Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет
Кафедра общих проблем управления

Дипломная работа

"Оптимальное восстановление производной на классах, задаваемых дифференциальными полиномами"

Ахметьева Дарья Алексеевна
531 группа

Выполнена под руководством
д.ф.-м.н. проф. К. Ю. Осипенко

Москва 2011

1 Введение

Классическая теория аппроксимации берет свое начало с работ П.Л. Чебышева второй половины 19 века. При построении численного метода обычно используются те или иные (довольно естественные) идеи, а затем полученный алгоритм исследуется на сходимость, устойчивость по отношению к неточным данным и т.д. В шестидесятых годах 20 века возникла новая постановка - задача об оптимальном восстановлении линейного функционала или оператора на классе элементов по неточной или неполной информации. При решении этих задач применяется другой подход. Пользуясь некоторой априорной информацией о принадлежности восстанавливаемой функции некоторому классу элементов и перебирая все возможные отображения, находим наилучший (в некотором смысле) метод. Оказалось, что многие задачи теории приближений могут быть интерпретированы как задачи оптимального восстановления. Важную роль в построении оптимального метода восстановления играет нахождение погрешности оптимального восстановления. Оценка снизу погрешности восстановления демонстрирует связь классических неравенств с задачами оптимального восстановления. Неравенство Харди-Литтлвуда-Полиа [1] - точное неравенство вида

$$\|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_2(R)} \leqslant \|x(\cdot)\|_{L_2(R)}^{1-\frac{k}{n}} \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(R)}^{\frac{k}{n}},$$

справедливое для всех функций $x(\cdot)$ из соболевского пространства

$$\mathbb{W}_2^n(\mathbb{R}) = \{x(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}) : x^{(n-1)}(\cdot) \in LAC(\mathbb{R}), x^{(n)}(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})\},$$

где $LAC(\mathbb{R})$ - совокупность всех локально абсолютно непрерывных функций на прямой, а $k < n$ - натуральные числа. Точность неравенства означает, что для любых $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ значение задачи

$$\|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_2(R)} \to \max,\ \|x(\cdot)\|_{L_2(R)} \leqslant \delta_1,\ \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(R)} \leqslant \delta_2,$$

равно $\delta_1^{1-\frac{k}{n}} \delta_2^{\frac{k}{n}}$. Сформулированная выше задача тесно связана с задачей оптимального восстановления k-ой производной функции $x(\cdot) \in \mathbb{W}_2^n(\mathbb{R})$ по неточной информации о самой функции и ее n-ой производной. Оказывается, что погрешность оптимального восстановления в этом случае равна $\delta_1^{1-\frac{k}{n}} \delta_2^{\frac{k}{n}}$ и существует целое семейство методов оптимального восстановления k-ой производной. Далее сформулируем и рассмотрим подробнее частный случай этой задачи для соболевского класса функций, задаваемого дифференциальным полиномом.

2 Постановка задачи

Пусть $\widetilde{W}_2^P(\mathbb{R})$ - обобщенное соболевское пространство функций на прямой, задаваемое дифференциальным полиномом степени r

$$P(D) = D^r + a_1 D^{r-1} + \ldots + a_r,\ D = \frac{d}{dt},$$

т.е. $\widetilde{W}_2^P(\mathbb{R}) = \{x(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}) : x^{(r-1)}(\cdot) \in LAC(\mathbb{R}), P(D)x(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})\}$. Положим

$$W_2^P(\mathbb{R}) = \{x(\cdot) \in \widetilde{W}_2^P(\mathbb{R}) : \|P(D)x(\cdot)\|_{L_2} \leqslant 1\}.$$

Рассмотрим задачу об оптимальном восстановлении дифференциального полинома Q порядка $1 \leqslant k < r$ на обобщенном соболевском классе $W_2^P(\mathbb{R})$ по неточно заданному преобразованию Фурье (с погрешностью δ в метрике $L_2(\mathbb{R})$). В качестве методов восстановления $m(y)$ рассмотрим отображения $m : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$. Погрешность метода восстановления определяется равенством

$$e(Q, W_2^P(\mathbb{R}), \delta, m) = \sup_{\substack{x \in W_2^P(\mathbb{R}), y \in L_2(\mathbb{R}) \\ \|Fx(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_2} \leqslant \delta}} \|Q(D)(x) - m(y)\|_{L_2}.$$

