УДК 517.51

О НАИЛУЧШЕМ ВЫБОРЕ ИНФОРМАЦИИ В ЗАДАЧЕ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ ПО СПЕКТРУ

Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко

В работе рассматривается следующая задача. Пусть имеется возможность измерить (вообще говоря, приближенно) преобразование Фурье функции на конечном интервале заданной длины. Как по этой информации наилучшим образом восстановить саму функцию и ее производные и как наилучшим образом выбрать интервал? Перейдем к точным постановкам.

Положим

$$\mathcal{W}_2^r(\mathbb{R}) = \{\, x(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}) : x^{(r-1)}(\cdot) \in \mathrm{LAC}(\mathbb{R}),\ x^{(r)}(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}) \,\},$$

где r — натуральное число и $\mathrm{LAC}(\mathbb{R})$ — совокупность всех локально абсолютно непрерывных функций на $\mathbb{R}$. Это стандартное соболевское пространство функций $\mathbb{R}$. Обозначим через $W_2^r(\mathbb{R})$ соответствующий соболевский класс, т. е. совокупность функций $x(\cdot) \in \mathcal{W}_2^r(\mathbb{R})$, для которых $\|x^{(r)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \le 1$.

Пусть для каждой функции $x(\cdot) \in W_2^r(\mathbb{R})$ известно приближенно ее преобразование Фурье на интервале $\Delta_\sigma^a = (a-\sigma, a+\sigma)$, где $\sigma > 0$ и $a \in \mathbb{R}$, т. е. известна функция $y(\cdot) \in L_2(\Delta_\sigma^a)$ такая, что

$$\|Fx(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_2(\Delta_\sigma^a)} \le \delta, \quad \delta \ge 0.$$

Погрешность оптимального восстановления производной $x^{(k)}(\cdot)$, $0 \le k < r$ определяется следующим образом

$$E_\sigma^a(D^k, W_2^r(\mathbb{R}), \delta) = \inf_m \sup_{\substack{x(\cdot)\in W_2^r(\mathbb{R}),\ y(\cdot)\in L_2(\Delta_\sigma^a) \\ \|Fx(\cdot)-y(\cdot)\|_{L_2(\Delta_\sigma^a)}\le\delta}} \|x^{(k)}(\cdot) - m(y)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})},$$

где нижняя грань берется по всем отображениям (методам восстановления) $m\colon L_2(\Delta_\sigma^a) \to L_2(\mathbb{R})$. Метод, на котором достигается нижняя грань называется *оптимальным.* Нас интересует оптимальный выбор интервала длины 2σ, т. е. задача о нахождении величины

$$E_\sigma(D^k, W_2^r(\mathbb{R}), \delta) = \inf_{a\in\mathbb{R}} E_\sigma^a(D^k, W_2^r(\mathbb{R}), \delta).$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №07-01-90102, №06-01-00530, №08-01-00450) и Программы государственной поддержки ведущих научных школ Российской Федерации (НШ-3233.2008.1).

Покажем сначала, что если $0 \notin \Delta_\sigma^a$, то $E_\sigma^a(D^k, W_2^r(\mathbb{R}), \delta) = \infty$. Действительно, нетрудно показать (см., например, лемму 1 из [1]), что

$$E_\sigma^a(D^k, W_2^r(\mathbb{R}), \delta) \geq \sup_{\substack{x(\cdot)\in W_2^r(\mathbb{R}) \\ \|Fx(\cdot)\|_{L_2(\Delta_\sigma^a)}\leq\delta}} \|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}. \tag{1}$$

Пусть $a \leq -\sigma$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ рассмотрим функцию $\widehat{x}(\cdot)$ такую, что

$$F\widehat{x}(t) = \begin{cases} \sqrt{2\pi(2r+1)}\varepsilon^{-r-1/2}, & t \in (0,\varepsilon), \\ 0, & t \notin (0,\varepsilon). \end{cases}$$

Тогда, используя теорему Планшереля и свойства преобразования Фурье, будем иметь

$$\|\widehat{x}^{(r)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 = \frac{1}{2\pi}\|F\widehat{x}^{(r)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} t^{2r}|F\widehat{x}(t)|^2\,dt = 1.$$

Поскольку $F\widehat{x}(\cdot) = 0$ на $L_2(\Delta_\sigma^a)$, то из (1) следует, что

$$E_\sigma^a(D^k, W_2^r(\mathbb{R}), \delta) \geq \|\widehat{x}^{(k)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} t^{2k}|F\widehat{x}(t)|^2\,dt\right)^{1/2}$$
$$= \sqrt{\frac{2r+1}{2k+1}}\frac{1}{\varepsilon^{r-k}}.$$

В силу произвольности ε получаем

$$E_\sigma^a(D^k, W_2^r(\mathbb{R}), \delta) \geq \|\widehat{x}^{(k)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} = \infty.$$

Случай, когда $a \geq \sigma$ рассматривается аналогично.

