МИНИСТЕРСТВО ОБЩЕГО И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
МАТИ – Российский государственный технологический университет
им. К.Э. Циолковского

Кафедра высшей математики

ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ
НЕПРЕРЫВНОСТЬ

Методические указания к практическим занятиям по теме :
MAPLE® В КУРСЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Составители: Агарева О.Ю.
Введенская Е. В.
Осипенко К. Ю.

Москва 1999

ВВЕДЕНИЕ

Цель данных методических указаний – познакомить студентов и преподавателей с математическим пакетом MAPLE, научить, как с помощью этого пакета решать задачи, возникающие при изучении стандартного курса математического анализа для инженерных специальностей.

Настороженное отношение к использованию компьютерных технологий в изучении математических дисциплин связано прежде всего с далеко не наивным вопросом – не заменит ли “нажатие клавиш” творческий процесс постижения фундаментальных основ изучаемых дисциплин? Авторы убеждены, что, если рассматривать математические пакеты как мощные вычислительные средства, помогающие избежать рутинных вычислений и освобождающие тем самым время для более серьезного, качественного подхода к изучаемому курсу, как средства, позволяющие наглядно демонстрировать глубокие математические результаты (например, сходимость рядов Фурье), такой замены не произойдет. Кроме прививания глубоких теоретических знаний, преподаватели должны научить будущих инженеров при необходимости за короткое время получать ответ на вычислительные задачи из математического анализа. Безусловно, студент, успешно изучивший курс математического анализа, будет в состоянии и через довольно продолжительный отрезок времени самостоятельно вычислить, например, какой-либо интеграл. Он будет вспоминать, какие замены переменных можно использовать для вычисления этого интеграла, или смотреть в справочниках. Но не лучше ли дать ему возможность мгновенно получить ответ.

В этой части работы рассматриваются задачи вычисления пределов (включая односторонние пределы), исследования на непрерывность и вычисления производных функций одной переменной. Все разделы устроены по единой схеме. Сначала приводится краткий теоретический материал (как правило, основные определения), а затем на примерах показаны способы решения задач из соответствующих разделов «вручную» и с помощью пакета MAPLE.

Работа частично поддержана федеральной программой “Интеграция” [проект N 480].

ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

I. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ С ПОМОЩЬЮ ПАКЕТА MAPLE

Пакет Maple V предоставляет широкие возможности для вычисления пределов функций одной переменной как односторонних, так и двусторонних, в точке или в бесконечности.

Для вычисления двустороннего предела функции в точке следует в окне команд после приглашения Maple (“>”) ввести следующую команду:

```
limit(<функция>,<точка>);
```

здесь <функция> – некоторое выражение, содержащее переменную, например,

```
((x^2-2*x+1)/(x^3-x)),
```

а <точка> – значение переменной, при котором вычисляется предел, например,

```
x=0
```

После нажатия клавиши `Enter` команда будет обработана и Maple выведет ответ. Пример команды для нахождения этого предела:

```
limit(x^2+2*x+1,x=0);
```

Если требуется найти предел функции в бесконечности, в выражении <точка> следует написать

`x=infinity` или **`x=-infinity`**

взависимости от знака бесконечности, например,

```
limit(x^3+x,x=infinity);
```

В случае одностороннего предела, команда выглядит следующим образом:

```
limit(<функция>,<точка>,<сторона>);
```

Поле <сторона> содержит слово **`left`** в случае левого предела, или **`right`** в случае правого. Пример вычисления одностороннего предела:

```
limit(1/x,x=0,left);
```

II. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Определение 1. *Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Число a – предел функции $y = f(x)$ в точке x_0* $\left[a = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)\right]$, *если для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое* $\delta(\varepsilon) > 0$, *что из* $0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ *следует неравенство* $|f(x) - a| < \varepsilon$.