Тогда погрешностью *оптимального* восстановления назовем следующую величину

$$E(Q, W_2^P(\mathbb{R}), \delta) = \inf_{m : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})} e(Q, W_2^P(\mathbb{R}), \delta, m),$$

а метод, на котором достигается нижняя грань, назовем *оптимальным*. Из общих результатах о восстановлении операторов вытекает, что:

$$E(Q, W_2^P(\mathbb{R}), \delta) \geqslant \sup_{x \in W_2^P(\mathbb{R}), \|Fx(\cdot)\|_{L_2}} \|Q(D)(x)\|_{L_2}.$$

Рассмотрим случай:

$$P(D) = D^2 + pD + q,\ p, q \in \mathbb{R}, Q(D) = D.$$

Тогда экстремальная задача, появляющаяся в оценке снизу (удобнее рассмотреть ее квадрат), имеет вид:

$$\begin{cases} \|x'(\cdot)\|_{L_2}^2 \to \max, \\ \|(D^2 + pD + q)x(\cdot)\|_{L_2}^2 \leqslant 1, \\ \|Fx(\cdot)\|_{L_2}^2 \leqslant \delta^2. \end{cases} \tag{1}$$

При решении данной экстремальной задачи удобно пользоваться результатом леммы сформулированной ниже. Пусть $f_i(\cdot)$, $i = 0, 1, \ldots, n$, - вещественные функции, заданные на некотором множестве X . Рассмотрим задачу:

$$f_0(x) \to \max,\ f_i(x) \leqslant 0,\ i = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

Функция Лагранжа этой задачи имеет вид:

$$L(x, \lambda) = -f_0(x) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(x),\ \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

Лемма. Пусть существуют $\widehat{\lambda}_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, n$ и допустимый в задаче (2) элемент $\widehat{x}$ такие, что

1. $\min\limits_{x \in X} L(x, \widehat{\lambda}) = L(\widehat{x}, \widehat{\lambda})$, $\widehat{\lambda} = (\widehat{\lambda}_1, \ldots, \widehat{\lambda}_n)$,

2. $\widehat{\lambda}_i f_i(\widehat{x}) = 0$, $i = 1, \ldots, n$.

Тогда элемент $\widehat{x}$ - решение задачи (2).

Доказательство.

Рассмотрим допустимый в задаче (2) элемент $x \in X$. Тогда используя условия 1-2 получим:

$$-f_0(x) \geqslant -f_0(x) + \sum_{i=1}^{n} \widehat{\lambda}_i f_i(x) = L(x, \widehat{\lambda}) \geqslant L(\widehat{x}, \widehat{\lambda}) = -f_0(\widehat{x}) + \sum_{i=1}^{n} \widehat{\lambda}_i f_i(\widehat{x}) = -f_0(\widehat{x})$$

Таким образом, $f_0(x) \leqslant f_0(\widehat{x})$, т.е. элемент $\widehat{x}$ - решение задачи (2).

Лемма доказана.

Решение экстремальной задачи (1) сформулируем в виде теоремы.

Теорема 1. Значение задачи (1) равно $\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 \frac{\delta^2}{2\pi}$, где $\widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2$ определяются в зависимости от параметров следующим образом:

1. если $pq^2 - \frac{p^4}{4} < 0$, $q - \frac{p^2}{2} > 0$
   $\widehat{\lambda}_1 = \frac{1}{\sqrt{p^4 - 4p^2 q}}$,
   $\widehat{\lambda}_2 = \frac{2q - p^2}{2} + \frac{\sqrt{p^4 - 4p^2 q}}{2}$;

