambda_1(\xi)}}(2\pi)^{d/2}\sqrt{\lambda_1(\xi)}(F[f](\xi)-g(\xi))\\ &\qquad+\frac{1-\omega(\xi)}{\sqrt{\lambda_2}|\xi|^n}\cdot\sqrt{\lambda_2}|\xi|^nF[f](\xi)\bigg|^2\le e^{-2a(|\xi|)}\bigg(\frac{|\omega(\xi)|^2}{(2\pi)^d\lambda_1(\xi)}+\frac{|1-\omega(\xi)|^2}{\lambda_2|\xi|^{2n}}\bigg)\\ &\qquad\times((2\pi)^d\lambda_1(\xi)|F[f](\xi)-g(\xi)|^2+\lambda_2|\xi|^{2n}|F[f](\xi)|^2).\end{aligned}$$

Интегрируя это неравенство по шару $B(0,r_0)$, обозначая

$$S_\omega(\xi)=e^{-2a(|\xi|)}\bigg(\frac{|\omega(\xi)|^2}{(2\pi)^d\lambda_1(\xi)}+\frac{|1-\omega(\xi)|^2}{\lambda_2|\xi|^{2n}}\bigg),\quad 0<|\xi|\le r_0,$$

учитывая второе условие в (13) и считая, что $\|S_\omega(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)}<\infty$, будем иметь

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{B(0,r_0)} e^{-2a(|\xi|)}|F[f](\xi)-\omega(\xi)g(\xi)|^2\,d\xi\\ &\quad\le\|S_\omega(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)}\bigg(\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{B(0,r_0)}(2\pi)^d\lambda_1(\xi)|F[f](\xi)-g(\xi)|^2\,d\xi\\ &\qquad+\frac{\lambda_2}{(2\pi)^d}\int\limits_{B(0,r_0)}|\xi|^{2n}|F[f](\xi)|^2\,d\xi\bigg)\\ &\quad\le\|S_\omega(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)}\bigg(\delta^2\int\limits_{B(0,r_0)}\lambda_1(\xi)\,d\xi+\frac{\lambda_2}{(2\pi)^d}\int\limits_{B(0,r_0)}|\xi|^{2n}|F[f](\xi)|^2\,d\xi\bigg).\end{aligned}$$

Оценим максимизируемый функционал в (12) по дополнению к $B(0,r_0)$ (напомним, что функция $\omega(\cdot)$ на этом множестве равна нулю):

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d\setminus B(0,r_0)} e^{-2a(|\xi|)}|F[f](\xi)-\omega(\xi)g(\xi)|^2\,d\xi\\ &\quad=\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d\setminus B(0,r_0)} e^{-2a(|\xi|)}|F[f](\xi)|^2\,d\xi\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{\mathbb{R}^d \setminus B(0,r_0)} e^{-2a(|\xi|)} |\xi|^{-2n} |\xi|^{2n} |F[f](\xi)|^2 \, d\xi$$

$$\leq \frac{\lambda_2}{(2\pi)^d} \int\limits_{B(0,r_0)} |\xi|^{2n} |F[f](\xi)|^2.$$

Складывая полученные оценки, приходим к неравенству

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-2a(|\xi|)} |F[f](\xi) - \omega(\xi) g(\xi)|^2 \, d\xi$$

$$\leq \|S_\omega(\cdot)\|_{L_\infty(B(0,r_0))} \Bigg(\delta^2 \int\limits_{B(0,r_0)} \lambda_1(\xi) \, d\xi + \lambda_2 \Bigg).$$

Если функция $\omega(\cdot)$ такова, что $\|S_\omega(\cdot)\|_{L_\infty(B(0,r_0))} \leq 1$, то вместе с оценкой (11) это будет означать, что метод m_ω оптимален и справедливо выражение для погрешности оптимального восстановления, указанное в теореме.