Пусть теперь $|a| < \sigma$. Воспользуемся схемой построения оптимального метода и нахождения погрешности восстановления, изложенной в [2], но применительно к нашему случаю. Для этого надо рассмотреть экстремальную задачу

$$\|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 \to \max, \quad \|x^{(r)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 \leq 1, \quad \|Fx(\cdot)\|_{L_2(\Delta_\sigma^a)}^2 \leq \delta^2. \tag{2}$$

Далее следует найти такие $\widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2 \geq 0$, что значение задачи

$$\|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 \to \max, \quad \widehat{\lambda}_1\|x^{(r)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 + \widehat{\lambda}_2\|Fx(\cdot)\|_{L_2(\Delta_\sigma^a)}^2 \leq \widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2\delta^2$$

совпадает со значением задачи (2). Если при этом для любого $y(\cdot) \in L_2(\Delta_\sigma^a)$ существует функция $\widehat{x}_y(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$, являющаяся решением экстремальной задачи

$$\widehat{\lambda}_1\|x^{(r)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 + \widehat{\lambda}_2\|Fx(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_2(\Delta_\sigma^a)}^2 \to \min, \quad x(\cdot) \in \mathcal{W}_2^r(\mathbb{R}),$$

то метод

$$\widehat{m}(y)(\cdot) = \widehat{x}_y^{(k)}(\cdot)$$

является оптимальным, а сама погрешность оптимального восстановления равна $\sqrt{\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2\delta^2}$.

Согласно теореме Планшереля, задача (2) в образах Фурье запишется в виде

(3)
$$\int_{\mathbb{R}} \tau^{2k} u(\tau)\,d\tau \to \max, \quad \int_{\mathbb{R}} \tau^{2r} u(\tau)\,d\tau \le 1, \quad 2\pi \int_{\Delta_\sigma^a} u(\tau)\,d\tau \le \delta^2,$$

где $u(\cdot) = (2\pi)^{-1}|Fx(\cdot)|^2$. Нетрудно показать, что в этой задаче решение не существует, поэтому рассмотрим следующее ее расширение:

$$(4) \qquad \int_{\mathbb{R}} \tau^{2k}\,d\mu(\tau) \to \max, \quad \int_{\mathbb{R}} \tau^{2r}\,d\mu(\tau) \le 1, \quad 2\pi \int_{\Delta_\sigma^a} d\mu(\tau) \le \delta^2,$$

на множество всех неотрицательных мер $d\mu(\cdot)$ на прямой.

Функция Лагранжа для этой задачи имеет вид

$$\mathcal{L}(d\mu(\cdot), \lambda_1, \lambda_2) = \int_{\mathbb{R}} (-\tau^{2k} + \lambda_1 \tau^{2r} + 2\pi\lambda_2 \chi_\sigma^a(t))\,d\mu(\tau),$$

где $\chi_\sigma^a(\cdot)$ — характеристическая функция интервала Δ_σ^a. Достаточным условием для того, чтобы мера $d\widehat{\mu}(\cdot)$ являлась решением задачи (4) (см. [2]) является существование таких $\widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2 \ge 0$, для которых

$$(a) \qquad \min_{d\mu(\cdot)\ge 0} \mathcal{L}(d\mu(\cdot), \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) = \mathcal{L}(d\widehat{\mu}(\cdot), \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2),$$

$$(b) \quad \widehat{\lambda}_1 \left(\int_{\mathbb{R}} \tau^{2r}\,d\mu(\tau) - 1 \right) = 0, \quad \widehat{\lambda}_2 \left(2\pi \int_{\Delta_\sigma^a} d\mu(\tau) - \delta^2 \right) = 0.$$

При этом значение задачи (4) совпадает со значением задачи

(5)
$$\int_{\mathbb{R}} \tau^{2k}\,d\mu(\tau) \to \max, \quad \widehat{\lambda}_1 \int_{\mathbb{R}} \tau^{2r}\,d\mu(\tau) + \widehat{\lambda}_2 2\pi \int_{\Delta_\sigma^a} d\mu(\tau) \le \widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 \delta^2.$$