2. если $pq^2 - \frac{p^4}{4} > 0$
   $\widehat{\lambda}_1 = \frac{\delta}{\sqrt{p^4\delta^2 - 4p^2 q\delta^2 + 8\pi}}$,
   $$\widehat{\lambda}_2 = \begin{cases} \frac{2q - p^2}{2} + \frac{\sqrt{p^4\delta^2 - 4p^2 q\delta^2 + 8\pi}}{\delta} - \frac{2\pi}{\delta\sqrt{p^4\delta^2 - 4p^2 q\delta^2 + 8\pi}}, \text{при } \frac{2\pi}{\delta^2} \geqslant p^2 q; \\ 0, \text{иначе.} \end{cases}$$

3. если $pq^2 - \frac{p^4}{4} < 0$, $q - \frac{p^2}{2} < 0$
$\widehat{\lambda}_1 = \frac{\delta}{\sqrt{p^4\delta^2 - 4p^2q\delta^2 + 8\pi}}$,
$\widehat{\lambda}_2 = \begin{cases} \frac{2q-p^2}{2} + \frac{\sqrt{p^4\delta^2-4p^2q\delta^2+8\pi}}{\delta} - \frac{2\pi}{\delta\sqrt{p^4\delta^2-4p^2q\delta^2+8\pi}}, \text{при } \frac{2\pi}{\delta^2} \geqslant 4q^2 - p^2q; \\ 0, \text{иначе.} \end{cases}$

Доказательство:
Экстремальная задача в образах Фурье имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int\limits_{\mathbb{R}} \xi^2 |Fx(\xi)|^2 d\xi \to \max, \\ \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int\limits_{\mathbb{R}} |(i\xi)^2 + ip\xi + q|^2 |Fx(\xi)|^2 d\xi \leqslant 1, \\ \displaystyle\int\limits_{\mathbb{R}} |Fx(\xi)|^2 d\xi \leqslant \delta^2. \end{cases}$$

Эта задача не имеет решения, поэтому переходим к расширенной задаче, рассматривая вместо $\frac{|Fx(\xi)|^2}{2\pi}d\xi$ произвольную положительную меру $d\mu(\xi)$. Имеем:

$$\begin{cases} \displaystyle\int\limits_{\mathbb{R}} \xi^2 d\mu(\xi) \to \max, \\ \displaystyle\int\limits_{\mathbb{R}} |(i\xi)^2 + ip\xi + q|^2 d\mu(\xi) \leqslant 1, \\ \displaystyle\int\limits_{\mathbb{R}} d\mu(\xi) \leqslant \dfrac{\delta^2}{2\pi}. \end{cases} \tag{3}$$

Рассмотрим функцию Лагранжа:

$$L(d\mu(\cdot), \lambda_1, \lambda_2) = \int\limits_{\mathbb{R}} [-\xi^2 + \lambda_2 + \lambda_1(\xi^4 + \xi^2(p^2 - 2q) + q^2)] d\mu(\xi).$$

В силу доказанной выше леммы для нахождения решения задачи (3) достаточно найти такую допустимую меру $d\widehat{\mu}(\xi)$ и неотрицательные числа $\widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2$, чтобы выполнялись условия:

1. $\min\limits_{d\mu \geqslant 0} L(d\mu(\xi), \widehat{\lambda}) = L(d\widehat{\mu}(\xi), \widehat{\lambda})$, $\widehat{\lambda} = (\widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2)$;

2. $\widehat{\lambda}_1\left(\int\limits_{\mathbb{R}}|(i\xi)^2+ip\xi+q|^2d\widehat{\mu}(\xi)-1\right)=0, \widehat{\lambda}_2\left(\int\limits_{\mathbb{R}}d\widehat{\mu}(\xi)-\frac{\delta^2}{2\pi}\right)=0.$

Пусть

$$\begin{cases} y=\xi^2, \\ x=\xi^4+\xi^2(p^2-2q)+q^2. \end{cases} \tag{4}$$

Рассмотрим касательную к данной кривой в точке (x_0, y_0), где

$$y_0=\frac{2q-p^2+\sqrt{p^4-4p^2q+4x_0}}{2}.$$

Уравнение касательной имеет вид:

$$y-y_0=\frac{1}{\sqrt{p^4-4p^2q+4x}}(x-x_0)\,\text{или}\,y=\lambda_2+\lambda_1 x,$$

$$\text{где}\ \lambda_1=\frac{1}{\sqrt{p^4-4p^2q+4x_0}},\ \lambda_2=y_0-\frac{x_0}{\sqrt{p^4-4p^2q+4x_0}}.$$