Определение 2. *Число* a *– предел функции* $y = f(x)$ *в точке* x_0 *справа (слева)*
$\left[a = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)\left(a = \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)\right)\right]$, *если* $f(x)$ *определена в некоторой*

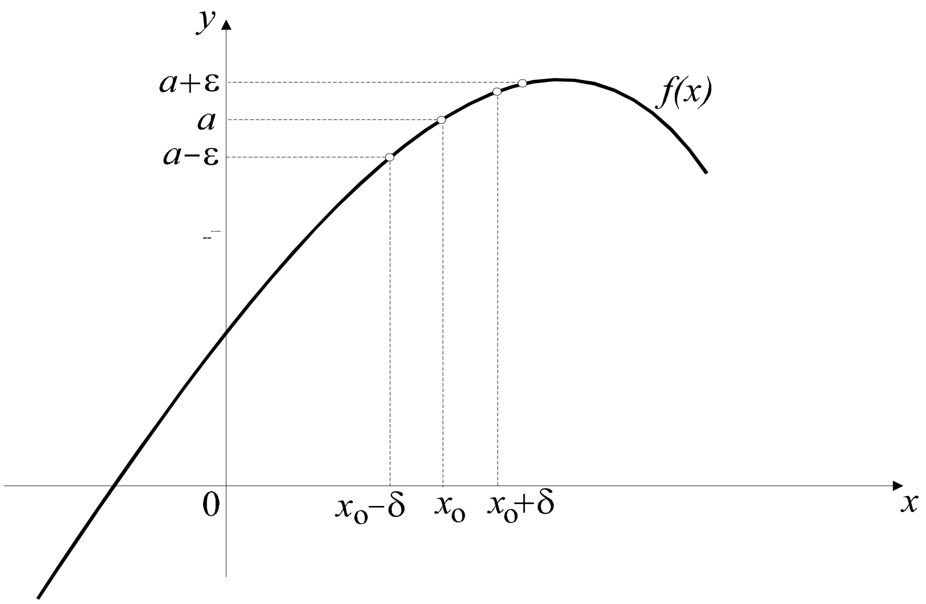


Рис. 1. Предел функции в точке

окрестности точки x_0 *и для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое* $\delta(\varepsilon) > 0$, *что из неравенства* $0 < x - x_0 < \delta(\varepsilon)$ $\left(-\delta(\varepsilon) < x - x_0 < 0\right)$ *следует неравенство* $|f(x) - a| < \varepsilon$.

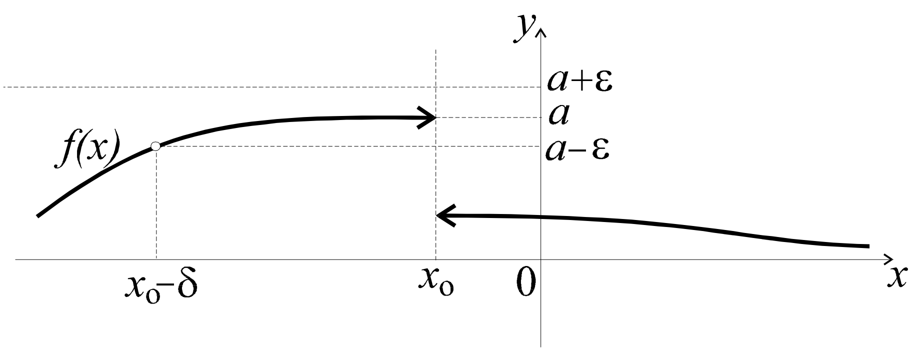


Рис. 2. Предел слева

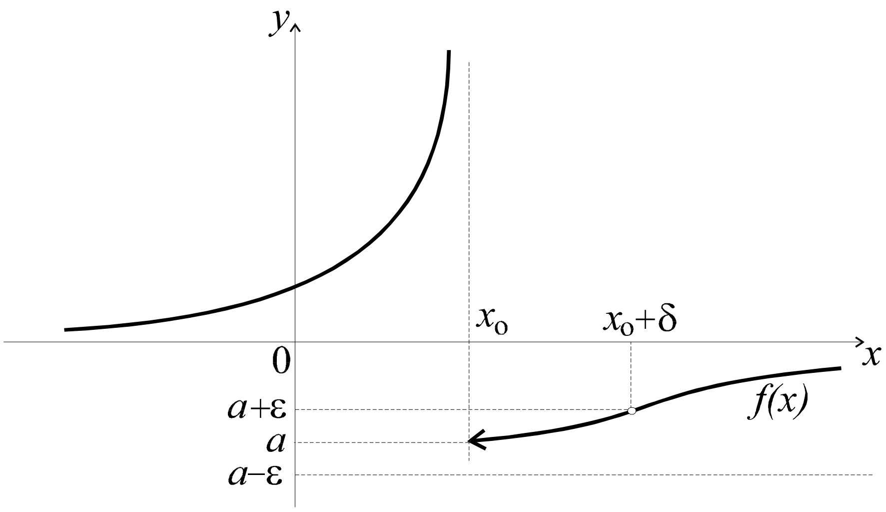


Рис. 3. Предел справа

Замечательные пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1.$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$

