

МИНИСТЕРСТВО ОБЩЕГО И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
МАТИ – Российский государственный технологический университет  
им. К.Э. Циолковского

Кафедра высшей математики

## ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

Методические указания к практическим занятиям по теме :  
MAPLE® В КУРСЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Составители: Агарева О.Ю.  
Введенская Е. В.  
Осипенко К. Ю.

Москва 1999

# ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

## I. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ С ПОМОЩЬЮ ПАКЕТА MAPLE

Пакет Maple предоставляет мощные средства для дифференцирования функций и вычисления дифференциалов. Для вычисления простейшей производной следует в командном окне после приглашения Maple ввести команду следующего вида:

**diff(<функция>, <переменная>);**

здесь <функция> – выражение, задающее функцию (не обязательно одной переменной), например

**$x^2 + 2x + 1$**

<переменная> – имя переменной, по которой будет вестись дифференцирование, например

**$x$**

Примером вычисления производной может служить такая команда:

**diff( $x^2 + 2x + 1$ ,  $x$ );**

Также можно вычислить дифференциал функции, используя следующую команду:

**D(<функция>);**

где <функция> – выражение, задающее функцию. Например

**D(arcsin( $x$ ));**

С помощью команды **diff** можно вычислять производные высших порядков. При этом команда имеет следующий формат:

**diff(<функция>, <переменная> \$ <порядок>);**

где <порядок> - порядок вычисляемой производной.

В решениях некоторых примеров этой главы с помощью MAPLE будут использованы дополнительные команды MAPLE. Кратко опишем их формат и назначение:

**<переменная>:=convert(<выражение>, polynom);** – представить <выражение> в виде полинома, присвоив значение <переменной>.

**factor(<выражение>);** – разложить <выражение> на множители.

**subs(<old>=<new>, <выражение>);** – подставить выражение <new> на место <old> в <выражении>.

**<переменная>:=solve(<выр1>=<значение>, <выр2>);** – присвоить <переменной> значение выражения <выр2>, полученное разрешением уравнения <выр1>(<выр2>)=<значение>.

**simplify(<выражение>);** – упростить <выражение>.

**taylor(<f(x)>, x=<x0>, <n>+1);** – разложить функцию  $f(x)$  по формуле Тейлора с центром в точке  $x_0$  до порядка  $n$  включительно.

## II. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ. ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ. ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ

**Определение 1.** Производной функции  $f(x)$  в точке  $x$  называется

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Из определения следуют правила дифференцирования:

1.  $(u(x) + v(x))' = u'(x) + v'(x);$
2.  $(\alpha \cdot u(x))' = \alpha \cdot u'(x),$  где  $\alpha = \text{const};$
3.  $(u(x) \cdot v(x))' = u'(x)v(x) + v'(x)u(x);$
4.  $\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{v^2(x)},$  где  $v(x) \neq 0;$
5.  $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x);$
6.  $(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(y)} \Big|_{y=f^{-1}(x)},$  здесь  $f^{-1}(x)$  – функция, обратная  $f(x).$

На основании определения производной и формул 1) – 6) вычисляются производные некоторых элементарных функций:

7.  $(c)' = 0,$  где  $c = \text{const};$
8.  $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \alpha = \text{const};$
9.  $(a^x)' = a^x \ln a$  при  $a > 0, a \neq 1;$  в частности,  $(e^x)' = e^x;$
10.  $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a};$  в частности,  $(\ln x)' = \frac{1}{x};$
11.  $(\sin x)' = \cos x;$
12.  $(\cos x)' = -\sin x;$
13.  $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x};$

$$14. (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$$

$$15. (\arcsin x)' = -(\arccos x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$16. (\operatorname{arctg} x)' = -(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{1}{1+x^2};$$

$$17. (\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x;$$

$$18. (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x;$$

$$19. (\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x};$$

$$20. (\operatorname{cth} x)' = \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

**Пример 1.** Доказать, используя лишь определение, что  $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ ,  $x > 0$ .

$$\begin{aligned} \text{Доказательство: } (\ln x)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + \Delta x) - \ln x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \ln \left( \frac{x + \Delta x}{x} \right)^{\frac{1}{\Delta x}} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \ln \left( \left( 1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\frac{x}{\Delta x}} \right)^{\frac{1}{x}} = \ln e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}, \text{ что требовалось доказать.} \end{aligned}$$

Вынося в последнем равенстве логарифм за знак предела, мы воспользовались непрерывностью функции  $\ln x$  при  $x > 0$ . Заметим, что условие  $x > 0$  гарантирует, что при достаточно малом  $|\Delta x|$ ,  $x + \Delta x$  тоже будет  $> 0$ , что необходимо для существования  $\ln(x + \Delta x)$ .