В силу параметризации $x\geqslant 0, y\geqslant 0$, а для выполнения леммы необходимо выполнение условия неотрицательности λ_1, λ_2 . Проверим выполнение этих условий при различных значениях параметров. Рассмотрим случаи:

1. $pq^2-\frac{p^4}{4}<0,\ q-\frac{p^2}{2}>0;$

2. $pq^2-\frac{p^4}{4}>0;$

3. $pq^2-\frac{p^4}{4}<0,\ q-\frac{p^2}{2}<0.$

В условиях случая 1) исследуемая кривая (4) пересекает ось ординат выше нуля, следовательно, все касательные пересекают ось ординат выше нуля, что и соответствует тому, что $\lambda_2>0$. Итак, при $x\geqslant 0$ выполнены неравенства $y>0,\ \lambda_1>0,\ \lambda_2>0$. Тогда положим $\widehat{\lambda}_1=\lambda_1,\ \widehat{\lambda}_2=\lambda_2$, а x_0 определим позднее.

В условиях случая 2) необходимо найти точку x^*, такую что касательная к кривой (4), проведенная в этой точке проходит через начало координат. Иными словами, точка x^*, удовлетворяет условию $y'(x^*)x^*=y^*$.

В силу параметризации имеем $x^*=(y^*)^2+y^*(p^2-2q)+q^2$. Тогда решением уравнения $y'(x^*)x^*=y^*$ является $(y^*)^2=q^2$. Тогда $4x^*=p^2q$, т.к. только оно удовлетворяет всем необходимым условиям, т.е. условиям рассматриваемого случая, уравнению $y'(x^*)x^*=y^*$ и

$$\frac{2q-p^2+\sqrt{p^4-4p^2q+4x^*}}{2}=\frac{x^*}{\sqrt{p^4-4p^2q+4x^*}}.$$

Таким образом, в условиях случая 2) при $4x^* \geqslant p^2 q$ выполнены неравенства $y > 0$, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$. Тогда положим

$$\widehat{\lambda}_1 = \lambda_1,$$

$$\widehat{\lambda}_2 = \begin{cases} \lambda_2, \text{при } x \geqslant p^2 q; \\ 0, \text{иначе}. \end{cases}$$

В условиях случая 3), аналогично, необходимо найти точку x^*, такую что касательная к кривой (4), проведенная в этой точке проходит через начало координат. Тогда $x^* = 4q - p^2 q$, так как только оно удовлетворяет всем необходимым условиям. Таким образом, в условиях случая 3) при $x \geqslant 4q - p^2 q$ выполнены неравенства $y > 0$, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$. Тогда положим

$$\widehat{\lambda}_1 = \lambda_1,$$

$$\widehat{\lambda}_2 = \begin{cases} \lambda_2, x \geqslant 4q^2 - p^2 q, \\ 0, \text{иначе}. \end{cases}$$

Итак, для всевозможных значений параметров найдены $\widehat{\lambda}_1 \geqslant 0$, $\widehat{\lambda}_2 \geqslant 0$. Теперь найдём $d\widehat{\mu}(\xi)$, удовлетворяющее условиям 1 и 2.

Положим $d\widehat{\mu}(\xi) = A\delta(\xi - \xi_0)$, где $\delta(\cdot)$ – дельта-функция. Тогда из равенств

$$\int\limits_{\mathbb{R}} d\widehat{\mu}(\xi) = \frac{\delta^2}{2\pi},$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \left(\xi^4 + \xi^2 \left(p^2 - 2q\right) + q^2\right) d\widehat{\mu}(\xi) = 1,$$

получим условия на ξ_0 и A:

$$A = \frac{\delta^2}{2\pi}, \quad \left(\xi_0^4 + \xi_0^2 \left(p^2 - 2q\right) + q^2\right) = \frac{2\pi}{\delta^2}.$$