Пример вычисления замечательных пределов с помощью пакета Maple:

```
>limit(sin(x)/x,x=0);
 1
>limit((1+1/x)^x,x=infinity);
 exp(1)
```

Следствия из II замечательного предела:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}=1.$$

Пример проверки с использованием Maple:

```
>limit(ln(1+x)/x,x=0);
 1
>limit((exp(x)-1)/x,x=0);
 1
```

Определение 3. *Функция* $\alpha(x)$ *называется бесконечно малой при* $x \to x_0$ *(обозначается* $\alpha = o(1)$*), если* $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$.

Определение 4. *Бесконечно малые при* $x \to x_0$ *функции* $\alpha(x)$ *и* $\beta(x)$ *называются эквивалентными (обозначается* $\alpha \sim \beta$*), если* $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$.

Таблица эквивалентных бесконечно малых при $x \to 0$ ***функций:***

$\sin x \sim x$;	$e^x - 1 \sim x$;
$\operatorname{tg} x \sim x$;	$\log_x(1+x) \sim \dfrac{x}{\ln x}$;
$\arcsin x \sim x$;	$(1+x)^n - 1 \sim nx$;
$\operatorname{arctg} x \sim x$;	$\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \dfrac{x}{n}$;
$1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$;	$\sqrt{1+x} - 1 \sim \dfrac{x}{2}$;
$x^x - 1 \sim x \ln x$;	$\ln(1+x) \sim x$.

III. МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРЕДЕЛОВ

1. Функция преобразуется к виду, для которого предел легко найти.

Пример 1.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2}{x(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x(x+1)} = 0;$$

Пример решения с использованием Maple:

```
>limit((x^2-2*x+1)/(x^3-x),x=1);
 0
```

Пример 2.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{3\sin 3x}{3x \cos 3x} = 3.$$

Пример решения с использованием Maple:

```
>limit(tan(3*x)/x,x=0);
 3
```

2. В пределах, содержащих иррациональные выражения :

а) вводят новую переменную для получения рационального выражения.

Пример 3.

$$\lim_{x\to 10}\frac{\sqrt{x-1}-3}{x-10}=\begin{bmatrix}\sqrt{x-1}=t\\ x=t^2+1\\ x\to 10\Rightarrow t\to 3\end{bmatrix}=\lim_{t\to 3}\frac{t-3}{t^2-9}=\lim_{t\to 3}\frac{t-3}{(t-3)(t+3)}=\frac{1}{6}$$

Пример решения с использованием Maple:

```
>limit((sqrt(x-1)-3)/(x-10),x=10);
 1/6
```

b) переводят иррациональность из знаменателя в числитель или наоборот.

Пример 4.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\frac{1}{2}.$$

Пример решения с использованием Maple:

```
>limit((sqrt(x+1)-1)/x,x=0);
 1/2
```

3. При вычислении пределов вида $\lim\limits_{x\to x_0}U(x)^{V(x)}$, где $\lim\limits_{x\to x_0}U(x)=1$, $\lim\limits_{x\to x_0}V(x)=\infty$, используется II замечательный предел.

Пример 5.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2+5}{x-2}\right)^{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x-2}\right)^{\frac{x-2}{5}\cdot\frac{5}{x-2}(2x+1)}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5(2x+1)}{x-2}}=e^{10}.$$

Пример решения с использованием Maple:

```
>limit(((x+3)/(x-2))^(2*x+1),x=infinity);
 exp(10)
```

4. Вычисление пределов с помощью замены на эквивалентные бесконечно малые функции:

Пример 6.