**Пример 2.** Вычислить  $y'$ , если  $y = 5^{2^{3^x}}$ .

$$\text{Решение: } y' = 5^{2^{3^x}} \cdot \ln 5 \cdot 2^{3^x} \cdot \ln 2 \cdot 3^x \cdot \ln 3 = (\ln 2 \ln 3 \ln 5) 5^{2^{3^x}} 2^{3^x} 3^x.$$

Здесь использовались формулы 5) и 9).

**Пример решения с использованием Maple:**

```
>diff(5^(2^(3^x)),x);
5^(2^(3^x))*2^(3^x)*3^x*ln(3)*ln(2)*ln(5)
```

### III. ПРИЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

1. Для функций, представляющих собой громоздкие произведения и частные различных степенных выражений, удобно, а для показательно-степенных функций, где от переменного зависят как основание степени, так и ее показатель, – необходимо применять прием логарифмического дифференцирования.

Этот прием основан на соотношении  $(\ln y(x))' = \frac{y'(x)}{y(x)} \Rightarrow$

$$y'(x) = y(x)(\ln y(x))'.$$

**Пример 3.** Найти  $y'$ , где  $y = (\ln x)^{\frac{1}{x^2}}$ .

**Решение:**  $\ln y = \frac{1}{x^2} \ln \ln x$ ;  $(\ln y)' = \frac{y'}{y} = -\frac{2}{x^3} \ln \ln x + \frac{1}{x^2} \frac{1}{\ln x} \frac{1}{x} =$

$$\frac{1}{x^3} \left( \frac{1}{\ln x} - 2 \ln \ln x \right); y' = \frac{(\ln x)^{\frac{1}{x^2}}}{x^3} \left( \frac{1}{\ln x} - 2 \ln \ln x \right).$$

**Пример решения с использованием Maple:**

```
>diff((ln(x))^(1/x^2), x);  
ln(x)^(1/x^2)*(-2*(ln(ln(x)))/x^3)+1/(x^3*ln(x))
```

**Пример 4.** Вычислить  $y'$ , если  $y = \frac{(x-1)^{\frac{1}{2}}(x+3)^5(x+2)^7}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-2)}}$ .

**Решение:**  $\ln y = \frac{1}{2} \ln(x-1) + 5 \ln(x+3) + 7 \ln(x+2) - \frac{2}{3} \ln(x+1) - \frac{1}{3} \ln(x-2)$ ;

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y} = \frac{1}{2(x-1)} + \frac{5}{x+3} + \frac{7}{x+2} - \frac{2}{3(x+1)} - \frac{1}{3(x-2)};$$

$$y' = \frac{(x-1)^{\frac{1}{2}}(x+3)^5(x+2)^7}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-2)}} \left[ \frac{1}{2(x-1)} + \frac{5}{x+3} + \frac{7}{x+2} - \frac{2}{3(x+1)} - \frac{1}{3(x-2)} \right].$$

**Пример решения с использованием Maple:**

```
>simplify(diff(((x-1)^(1/2)*(x+3)^5*(x+2)^7)/((x+1)^2*(x-2))^(1/3),x));  
1/2*(23*x^4+12*x^3-143*x^2-16*x+100)*(x+3)^4*(x+2)^6/((x+1)^2*(x-2))^(1/3)/(x-2)/(x+1)/(x-1)^(1/2)
```

2. Дифференцирование параметрически заданных функций  $y(x)$ :  $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$

производится по формуле  $y'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ .

**Пример 5.** Вычислить  $y'(x)$ , если  $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}$

**Решение:**  $y'(x) = \frac{(b \sin t)'}{(a \cos t)'} = -\frac{b \cos t}{a \sin t} = -\frac{b}{a} \operatorname{ctgt}$ . Заметим, что  $y'(x)$

представляет собой, как и  $y(x)$ , параметрически заданную функцию:

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y'(x) = -\frac{b}{a} \operatorname{ctgt} \end{cases}$$

**Пример решения с использованием Maple:**

```
>S:=diff(b*sin(t),t)/diff(a*cos(t),t);  
S:=-b*cos(t)/a/sin(t)
```

3. Производную  $y'(x)$  функции  $y(x)$ , заданной неявно в виде уравнения  $F(x, y) = 0$ , можно вычислить (при условии  $F'_y \neq 0$ ), дифференцируя тождество, полученное при подстановке в уравнение его решения  $y(x)$ :  $F(x, y(x)) = 0$  по  $x$ . Получим выражение, в которое линейно войдет  $y'(x)$ . Его можно разрешить относительно  $y'(x)$ .

**Пример 6.** Рассмотрим неявное задание эллипса из примера 5:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ . Найдём  $y'(x)$ , дифференцируя уравнение эллипса, полагая в нем  $x$  независимой переменной, а  $y$  – функцией от  $x$ ;

получим  $\frac{2x}{a^2} + \frac{2yy'}{b^2} = 0 \Rightarrow \frac{2y}{b^2} y' = -\frac{2x}{a^2} \Rightarrow y' = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$ . Заметим, что

производная  $y'(x)$  выражена не только через  $x$ , но и через  $y$ . Это естественно, так как на эллипсе значению  $x \in (-a, a)$  соответствуют 2 точки с ординатами  $y_1 = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$  и  $y_2 = -\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ . Производные 2-х различных функций  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$  в точке  $x$ , вообще говоря, различны.

**Пример решения с использованием Maple:**

```
>Z:=diff(x^2/a^2+y(x)^2/b^2,x);
  Z:= 2*x/a^2+2*y(x)/b^2*diff(y(x),x)
>Q:=solve(Z=0,diff(y(x),x));
  Q:= -x*b^2/y(x)/a^2
```

#### IV. СТАРШИЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Определение производной  $n$ -го порядка функции  $f(x)$  имеет индуктивный характер.

**Определение 2.** Производной порядка  $n > 1$  функции  $f(x)$  называется  $y^{(n)}(x) = (y^{(n-1)}(x))'$ .

Таким образом,  $n$ -я производная определяется и вычисляется через  $(n-1)$ -ю, та – через  $(n-2)$ -ю, и т.д.

**Пример 7.** Вычислить производную  $n$ -го порядка функции  $y = \sin 2x$ .

**Решение:**  $y' = 2 \cos 2x; \quad y'' = -4 \sin 2x;$   
 $y''' = -8 \cos 2x; \quad y^{(4)} = 16 \sin 2x$   
 ...

$$y^{(n)} = 2^n \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}n\right).$$

Последняя формула является предположением, основанным на предыдущих 4-х строчках. Для  $n = 1, 2, 3, 4$  она выполняется. Предположим, что «угаданная» формула для производной  $(n-1)$ -го порядка верна. Покажем, что тогда она верна и для  $n$ -й производной. Пусть  $y^{(n-1)} = 2^{n-1} \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}(n-1)\right)$ . Продифференцируем последнее равенство по  $x$ :

$$y^{(n)} = (y^{(n-1)})' = 2^n \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}n - \frac{\pi}{2}\right) = 2^n \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}n\right), \text{ т.к. } \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \sin \alpha.$$

Примененный способ доказательства называется методом полной математической индукции. Впрочем, по индукции можно доказать формулу  $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}n\right)$ , а затем, применив ее и формулу  $y^{(n)} = 2^n \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}n\right)$ , получить выражение для  $(\sin 2x)^{(n)}$ .