В наших обозначениях $x = (\xi^4 + \xi^2 (p^2 - 2q) + q^2)$, поэтому условия на $\widehat{\lambda}_1$, $\widehat{\lambda}_2$ переписываются в виде:

1. Если $qp^2 - \frac{p^4}{4} < 0$, $q - \frac{p^2}{2} > 0$:

$$\widehat{\lambda}_1 = \frac{1}{\sqrt{p^4 - 4p^2 q}},$$

$$\widehat{\lambda}_2 = \frac{2q - p^2 + \sqrt{p^4 - 4p^2 q}}{2}.$$

2. Если $qp^2 - \frac{p^4}{4} > 0$:

$$\widehat{\lambda}_1 = \frac{\delta}{\sqrt{p^4\delta^2 - 4p^2q\delta^2 + 8\pi}},$$

$$\widehat{\lambda}_2 = \begin{cases} \frac{2q-p^2}{2} + \frac{\sqrt{p^4\delta^2-4p^2q\delta^2+8\pi}}{\delta} - \frac{2\pi}{\delta\sqrt{p^4\delta^2-4p^2q\delta^2+8\pi}}, \text{при } \frac{2\pi}{\delta^2} \geqslant p^2q; \\ 0, \text{иначе.} \end{cases}$$

3. Если $qp^2 - \frac{p^4}{4} < 0$, $q - \frac{p^2}{2} < 0$:

$$\widehat{\lambda}_1 = \frac{\delta}{\sqrt{p^4\delta^2 - 4p^2q\delta^2 + 8\pi}},$$

$$\widehat{\lambda}_2 = \begin{cases} \frac{2q-p^2}{2} + \frac{\sqrt{p^4\delta^2-4p^2q\delta^2+8\pi}}{\delta} - \frac{2\pi}{\delta\sqrt{p^4\delta^2-4p^2q\delta^2+8\pi}}, \text{при } \frac{2\pi}{\delta^2} \geqslant 4q^2 - p^2q; \\ 0, \text{иначе.} \end{cases}$$

Тогда неравенство

$$-\xi^2 + \widehat{\lambda}_2 + \widehat{\lambda}_1 \left(\xi^4 + \xi^2 \left(p^2 - 2q\right) + q^2\right) \geqslant 0$$

выполнено $\forall \xi \in \mathbb{R}$.

Теперь в условиях случая 1) $\min\limits_{d\mu \geqslant 0} L\left(d\mu(\xi), \widehat{\lambda}\right) = L\left(d\widehat{\mu}(\xi), \widehat{\lambda}\right)$. Аналогичные равенства выполняются при $\frac{2\pi}{\delta^2} \geqslant p^2q$ в условиях случая 2) и при $\frac{2\pi}{\delta^2} \geqslant 4q^2 - p^2q$ в условиях случая 3). Если $\frac{2\pi}{\delta^2} < p^2q$ в условиях случая 2) или $\frac{2\pi}{\delta^2} < 4q^2 - p^2q$ в условиях случая 3), то положим

$$A = \frac{1}{\left(\xi_0^4 + \xi_0^2 \left(p^2 - 2q\right) + q^2\right)}.$$

Найдём ξ_0 из

$$\left(\xi_0^4 + \xi_0^2 \left(p^2 - 2q\right) + q^2\right) = p^2q$$

в условиях случая 2) и из

$$\left(\xi_0^4 + \xi_0^2 \left(p^2 - 2q\right) + q^2\right) = 4q^2 - p^2q$$

в условиях случая 3).

Тогда условие $\min\limits_{d\mu \geqslant 0} L\left(d\mu(\xi), \widehat{\lambda}\right) = L\left(d\widehat{\mu}(\xi), \widehat{\lambda}\right)$ выполняется во всех рассматриваемых случаях. Таким образом, найденная нами мера $d\widehat{\mu}(\xi)$

является решением задачи (3). Заметим, что $L(d\widehat{\mu}(\xi),\widehat{\lambda}) = 0$, следовательно, имеем:

$$\sup_{d\mu\geqslant 0}\int\limits_{\mathbb{R}} \xi^2\, d\mu(\xi) = -L(d\widehat{\mu}(\xi),\widehat{\lambda}) + \widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2\frac{\delta^2}{2\pi} = \widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2\frac{\delta^2}{2\pi}.$$

Аппроксимируя меру, сосредоточенную в точке δ-образной последовательностью, получаем, что значение задачи (3) совпадает со значением задачи (2) и равны $\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2\frac{\delta^2}{2\pi}$.