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{4x^2-1}{\arcsin(1-2x)}=\begin{bmatrix}x=t+\dfrac{1}{2}\\ t\to 0\end{bmatrix}=\lim_{t\to 0}\frac{4t^2+4t+1-1}{\arcsin(1-2t-1)}=\begin{bmatrix}\arcsin(-2t)\sim(-2t)\\ t\to 0\end{bmatrix}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{4t(t+1)}{-2t}=-2\lim_{t\to 0}(t+1)=-2.$$

Пример решения с использованием Maple:

```
>limit((4*x^2-1)/arcsin(1-2*x),x=1/2);
 -2
```

IV. ОДНОСТОРОННИЕ ПРЕДЕЛЫ

Пример 7.

$$\lim_{x\to 0+0}(2+x)^{\frac{1}{x}}=2^{\frac{1}{+0}}=2^{+\infty}=+\infty;$$

Пример решения с использованием Maple:

```
>limit((2+x)^(1/x),x=0,right);
 infinity
```

Пример 8.

$$\lim_{x\to 0-0}(2+x)^{\frac{1}{x}}=2^{\frac{1}{-0}}=2^{-\infty}=0.$$

Пример решения с использованием Maple:

```
>limit((2+x)^(1/x),x=0,left);
 -infinity
```

НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ. ТОЧКИ РАЗРЫВА

I. ИССЛЕДОВАНИЕ НА НЕПРЕРЫВНОСТЬ С ПОМОЩЬЮ ПАКЕТА MAPLE

Для нахождения точек разрыва функции можно воспользоваться следующей командой Maple:

```
readlib(singular): singular(<функция>,<переменная>);
```

где <функция> – исследуемая функция, <переменная> – переменная, по которой необходимо найти разрывы. Параметр <переменная> можно вообще не указывать. Тогда Maple выведет на экран все возможные точки разрыва функции по всем переменным, от которых она зависит. Приведем пример нахождения точек разрыва:

```
readlib(singular): singular(2^(x/(9-x^2)),x);
```

Maple выведет на экран следующий набор точек:

{x=3}, {x=-3}.

I. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Определение 1. Функция $y = f(x)$ *непрерывна в точке* x_0, если предельное значение этой функции в точке x_0 существует и равно частному значению $f(x_0)$, или:

1) функция $y = f(x)$ определена в точке x_0 и некоторой ее окрестности;
2) существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$;
3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Определение 2. Точка x_0, в которой функция не обладает свойством непрерывности, называется *точкой разрыва функции* $y = f(x)$.

Определение 3. Точка x_0 называется *точкой устранимого разрыва*, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ существует, но функция не определена в точке x_0 или нарушено условие $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Определение 4. Точка x_0 называется *точкой разрыва I рода*, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ не существует, но при этом существуют конечные односторонние пределы $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x)$, неравные друг другу.

Определение 5. Точка x_0 называется *точкой разрыва II рода*, если хотя бы один из односторонних пределов $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x)$ не существует или равен бесконечности.

I. ПРИМЕРЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИЙ НА НЕПРЕРЫВНОСТЬ

Исследовать функцию на непрерывность, определить характер разрыва.

Пример 1. $f(x) = 2^{\frac{x}{9-x^2}}$.

Функция не определена в точках $x = \pm 3$, уже нарушено первое условие непрерывности, следовательно, в этих точках функция испытывает разрыв.

Для выяснения характера разрыва нужно вычислить односторонние пределы в точках $x = \pm 3$.

$$\lim_{x \to -3-0} 2^{\frac{x}{9-x^2}} = 2^{\frac{-3}{-0}} = 2^{\infty} = \infty.$$

$$\lim_{x\to -3+0} 2^{\frac{x}{9-x^2}} = 2^{\frac{-3}{0}} = 2^{-\infty} = 0.$$

Так как левый предел в точке $x=-3$ равен бесконечности, то в ней разрыв II рода.

$$\lim_{x\to 3-0} 2^{\frac{x}{9-x^2}} = 2^{\frac{3}{0}} = 2^{\infty} = \infty;$$

$$\lim_{x\to 3+0} 2^{\frac{x}{9-x^2}} = 2^{\frac{3}{-0}} = 2^{-\infty} = 0.$$

Так как правый предел в точке $x=3$ равен бесконечности, то в ней разрыв II рода.