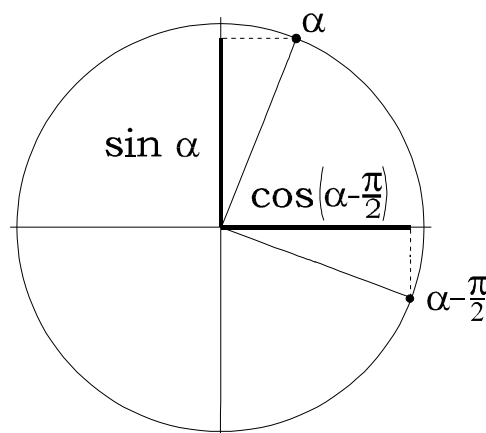


Рис. к примеру 7

**Пример 8.** Посчитаем 2-ю производную из примера 3, проиллюстрировав применение логарифмического дифференцирования для нахождения старших производных.

**Решение:**  $y = (\ln x)^{\frac{1}{x^2}}, y' = \frac{(\ln x)^{\frac{1}{x^2}}}{x^3} \left( \frac{1}{\ln x} - 2 \ln \ln x \right).$

$$\text{Продифференцируем } y' \Rightarrow y'' = \frac{\left( (\ln x)^{\frac{1}{x^2}} \right)' x^3 - 3x^2 (\ln x)^{\frac{1}{x^2}}}{x^6}.$$

$$\begin{aligned} & \cdot \left( \frac{1}{\ln x} - 2 \ln \ln x \right) + \frac{(\ln x)^{\frac{1}{x^2}}}{x^3} \left( -\frac{1}{x \ln^2 x} - \frac{2}{x \ln x} \right) = \left[ \frac{(\ln x)^{\frac{1}{x^2}}}{x^6} \left( \frac{1}{\ln x} - 3 \ln \ln x \right) - \right. \\ & \left. - \frac{2}{x^4} (\ln x)^{\frac{1}{x^2}} \right] \cdot \left( \frac{1}{\ln x} - 2 \ln \ln x \right) - \frac{(\ln x)^{\frac{1}{x^2}}}{x^3} \cdot \left( \frac{1}{x \ln^2 x} + \frac{2}{x \ln x} \right) = \frac{(\ln x)^{\frac{1}{x^2}}}{x^4} \cdot \\ & \cdot \left[ \left( \frac{1}{x^2 \ln x} - \frac{2 \ln \ln x}{x^2} - 3 \right) \left( \frac{1}{\ln x} - 2 \ln \ln x \right) - \frac{1}{\ln^2 x} - \frac{2}{\ln x} \right]. \end{aligned}$$

использовалась уже найденная в примере 3  $y' = \frac{(\ln x)^{\frac{1}{x^2}}}{x^3} \left( \frac{1}{\ln x} - 2 \ln \ln x \right).$

**Пример решения с использованием Maple:**

```
>factor(diff(ln(x)^(1/x^2), x$2));
```



$$\frac{\ln(x)^{(1/x^2)} * (4 * \ln(\ln(x)) ^2 * \ln(x) ^2 - 4 * \ln(\ln(x)) * \ln(x) + 1 + 6 * x^2 * \ln(\ln(x)) * \ln(x) ^2 - 5 * x^2 * \ln(x) - x^2)}{x^6 / \ln(x) ^2}$$

Операция factor использована здесь для разложения результата на множители.

**Пример 9.** Найдем 2-ю производную  $y''(x)$  для верхней и нижней половин эллипса, заданного параметрически, из

примера 5: 
$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases} \quad \begin{cases} x = a \cos t \\ y'(x) = -\frac{b}{a} \operatorname{ctg} t \end{cases}$$

**Решение:** 
$$y'' = \frac{\frac{d}{dt} y'(x)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{b}{a} \frac{1}{\sin^2 t}}{-a \sin t} = -\frac{b}{a^2} \frac{1}{\sin^3 t}.$$
 Заметим, что вторая

производная, как и первая, задана параметрически:

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y''(x) = -\frac{b}{a^2} \frac{1}{\sin^3 t} \end{cases}$$

**Пример решения с использованием Maple:**

```
>diff(S,t)/diff(a*cos(t),t);  
-(b/a+b*cos(t)^2/a/sin(t)^2)/a/sin(t)
```

\* значение S было присвоено в примере 5

**Пример 10.** Найдем  $y''(x)$  для верхней и нижней половин эллипса,

заданного неявно (см. пример 6):  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, y' = -\frac{b^2 x}{a^2 y}.$