Теорема доказана.

Погрешность оптимального метода восстановления не меньше $\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2\frac{\delta^2}{2\pi}$. Теперь проведём оценку сверху погрешности восстановления для семейства методов

$$m(y)(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} i\xi a(\xi) y(\xi) e^{i\xi t}\, d\xi, \tag{5}$$

и покажем, что она совпадает с оценкой снизу. Этот результат также сформулируем в виде теоремы.

Теорема 2.(оптимальный метод восстановления)

Методы $m(y)(\cdot)$, имеющие вид (5), где $a(\xi)$ удовлетворяет условию:

$$\xi^2\left(\frac{|a(\xi)|^2}{\widehat{\lambda}_2} + \frac{|1-a(\xi)|^2}{\widehat{\lambda}_1|-\xi^2+ip\xi+q|^2}\right) \leqslant 1, \tag{6}$$

если $\widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2 > 0$ и $a(\xi) \equiv 0$, если $\widehat{\lambda}_2 = 0$, являются оптимальными для задачи (2).

Доказательство.

Оценим сверху погрешность методов восстановления (5). Имеем:

$$e(D, W_2^P(\mathbb{R}), \delta, m) = \sup_{\substack{x\in W_2^P(\mathbb{R}),\, y\in L_2(\mathbb{R})\\ \|Fx(\cdot)-y(\cdot)\|_{L_2}\leqslant\delta}} \|x'(\cdot) - m(y)\|_{L_2}.$$

Переходя к образам Фурье, приходим к следующей задаче:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int\limits_{\mathbb{R}} \xi^2\left|Fx(\xi) - a(\xi)y(\xi)\right|^2\, d\xi \to \max, \\ \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int\limits_{\mathbb{R}} \left(\xi^4 + \xi^2\left(p^2 - 2q\right) + q^2\right)\left|Fx(\xi)\right|^2\, d\xi \leqslant 1, \\ \displaystyle\int\limits_{\mathbb{R}} \left|Fx(\xi) - y(\xi)\right|^2\, d\xi \leqslant \delta^2. \end{cases} \tag{7}$$

Эта задача, после введения обозначения $z(\cdot) = Fx(\cdot) - y(\cdot)$, переписывается в виде

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \xi^2 \left| a(\xi) z(\xi) + (1 - a(\xi)) Fx(\xi) \right|^2 \, d\xi \to \max, \\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \left| z(\xi) \right|^2 \, d\xi \leqslant \delta^2, \\ \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \left(\xi^4 + \xi^2 \left(p^2 - 2q \right) + q^2 \right) \left| Fx(\xi) \right|^2 \, d\xi \leqslant 1. \end{cases}$$

При $\widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2 > 0$ по неравенству Коши-Буняковского, имеем:

$$\begin{gathered} \left| a(\xi) z(\xi) + (1 - a(\xi)) Fx(\xi) \right|^2 \leqslant \\ \leqslant \left(\frac{|a(\xi)|^2}{\widehat{\lambda}_2} + \frac{|1 - a(\xi)|^2}{\widehat{\lambda}_1 | - \xi^2 + ip\xi + q|^2} \right) \left(\widehat{\lambda}_2 |z(\xi)|^2 + \widehat{\lambda}_1 | - \xi^2 + ip\xi + q|^2 |Fx(\xi)|^2 \right). \end{gathered}$$

Следовательно,

$$e^2 \left(D, W_2^P(\mathbb{R}), \delta, m \right) \leqslant \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \xi^2 \left(\frac{|a(\xi)|^2}{\widehat{\lambda}_2} + \frac{|1 - a(\xi)|^2}{\widehat{\lambda}_1 | - \xi^2 + ip\xi + q|^2} \right) \left(\widehat{\lambda}_2 \frac{\delta^2}{2\pi} + \widehat{\lambda}_1 \right).$$