Пусть $0 < k < r$. Рассмотрим функцию, заданную параметрически

$$\begin{cases} y = \tau^{2k}, \\ x = \tau^{2r}. \end{cases}$$

Тогда $y = x^{k/r}$, $0 < k/r < 1$. Касательная к графику этой функцией в точке $(\tau_0^{2r}, \tau_0^{2k})$, $\tau_0 > 0$, имеет вид

$$y - \tau_0^{2k} = \frac{k}{r}\tau_0^{2k-2r}(x - \tau_0^{2r}).$$

Так как функция $y = x^{k/r}$ вогнута, то для всех точек ее графика имеет место неравенство

$$-y + \frac{k}{r}\tau_0^{2k-2r}x + \tau_0^{2k}\frac{r-k}{r} \ge 0.$$

Положим

$$\widehat{\lambda}_1 = \frac{k}{r}\tau_0^{2k-2r}, \quad \widehat{\lambda}_2 = \frac{1}{2\pi}\tau_0^{2k}\frac{r-k}{r}.$$

Тогда для всех τ
$$-\tau^{2k}+\widehat{\lambda}_1\tau^{2r}+2\pi\widehat{\lambda}_2\geq 0.$$
Нетрудно убедиться, что
$$-\tau^{2k}+\widehat{\lambda}_1\tau^{2r}\geq 0$$
при всех $|\tau|\geq\widehat{\sigma}$, где
$$\widehat{\sigma}=\widehat{\lambda}_1^{-\frac{1}{2(r-k)}}=\left(\frac{r}{k}\right)^{\frac{1}{2(r-k)}}\tau_0.$$

Предположим, что $\widehat{\sigma}\leq\sigma_a=\min(a-\sigma,a+\sigma)$. Тогда $\tau_0\in\Delta_\sigma^a$ и для всех $d\mu(\cdot)\geq 0$
$$\mathcal{L}(d\mu(\cdot),\widehat{\lambda}_1,\widehat{\lambda}_2)=\int_{\Delta_\sigma^a}(-\tau^{2k}+\widehat{\lambda}_1\tau^{2r}+2\pi\widehat{\lambda}_2)\,d\mu(\tau)+\\+\int_{\mathbb{R}\setminus\Delta_\sigma^a}(-\tau^{2k}+\widehat{\lambda}_1\tau^{2r})\,d\mu(\tau)\geq 0.$$
Рассмотрим меру, сосредоточенную в точке τ_0 (т. е. δ-функцию в этой точке):
$$d\widehat{\mu}(\tau)=A\delta(\tau-\tau_0)$$
и выберем A и τ_0 из условий:
$$\int_{\mathbb{R}}\tau^{2r}\,d\widehat{\mu}(\tau)=1,\quad 2\pi\int_{\Delta_\sigma^a}d\widehat{\mu}(\tau)=\delta^2. \tag{6}$$
Таким образом,
$$A=\frac{\delta^2}{2\pi},\quad \tau_0=\left(\frac{2\pi}{\delta^2}\right)^{\frac{1}{2r}}.$$
Кроме того, ясно, что $\mathcal{L}(d\widehat{\mu}(\cdot),\widehat{\lambda}_1,\widehat{\lambda}_2)=0$ (и тем самым это минимальное значение функции Лагранжа). Таким образом, условия (a) и (b) выполнены и для случая, когда
$$\sigma_a\geq\widehat{\sigma}=\left(\frac{r}{k}\right)^{\frac{1}{2(r-k)}}\tau_0=\left(\frac{r}{k}\right)^{\frac{1}{2(r-k)}}\left(\frac{2\pi}{\delta^2}\right)^{\frac{1}{2r}},$$
мера $\widehat{\mu}(\cdot)$ — решение задачи (4) и значение этой задачи совпадает со значением задачи (5).

Рассмотрим теперь случай, когда
$$\sigma_a<\widehat{\sigma}=\left(\frac{r}{k}\right)^{\frac{1}{2(r-k)}}\left(\frac{2\pi}{\delta^2}\right)^{\frac{1}{2r}}.$$
Прямая $y=\sigma_a^{2(k-r)}x$ проходит через точки $(0,0)$ и $(\sigma_a^{2k},\sigma_a^{2r})$. Найдем точку $\widehat{\tau}$ такую, что касательная к кривой $y=x^{k/r}$ в точке $x=\widehat{\tau}^{2r}$ параллельна прямой $y=\sigma_a^{2(k-r)}x$. Имеем
$$\frac{k}{r}(\widehat{\tau}^{2r})^{k/r-1}=\sigma_a^{2(k-r)}.$$