**Решение:** Продифференцируем  $y'$  по  $x$ : 
$$y'' = \left( -\frac{b^2 x}{a^2 y} \right)' = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{y - y'x}{y^2} = -\frac{b^2}{a^2 y^2} \left( y + \frac{b^2 x^2}{a^2 y} \right).$$
 Итак, 
$$y'' = -\frac{b^2}{a^2 y^2} \left( y + \frac{b^2 x^2}{a^2 y} \right).$$
 2-я

производная неявной функции, как и первая, выражается как через  $x$ , так и через  $y$ .

**Пример решения с использованием Maple:**

```
>subs(diff(y(x),x)=Q,diff(Q,x));  
-b^2/y(x)/a^2-x^2*b^4/y(x)^3/a^4
```

\*Значение Q было присвоено в примере 6

## V. ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ

**Определение 3.** Если приращение функции  $y = f(x)$ :  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ , соответствующее приращению аргумента  $\Delta x$ , может быть представлено в виде  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = A\Delta x + \bar{o}(\Delta x)$ , где  $A$  не зависит от  $\Delta x$ , но зависит, вообще говоря, от  $x$ , то функция  $y = f(x)$  называется дифференцируемой в точке  $x$ . Здесь  $\bar{o}(\Delta x)$  – бесконечно малая более высокого порядка малости, чем  $\Delta x$ , т.е.  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\bar{o}(\Delta x)}{\Delta x} = 0$ .

Можно доказать, что  $A = \frac{df(x)}{dx}$ . Таким образом, существование производной у функции  $f(x)$  в точке  $x$  эквивалентно ее дифференцируемости в этой точке по определению 3.

**Определение 4.** Главная линейная часть приращения дифференцируемой функции  $A\Delta x = f'(x)\Delta x$  называется ее дифференциалом.

Дифференциал  $df(x)$  является функцией двух аргументов –  $x$  и  $\Delta x$ . Рассмотрев функцию  $y = x$ , убедимся, что  $dx \equiv \Delta x$  (дифференциал независимой переменной совпадает с ее приращением). Дифференциалы старших порядков определяются индуктивно.

**Определение 5.** Дифференциалом  $n$ -го порядка функции  $f(x)$  ( $n \geq 2$ ) называется дифференциал от  $(n-1)$ -го дифференциала этой функции. При этом  $d^{(n-1)}f$  считается функцией только  $x$  (но не  $dx \equiv \Delta x$ ), т.е.  $d^n f = d(d^{(n-1)}f) = d(f^{(n-1)}(x)(dx)^{(n-1)}) = f^{(n)}(x)(dx)^n$ .

Соотношение  $d^{(n-1)}f = f^{(n-1)}(x)(dx)^{n-1}$  выполняется, например, для  $n-1=1$ . Методом индукции из этого следует справедливость аналогичного выражения для  $n$ -го дифференциала при любом  $n \geq 2$ .

**Пример 11.** Вычислить 1-й и 2-й дифференциалы функции  $y = \sqrt{1-x^2} \arcsin x$ .

**Решение:**  $dy = y'dx = \left( \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx = \left( 1 - \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx.$

$$d^2y = y''(dx)^2 = \left( 1 - \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \right)' (dx)^2 =$$

$$- \frac{\left( \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \arcsin x \right) \sqrt{1-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2} \arcsin x}}{1-x^2} (dx)^2 =$$

$$= - \frac{x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x(1-x^2+x^2)}{(1-x^2)^{3/2}} (dx)^2 = - \frac{x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x}{(1-x^2)^{3/2}} (dx)^2.$$

**Пример решения с использованием Maple:**

```
>X:=subs(D(arcsin(x))=diff(arcsin(x),x)*D(x),D(sqrt(1-
x^2)*arcsin(x)));
X := -D(x)*x/(1-x^2)^(1/2)*arcsin(x)+D(x)
>F:=subs(D(D(x))=0,D(arcsin(x))=diff(arcsin(x),x)*D(x),
D(X));
F:=-D(x)^2/(1-x^2)^(1/2)*arcsin(x)-D(x)^2*x^2/(1-
x^2)^(3/2)*arcsin(x)-D(x)^2*x/(1-x^2)
>simplify(F);
(x*(1-x^2)^(1/2)+arcsin(x))*D(x)^2/(1-x^2)^(1/2)/(-
1+x^2)
```

## VI. ПРИЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНЫХ И ДИФФЕРЕНЦИАЛОВ

### 1. Формула Тейлора.

Приближение функции в окрестности точки  $x_0$  многочленом может быть удобно в работе с этой функцией.