Значит, для всех $a(\cdot)$, для которых выполнено

$$\xi^2 \left(\frac{|a(\xi)|^2}{\widehat{\lambda}_2} + \frac{|1 - a(\xi)|^2}{\widehat{\lambda}_1 | - \xi^2 + ip\xi + q|^2} \right) \leqslant 1,$$

оценка снизу совпадает с оценкой сверху, и, следовательно, соответствующие методы являются оптимальными. Полученное неравенство эквивалентно условию

$$\begin{gathered} \left| a(\xi) - \frac{\widehat{\lambda}_2}{\widehat{\lambda}_2 + \widehat{\lambda}_1 | - \xi^2 + ip\xi + q|^2} \right| \leqslant \\ \leqslant \frac{\sqrt{\widehat{\lambda}_1 \widehat{\lambda}_2} \, |-\xi^2 + ip\xi + q| \sqrt{-\xi^2 + \widehat{\lambda}_2 + \widehat{\lambda}_1 | - \xi^2 + ip\xi + q|^2}}{\widehat{\lambda}_2 + \widehat{\lambda}_1 | - \xi^2 + ip\xi + q|^2}. \end{gathered}$$

Заметим, что подкоренное выражение $-\xi^2 + \widehat{\lambda}_2 + \widehat{\lambda}_1 | - \xi^2 + ip\xi + q|^2$ неотрицательно в силу выбора $\widehat{\lambda}_1$, $\widehat{\lambda}_2$ из теоремы 1.

Если $\widehat{\lambda}_2 = 0$, положим $a(\xi) \equiv 0$. Имеем:

$$\xi^2 |Fx(\xi)|^2 = \frac{\xi^2}{\widehat{\lambda}_1 | -\xi^2 + ip\xi + q|^2} \widehat{\lambda}_1 | -\xi^2 + ip\xi + q|^2 |Fx(\xi)|^2.$$

Следовательно, $e^2(D, W_2^P(\mathbb{R}), \delta, m) \leqslant \widehat{\lambda}_1$, т.к. $\widehat{\lambda}_1$ выбрано так, что

$$\xi^2 \leqslant \widehat{\lambda}_1 | -\xi^2 + ip\xi + q|^2.$$

Оценка снизу совпадает с оценкой сверху, следовательно, методы являются оптимальными.

Теорема доказана.

3 Роль фильтра

Ограниченная функция $a(\xi)$ играет роль фильтра для полученного семейства оптимальных методов

$$m(y)(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} i\xi a(\xi) y(\xi) e^{i\xi t}\, d\xi.$$

При $a(\xi) \equiv 1$ оптимальный метод имеет вид

$$m(y)(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} i\xi(\xi) e^{i\xi t}\, d\xi.$$

Положив $a(\xi) \equiv 1$, применим этот фильтр к полученному условию (6) и в результате имеем:

$$\xi^2 \left(\frac{1}{\widehat{\lambda}_2} \right) \leqslant 1.$$

Можно сделать вывод о том, что применять фильтр $a(\xi) \equiv 1$ можно при $\xi \in \left[-\sqrt{\widehat{\lambda}_2}; \sqrt{\widehat{\lambda}_2} \right]$, где $\widehat{\lambda}_2$ определяется в соответствии со значениями параметров p, q, как показано в теореме 1.

При $a(\xi) \equiv 0$ оптимальный метод имеет вид

$$m(y)(t) \equiv 0$$

Положив $a(\xi) \equiv 0$, применяем этот фильтр к полученному условию (6) и получим:

$$\xi^2 \left(\frac{1}{\widehat{\lambda}_1 | -\xi^2 + ip\xi + q|^2} \right) \leqslant 1$$

Это приведёт нас к неравенству

$$\widehat{\lambda}_1\xi^4 + \xi^2\widehat{\lambda}_1\left(p^2 - 2q\right) - \xi^2 + q^2 \geqslant 0. \tag{8}$$