Пример решения с использованием Maple:

```
> readlib(singular): singular(2^(x/(9-x^2)),x);
  {x=3}, {x=-3}
> limit(2^(x/(9-x^2)),x=-3,left);
  infinity
> limit(2^(x/(9-x^2)),x=-3,right);
  0
> limit(2^(x/(9-x^2)),x=3,left);
  infinity
> limit(2^(x/(9-x^2)),x=3,right);
  0
```

Пример 2. $f(x)=\begin{cases} -1, & -\infty < x < 0, \\ 0, & x=0, \\ 1, & 0 < x < +\infty. \end{cases}$

Функция определена на всей числовой прямой, но при этом она не является непрерывной, так как $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x)=-1$, $f(0)=0$, т.е. правый и левый пределы в нуле не равны между собой и не равны значению функции в нуле, нарушены 2 и 3 условия непрерывности. Так как правый и левый пределы в нуле существуют и конечны, то это разрыв I рода.

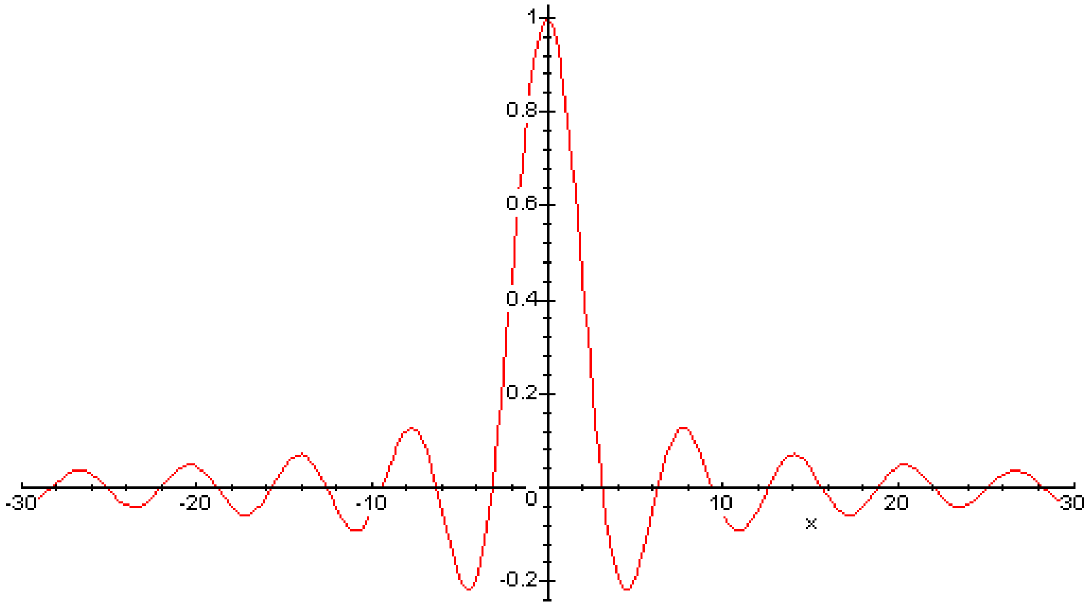
Пример 3. $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}.$

Функция неопределена в нуле, следовательно , $x=0$ – точка разрыва.

Так как $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ и $\lim\limits_{x\to 0-0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, то это устранимый разрыв, функцию можно в нуле доопределить “по непрерывности”, положив равной единице.

Пример решения и его графического представления с использованием Maple:

```
> readlib(singular): singular(sin(x)/x,x);
  {x=0}
> limit(sin(x)/x,x=0,left);
  1
> limit(sin(x)/x,x=0,right);
  1
> plot(sin(x)/x,x=-30..30);
```



ОГЛАВЛЕНИЕ

Ольга Юрьевна Агарева
Елена Викторовна Введенская
Константин Юрьевич Осипенко

ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ

Методические указания к пркт ическим занятиям по теме:
“MAPLE в курсе математического анализа”

Редактор М.А. Соколова
Подписано в печать 22.6.99. Объем 1,0 п.л.
Тираж 75 экз. Заказ

Ротапринт МАТИ-РГТУ, Берниковская наб., 14