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \dots +$$

$$+ \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + R_n(x), \text{ где остаточный член } R_n(x), \text{ например, в форме}$$

Лагранжа, имеет вид  $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ , где  $0 < \theta < 1$  (вообще говоря,  $\theta$  зависит от  $x$  и  $x_0$ ).

Справедливы следующие формулы Маклорена (формулы Тейлора при  $x_0 = 0$ ) для некоторых элементарных функций:

$$1. e^x \approx \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + R_n.$$

$$2. \sin x \approx \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + R_n.$$

$$3. \cos x \approx \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + R_n.$$

$$4. (1+x)^\alpha \approx 1 + \sum_{k=1}^n \frac{\alpha(\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-k+1)}{k!} \cdot x^k + R_n.$$

$$5. \operatorname{arctg} x \approx \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + R_n.$$

$$6. \ln(1+x) \approx \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + R_n.$$

**Пример 12.** Разложить многочлен  $y = x^3 + x^2 + 2x - 3$  по степеням  $(x+1)$ .

**Решение:**  $y' = 3x^2 + 2x + 2$ ,  $y'' = 6x + 2$ ,  $y''' = 6$ ,  $y(-1) = -5$ ,  $y'(-1) = 3$ ,  $y''(-1) = -4$ ,  $y'''(-1) = 6$ .  $y = -5 + 3(x+1) - 2(x+1)^2 + (x+1)^3$ .

**Пример решения с использованием Maple:**

```
>taylor(x^3+x^2+2*x-3, x=-1, 4);
-5+3*(x+1)-2*(x+1)^2+1*(x+1)^3
```

Формула Тейлора  $n$ -го порядка точна для многочлена порядка  $n$  ( $R_n = 0$ ).

**Пример 13.** Вычислить приближенно с помощью первого дифференциала  $\operatorname{tg} 5^\circ$ .

**Решение:**  $5^\circ = \frac{\pi}{36}$ ,  $y = \operatorname{tg} x$ ,  $x_0 = 0$ ,  $\Delta x = \frac{\pi}{36}$ ,  $\Delta y = \operatorname{tg} \frac{\pi}{36} - \operatorname{tg} 0 = \operatorname{tg} \frac{\pi}{36} \approx$   
 $\approx dy = (\operatorname{tg} x)'|_{x=0} \cdot \Delta x = \frac{1}{\cos^2 x}|_{x=0} \cdot \frac{\pi}{36} = \frac{\pi}{36} \approx 0,087$ . Итак,  $\operatorname{tg} 5^\circ \approx 0,087$ .

**Пример решения с использованием Maple:**

```
>convert(subs(x=(Pi/36), taylor(tan(x), x=0, 2)), polynom);
1/36*Pi
```

В примере 13 неизвестна точность приближенного вычисления. Покажем, как с помощью формулы Тейлора можно производить вычисления с гарантированной точностью.

**Пример 14.** Вычислить с точностью  $\varepsilon = 10^{-5}$   $\sin 28^\circ$ .

**Решение:**  $y = \sin x$ ,  $x_0 = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$ ,  $\Delta x = -2^\circ = -\frac{\pi}{90}$ .

$$|R_n| = \frac{(\sin y)^{n+1}}{(n+1)!} \Big|_{y=x_0+\theta(x-x_0)=x_0+\theta\Delta x} \cdot \left(\frac{\pi}{90}\right)^{n+1} \leq \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{\pi}{90}\right)^{n+1}.$$

$$|R_1| \leq \frac{\pi^2}{90 \cdot 180} \approx \frac{9}{100} > 10^{-5}. \quad |R_2| \leq \frac{\pi^3}{90^3 \cdot 6} \approx \frac{27}{90^3 \cdot 6} = \frac{1}{162000} < 10^{-5}. \text{ И так, } n = 2$$