Отсюда

$$\widehat{\tau}=\left(\frac{k}{r}\right)^{\frac{1}{2(r-k)}}\sigma_a.$$

Тем самым уравнение касательной имеет вид

$$y=\widehat{\lambda}_1x+2\pi\widehat{\lambda}_2, \tag{7}$$

где

$$\widehat{\lambda}_1=\sigma_a^{2(k-r)},\quad \widehat{\lambda}_2=\frac{1}{2\pi}\frac{r-k}{r}\left(\frac{k}{r}\right)^{\frac{k}{r-k}}\sigma_a^{2k}.$$

В силу вогнутости кривой $y=x^{k/r}$ ее точки лежат не выше прямой (7) и тем самым для них выполняется неравенство

$$-y+\widehat{\lambda}_1x+2\pi\widehat{\lambda}_2\geq 0.$$

Кроме того, $-t^{2k}+\widehat{\lambda}_1t^{2r}\geq 0$ при $t\geq\sigma_a$. Таким образом, для всех $d\mu(\cdot)\geq 0$ имеем

$$\mathcal{L}(d\mu(\cdot),\widehat{\lambda}_1,\widehat{\lambda}_2)=\int_{\Delta_\sigma^a}(-\tau^{2k}+\widehat{\lambda}_1\tau^{2r}+2\pi\widehat{\lambda}_2)\,d\mu(\tau)+ \\ +\int_{\mathbb{R}\setminus\Delta_\sigma^a}(-\tau^{2k}+\widehat{\lambda}_1\tau^{2r})\,d\mu(\tau)\geq 0.$$

Положим теперь

$$d\widehat{\mu}(t)=A\delta(t-\widehat{\tau})+B\delta(t+\sigma_a\operatorname{sign}a),$$

где $A>0$ и $B>0$ определим из тех же условий (6). Имеем

$$A\widehat{\tau}^{2r}+B\sigma_a^{2r}=1,\quad A=\frac{\delta^2}{2\pi}.$$

Отсюда

$$B=\frac{1}{\sigma_a^{2r}}-\frac{\delta^2}{2\pi}\left(\frac{k}{r}\right)^{\frac{r}{r-k}}.$$

Легко убедиться, что из условия $\sigma_a<\widehat{\sigma}$ вытекает, что $B>0$. Остается заметить, что $\mathcal{L}(d\widehat{\mu}(\cdot),\widehat{\lambda}_1,\widehat{\lambda}_2)=0$. Следовательно, задача (4) решена при всех $\sigma>0$ и $0<a<\sigma$. И, кроме того, доказано, что ее значение совпадает со значением задачи (5).

Аппроксимируя (стандартным образом) меру, сосредоточенную в точке, δ-образной последовательностью, получаем, что значения задачи (3) и задачи

$$\int_{\mathbb{R}}\tau^{2k}u(\tau)\,d\tau\to\max,\quad \int_{\mathbb{R}}(\widehat{\lambda}_1\tau^{2r}+2\pi\widehat{\lambda}_2\chi_\sigma(\tau)u(\tau)\,d\tau\leq\widehat{\lambda}_1+\widehat{\lambda}_2\delta^2, \\ u(\cdot)\in L_1(\mathbb{R}),\quad u(\tau)\geq 0 \text{ почти всюду на } \mathbb{R},$$

совпадают.

Рассмотрим теперь для $y(\cdot)\in L_2(\Delta_\sigma^a)$ экстремальную задачу

$$\widehat{\lambda}_1\|x^{(r)}(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R})}+\widehat{\lambda}_2\|Fx(\cdot)-y(\cdot)\|^2_{L_2(\Delta_\sigma^a)}\to\min.$$

Переходя к преобразованию Фурье и используя теорему Планшереля, нетрудно получить решение этой задачи и построить оптимальный метод восстановления. При этом погрешность оптимального метода выражается равенством

$$E^a_\sigma(D^k, W^r_2(\mathbb{R}), \delta) = \sqrt{\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2\delta^2}.$$

Отсюда получаем, что

$$E^a_\sigma(D^k, W^r_2(\mathbb{R}), \delta) = \begin{cases} \sigma_a^k \sqrt{\dfrac{r-k}{2\pi r}\left(\dfrac{k}{r}\right)^{\frac{k}{r-k}}\delta^2 + \dfrac{1}{\sigma_a^{2r}}}, & \sigma_a < \widehat{\sigma}, \\ \left(\dfrac{\delta}{\sqrt{2\pi}}\right)^{1-k/r}, & \sigma_a \ge \widehat{\sigma}, \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что минимальное значение этой величины достигается при $a = 0$.