Покажем, что такая функция $\omega(\cdot)$ существует. Действительно, выделяя полный квадрат в выражении в скобках в определении $S_\omega(\cdot)$, нетрудно убедиться, что условие $\|S_\omega(\cdot)\|_{L_\infty(B(0,r_0))} \leq 1$ равносильно соотношению

$$\left| \omega(\xi) - \frac{(2\pi)^d \lambda_1(\xi)}{(2\pi)^d \lambda_1(\xi) + \lambda_2 |\xi|^{2n}} \right|^2$$

$$\leq \frac{(2\pi)^d \lambda_1(\xi) \lambda_2 |\xi|^{2n}}{(2\pi)^d \lambda_1(\xi) + \lambda_2 |\xi|^{2n}} \left(e^{2a(|\xi|)} - \frac{1}{(2\pi)^d \lambda_1(\xi) + \lambda_2 |\xi|^{2n}} \right).$$

Подставляя сюда выражения для $\lambda_1(\cdot)$ и λ_2, получим, что величина справа в скобках равна нулю и, значит,

$$\omega(\xi) = \frac{(2\pi)^d \lambda_1(\xi)}{(2\pi)^d \lambda_1(\xi) + \lambda_2 |\xi|^{2n}} = 1 - e^{2(a(|\xi|) - a(r_0))} |\xi|^{2n} r_0^{-2n}$$

для всех $\xi \in B(0, r_0)$.

Это доказывает оптимальность метода, указанного в теореме, и тем самым теорема полностью доказана.

3. Примеры

Рассмотрим теперь в качестве примера задачу об оптимальном восстановлении решения уравнения теплопроводности в $\mathbb{R}^d$. Распространение тепла на $\mathbb{R}^d$ описывается уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$$

(Δ — оператор Лапласа в $\mathbb{R}^d$ и $(t, x) \mapsto u(t, x)$ — функция на $[0, +\infty) \times \mathbb{R}^d$) с начальным распределением температуры $u(0, \cdot) = f(\cdot)$.

Предположим, что $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$. Единственное решение этой задачи дается для всех $t > 0$, как хорошо известно, интегралом Пуассона

$$u(t, x) = u(t, x; f(\cdot)) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} f(y) \, dy$$

и при этом $u(t, \cdot; f(\cdot)) \to f(\cdot)$ при $t \to 0$ в метрике $L_2(\mathbb{R}^d)$.

Таким образом, имеем семейство операторов

$$T(t) : L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d), \quad T(t)f(\cdot) = u(t, \cdot)$$

и, как хорошо известно, преобразование Фурье решения уравнения теплопроводности имеет вид

$$F[T(t)f(\cdot)](\xi) = F[u(t, x; f(\cdot))](\xi) = e^{-t|\xi|^2} F[f](\xi) \text{ для п.в. } \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Следовательно, если поставить задачу об оптимальном восстановлении температуры в $\mathbb{R}^d$ в момент времени $t > 0$ по преобразованию Фурье начальной функции $f(\cdot) \in W_2^n(\mathbb{R}^d)$, известному точно или приближенно на некотором измеримом множестве A, то ее решение дается доказанной теоремой при $a(|\xi|) = t|\xi|^2$, $\xi \in \mathbb{R}^d$.

В качестве второго примера рассмотрим задачу Дирихле

$$\Delta u = 0, \quad u(\cdot, 0) = f(\cdot),$$

где Δ — оператор Лапласа в $\mathbb{R}^{d+1}$ и $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$, заключающуюся в нахождении гармонической функции $u(\cdot, \cdot)$ в верхнем полупространстве $\{(x, y) \in \mathbb{R}^{d+1} : y > 0\}$ такой, что $u(\cdot, y) \in L_2(\mathbb{R}^d)$ для любого $y > 0$, $\sup\limits_{y>0} \|u(\cdot, y)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} < \infty$ и $u(\cdot, y) \to f(\cdot)$ при $y \to 0$ в метрике $L_2(\mathbb{R}^d)$.