гарантирует заданную точность.

$$\sin 28^\circ \approx \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\pi}{90} - \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{90}\right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}\pi}{180} - \frac{\pi^2}{32400} \cong \frac{1}{2} - 0,03023 - 0,00030 \approx 0,46947.$$

**Пример решения с использованием Maple:**

```
>C:=taylor(sin(x),x=Pi/6,5);
C:=series(1/2+(1/2*3^(1/2))*(x-1/6*Pi)-1/4*(x-
1/6*Pi)^2+(-
1/12*3^(1/2))*(x-1/6*Pi)^3+1/48*(x-1/6*Pi)^4+O((x-
1/6*Pi)^5),x=
-(-1/6*Pi),5)
>V:=subs(x=7/45*Pi,C); convert(evalf(V),polynom);
V:=1/2-1/180*3^(1/2)*Pi-1/32400*Pi^2+1/8748000*3^(1/2)*
Pi^3+1/3149280000*Pi^4+O(-1/5904900000*Pi^5)
.4694715632
```

2. Правило Лопиталя. Справедлива теорема:

**Теорема 1.** Пусть в некоторой окрестности точки  $x_0$ , кроме, быть может, самой этой точки, 2 функции  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$ , одновременно бесконечно малые или бесконечно большие, дифференцируемы и  $\psi'(x) \neq 0$ . При этом, если

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}, \text{ то } \exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \text{ и они равны.}$$

Пример 15. **Вычислить**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{\ln(\cos 2x)}$ .

**Решение.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{\ln(\cos 2x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{\sin x}{\cos x}}{-\frac{2 \sin 2x}{\cos 2x}} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos 2x}{\sin 2x \cos x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 2x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x}{\cos x} =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2 \cos 2x} \cdot 1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

**Пример решения с использованием Maple:**

```
>limit(ln(cos(x))/ln(cos(2*x)),x=0);
1/4
```

**Пример 16.** Вычислить  $\lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}} = A$ .

**Решение.**

$$\begin{aligned} \ln A &= \lim_{x \rightarrow 1} \ln(2-x)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 1} \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} \ln(2-x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \frac{\pi x}{2}}{\cos \frac{\pi x}{2}} \ln(2-x) = \lim_{x \rightarrow 1} \sin \frac{\pi x}{2} \cdot \\ &\cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(2-x)}{\cos \frac{\pi x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi x}{2}} = \frac{2}{\pi} \Rightarrow A = e^{\frac{2}{\pi}}. \end{aligned}$$

**Пример решения с использованием Maple:**

```
>limit((2-x)^tan(Pi*x/2),x=1);
exp(2/Pi)
```

**Пример 17.** Вычислить  $\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} \pi x$ .

**Решение.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} \pi x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ctg} \pi x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{\pi}{\sin^2 \pi x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi x^2}{\sin^2 \pi x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi^2 x^2}{\sin^2 \pi x} \cdot \frac{1}{\pi} = \frac{1}{\pi}.$$

**Пример решения с использованием Maple:**

```
>limit(x*cot(Pi*x),x=0);
1/Pi
```

3. Рассмотрим некоторые геометрические приложения производной. Уравнение касательной к графику функции  $y = f(x)$  в точке  $(x_0, f(x_0))$  имеет вид  $y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$ . Если  $f'(x_0) = \infty$ , то уравнение касательной  $x = x_0$ . Уравнение нормали к графику в этой точке —  $y = y_0 - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$ . Если  $f'(x_0) = 0$ , то уравнение нормали

$$x = x_0.$$

**Пример 18.** Написать уравнения касательной и нормали к графику функции  $x^2 + y^2 = 1$  в точке  $M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ .

**Решение.** Вычислим

$$y'(x): 2x + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{x}{y}, y'(M) = -1; y_k = \frac{1}{\sqrt{2}} - \left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2} - x -$$

$$\text{уравнение касательной; } y_n = \frac{1}{\sqrt{2}} + \left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = x - \text{уравнение нормали.}$$

**Пример решения с использованием Maple:**

```
>V:=diff(x^2+y(x)^2,x);
V:=2*x+2*y(x)*diff(y(x),x)
>W:=solve(V=0,diff(y(x),x));
W:=-x/y(x)
>subs(x=1/sqrt(2),y(1/sqrt(2))=1/sqrt(2),W);
-1
```

\*Здесь найден только угловой коэффициент касательной

**Пример 19.** Под какими углами пересекаются кривые  $y_1 = x$  и  $y_2 = x^3$ ?

**Решение.**  $x = x^3; x(x-1)(x+1) = 0; x_1 = 0, x_2 = -1, x_3 = 1. y_1' = 1, y_2' = 3x^2.$

$$1. x_1 = 0, y_1' = 1, y_2' = 0. \operatorname{tg} \alpha_1 =$$

$$= \frac{1-0}{1+0} = 1 \Rightarrow \alpha_1 = \frac{\pi}{4}.$$

$$2. x_2 = -1, y_1' = 1, y_2' = 3. \operatorname{tg} \alpha_2 =$$

$$\frac{3-1}{1+3} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha_2 = \operatorname{arctg} \frac{1}{2}.$$

3. В силу симметрии кривых

$$\alpha_3 = \alpha_2 = \operatorname{arctg} \frac{1}{2}.$$

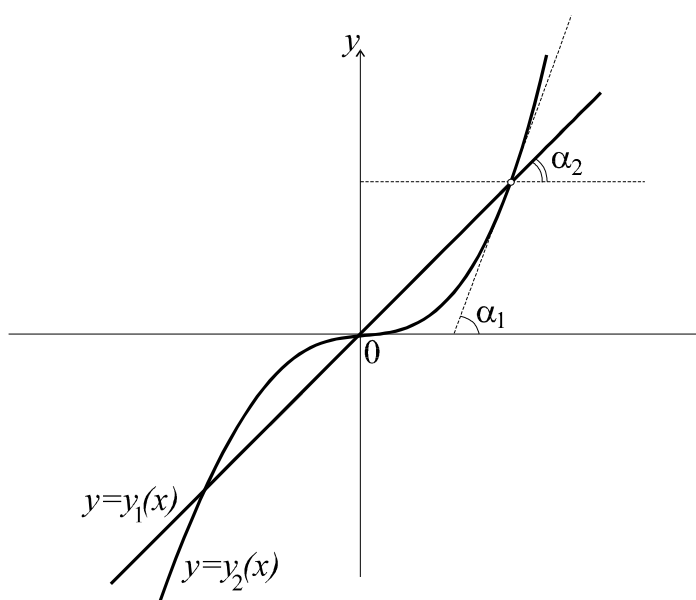
Здесь использована формула

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_2}{1 + \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2}$$

(см. Рис.).

**Пример решения с использованием Maple:**

**Рис. к примеру 19**



```

>solve(x=x^3,x);
0    1    -1
>a:=diff(x,x); b:=diff(x^3,x);
a:=1
b:=3*x^2
>arctan(subs(x=0,(a-b)/(1+a*b)));
1/4*Pi
>arctan(subs(x=1,(b-a)/(1+a*b)));
arctan(1/2)
>arctan(subs(x=-1,(b-a)/(1+a*b)));
arctan(1/2)

```



## ОГЛАВЛЕНИЕ

### **Дифференцирование функций одной переменной**

I. Дифференцирование с помощью пакета Maple.....	3
II. Определение производной. Правила дифференцирования. Таблица производных .....	4
III. Приемы дифференцирования .....	6
IV. Старшие производные функции одной переменной.....	8
V. Дифференциалы .....	11
VI. Приложения производных и дифференциалов.....	12

Ольга Юрьевна Агарева  
Елена Викторовна Введенская  
Константин Юрьевич Осипенко

## ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Методические указания к практическим занятиям по теме:  
“MAPLE в курсе математического анализа”.

Редактор М.А. Соколова  
Подписано в печать 21.6.99. Объем 1,25 п.л.  
Тираж 75 экз. Заказ

---

Ротапринт МАТИ-РГТУ, Берниковская наб., 14