Рассмотрим теперь случай $k = 0$. Функция Лагранжа задачи (3) в этой ситуации имеет вид

$$\mathcal{L}(d\mu(\cdot), \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) = \int_{\Delta^a_\sigma} (-1 + \lambda_1\tau^{2r} + 2\pi\lambda_2)\, d\mu(\tau) + \\ + \int_{\mathbb{R}\setminus\Delta^a_\sigma} (-1 + \lambda_1\tau^{2r})\, d\mu(\tau).$$

Положим

$$\widehat{\lambda}_1 = \frac{1}{\sigma_a^{2r}}, \quad \widehat{\lambda}_2 = \frac{1}{2\pi}.$$

Для всех $d\mu(\cdot) \ge 0$ справедливо неравенство

$$\mathcal{L}(d\mu(\cdot), \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) = \widehat{\lambda}_1 \int_{\Delta^a_\sigma} \tau^{2r}\, d\mu(\tau) + \int_{\mathbb{R}\setminus\Delta^a_\sigma} \left(-1 + \left(\frac{\tau}{\sigma_a}\right)^{2r}\right) d\mu(\tau) \ge 0.$$

Для

$$d\widehat{\mu}(t) = \frac{\delta^2}{2\pi}\delta(t) + \frac{1}{\sigma_a^{2r}}\delta(t + \sigma_a \operatorname{sign} a)$$

выполняются условия

$$\int_{\mathbb{R}} \tau^{2r}\, d\widehat{\mu}(\tau) = 1, \quad 2\pi \int_{\Delta^a_\sigma} d\widehat{\mu}(\tau) = \delta^2,$$

а кроме того, $\mathcal{L}(\widehat{\mu}(\cdot), \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) = 0$. Рассуждая аналогично предыдущему, получаем, что

$$E^a_\sigma(D^0, W^r_2(\mathbb{R}), \delta) = \sqrt{\frac{\delta^2}{2\pi} + \frac{1}{\sigma_a^{2r}}}. \tag{8}$$

Минимальное значение этой величины также достигается при $a = 0$.

Тем самым доказана

Теорема 1. *Пусть* $r \in \mathbb{N}$, $0 < k < r$, $0 < \sigma < \infty$, $\delta > 0$ *и*

$$\widehat{\sigma} = \left(\frac{r}{k}\right)^{\frac{1}{2(r-k)}} \left(\frac{2\pi}{\delta^2}\right)^{\frac{1}{2r}}.$$

Тогда

$$E^{\sigma}(D^k, W_2^r(\mathbb{R}), \delta) = \begin{cases} \sigma^k \sqrt{\dfrac{r-k}{2\pi r}\left(\dfrac{k}{r}\right)^{\frac{k}{r-k}} \delta^2 + \dfrac{1}{\sigma^{2r}}}, & \sigma < \widehat{\sigma}, \\ \left(\dfrac{\delta}{\sqrt{2\pi}}\right)^{1-k/r}, & \sigma \geq \widehat{\sigma}. \end{cases}$$

Если $k = 0$, *то*

$$E_{\sigma}^{a}(D^0, W_2^r(\mathbb{R}), \delta) = \sqrt{\frac{\delta^2}{2\pi} + \frac{1}{\sigma_a^{2r}}}.$$

Из доказанного следует, что если приближенная информация о преобразовании Фурье задана на интервале $(a - \sigma, a + \sigma)$, то, во-первых, при $|a| \geq \sigma$ эта информация оказывается бесполезной, так как погрешность оптимального восстановления в этом случае равна ∞, а, во-вторых, если $|a| < \sigma$, то погрешность оптимального восстановления такая же, как для случая задания преобразования Фурье на интервале $(-\sigma_a, \sigma_a)$ (то есть часть информации оказывается лишней). Таким образом, наилучшим интервалом длины 2σ является симметричный интервал $(-\sigma, \sigma)$. Но и в этом случае, если $\sigma \geq \widehat{\sigma}$ его можно уменьшить до интервала $(-\widehat{\sigma}, \widehat{\sigma})$.

Список литературы

[1] *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление функций и их производных по коэффициентам Фурье, заданным с погрешностью. Матем. сб., **193**. №3. 79–100 (2002).

[2] *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление линейных операторов по неточной информации. Сб. трудов конференции “Выпуклый анализ". Владикавказ. 2008 (в печати).

Московский государственный институт радиотехники, электроники и автоматики (технический университет)

E-mail address: magaril@mirea.ru

“МАТИ” — Российский государственный технологический университет им. К. Э. Циолковского

E-mail address: kosipenko@yahoo.com