В этом случае решение задачи Дирихле единственно и выражается интегралом Пуассона (см. [15])

$$u(x, y) = u(x, y; f) = \frac{\Gamma((d+1)/2)}{\pi^{(d+1)/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \frac{y f(t)}{(|x - t|^2 + y^2)^{(d+1)/2}}\, dt.$$

Как и в предыдущем примере, мы имеем семейство операторов $T(y) : L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)$, $T(y)f(\cdot) = u(\cdot, y)$, которые в образах Фурье имеют вид

$$F[T(y)f](\xi) = F[u(x, y; f)](\xi) = e^{-y|\xi|} F[f](\xi).$$

Если поставить задачу об оптимальном восстановлении значений гармонической функции на гиперплоскости $y = Y$ по преобразованию Фурье граничной функции $f(\cdot) \in W_2^n(\mathbb{R}^d)$, известному точно или приближенно на некотором измеримом множестве A, то ее решение дается доказанной здесь теоремой, когда $a(|\xi|) = Y|\xi|$, $\xi \in \mathbb{R}^d$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Смоляк С. А.* Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них. Дис. … канд. физ.-мат. наук. М.: МГУ, 1965.
2. *Micchelli C. A., Rivlin T. J.* A survey of optimal recovery // Optimal estimation in approximation theory (C. A. Micchelli and T. J. Rivlin, Eds.). New York: Plenum Press, 1977. P. 1–54.
3. *Micchelli C. A., Rivlin T. J.* Lectures on optimal recovery // Lecture Notes in Mathematics. Berlin: Springer-Verl., 1985. V. 1129. P. 21–93.
4. *Traub J. F., Woźniakowski H.* A general theory of optimal algorithms. New York: Acad. Press, 1980.
5. *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных // Функц. анализ и его прил. 2003. Т. 37, № 3. С. 51–64.
6. *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Об оптимальном гармоническом синтезе по неточно заданному спектру // Функц. анализ и его прил. 2010. Т. 44, № 3. С. 76–79.

7. *Осипенко К. Ю.* О восстановлении решения задачи Дирихле по неточным исходным данным // Владикавк. мат. журн. 2004. Т. 6, № 4. С. 55–62.
8. *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление решения уравнения теплопроводности по неточным измерениям // Мат. сб. 2009. Т. 200, № 5. С. 37–54.
9. *Абрамова Е. В.* Наилучшее восстановление решения задачи Дирихле по неточно заданному спектру граничной функции // Владикавк. мат. журн. 2017. Т. 19, № 4. С. 3–12.
10. *G. G. Magaril-Il'yaev, E. O. Sivkova* Optimal recovery of the semi-group operators from inaccurate data // Euras. Math. J. 2019. V. 10, N 4. P. 75–84.
11. *Абрамова Е. В., Магарил-Ильяев Г. Г., Сивкова Е. О.* Наилучшее восстановление решения задачи Дирихле для полупространства по неточным измерениям // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2020. Т. 60, № 10. С. 1711–1720.
12. *Сивкова Е. О.* Оптимальное восстановление семейства операторов по неточным измерениям на компакте // Владикавк. мат. журн. 2022. Т. 25, № 2. С. 124–135.
13. *Абрамова Е. В., Сивкова Е. О.* Оптимальное восстановление решения задачи Дирихле для полуплоскости // Владикавк. мат. журн. 2022. Т. 64, № 3. С. 441–449.
14. *Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М.* Выпуклый анализ и его приложения. М.: УРСС, 2020.
15. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974.

Поступила в редакцию 20 сентября 2023 г.
После доработки 20 сентября 2023 г.
Принята к публикации 28 ноября 2023 г.

Абрамова Елена Владимировна
НИУ «Московский энергетический институт»,
Красноказарменная ул., 14, Москва 111250
abramova_elena@inbox.ru

Сивкова Елена Олеговна
Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
ул. Ватутина, 53, Владикавказ 362025;
НИУ «Московский энергетический институт»,
Красноказарменная ул., 14, Москва 111250
sivkova_elena@inbox.ru