Произведя замену $\widetilde{\xi} = \xi^2$, получим

$$\widehat{\lambda}_1\widetilde{\xi}^2 + \widetilde{\xi}\left(\widehat{\lambda}_1 p^2 - 2\widehat{\lambda}_1 q - 1\right) + q^2 \geqslant 0.$$

Вычислим дискриминант полученного квадратного трёхчлена:

$$D = \widehat{\lambda}_1^2 p^4 + 1 - 4\widehat{\lambda}_1^2 q p^2 + 4\widehat{\lambda}_1 q - 2\widehat{\lambda}_1 p^2.$$

Так как известно, что $\widehat{\lambda}_1 > 0$, при $D < 0$ неравенство (8) выполняется $\forall \xi \in \mathbb{R}$, а при $D > 0$ выполнено при

$$\xi \in \left(-\infty; -\sqrt{\widetilde{\xi}_2}\right] \cup \left[-\sqrt{\widetilde{\xi}_1}; \sqrt{\widetilde{\xi}_1}\right] \cup \left[\sqrt{\widetilde{\xi}_2}; +\infty\right),$$

где

$$\widetilde{\xi}_1 = \frac{1 + 2\widehat{\lambda}_1 q - \widehat{\lambda}_1 p^2 - \sqrt{D}}{2\widehat{\lambda}_1} \text{ и } \widetilde{\xi}_2 = \frac{1 + 2\widehat{\lambda}_1 q - \widehat{\lambda}_1 p^2 + \sqrt{D}}{2\widehat{\lambda}_1}.$$

Рассмотрим неравенство

$$\widehat{\lambda}_1^2 p^4 + 1 - 4\widehat{\lambda}_1^2 q p^2 + 4\widehat{\lambda}_1 q - 2\widehat{\lambda}_1 p^2 > 0.$$

Оно выполняется при $\widehat{\lambda}_1$, определённом в соответствии со значениями параметров p, q, как показано в теореме 1.

1. $$\begin{cases} qp^2 - \dfrac{p^4}{4} > 0, \\ q - \dfrac{p^2}{2} > 0; \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} qp^2 - \dfrac{p^4}{4} < 0, \\ q - \dfrac{p^2}{2} < 0, \\ q < 0; \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} qp^2 - \dfrac{p^4}{4} > 0, \\ q - \dfrac{p^2}{2} < 0; \end{cases}$$

4.
$$\begin{cases} qp^2 - \dfrac{p^4}{4} < 0, \\ q - \dfrac{p^2}{2} > 0, \\ q > 0; \end{cases}$$

Во всех вышеперечисленных случаях фильтр $a(\xi) \equiv 0$ можно применять при
$$\xi \in \left(-\infty; -\sqrt{\widetilde{\xi}_2}\right] \cup \left[-\sqrt{\widetilde{\xi}_1}; \sqrt{\widetilde{\xi}_1}\right] \cup \left[\sqrt{\widetilde{\xi}_2}; +\infty\right),$$
где
$$\widetilde{\xi}_1 = \frac{1 + 2\widehat{\lambda}_1 q - \widehat{\lambda}_1 p^2 - \sqrt{D}}{2\widehat{\lambda}_1} \text{ и } \widetilde{\xi}_2 = \frac{1 + 2\widehat{\lambda}_1 q - \widehat{\lambda}_1 p^2 + \sqrt{D}}{2\widehat{\lambda}_1}.$$

Неравенство не выполняется при $\widehat{\lambda}_1$, определённом в соответствии со значениями параметров p, q, как показано в теореме 1 условиях:

1.
$$\begin{cases} qp^2 - \dfrac{p^4}{4} < 0, \\ q - \dfrac{p^2}{2} < 0, \\ q > 0; \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} qp^2 - \dfrac{p^4}{4} < 0, \\ q - \dfrac{p^2}{2} > 0, \\ q < 0; \end{cases}$$

В этих случаях фильтр $a(\xi) \equiv 0$ можно применять при $\forall \xi \in \mathbb{R}$.

Из вышесказанного можно сделать вывод, что нетривиальные фильтры для семейства оптимальных методов рационально применять только когда $\xi^2 \in \left[\widetilde{\xi}_1; \widetilde{\xi}_2\right]$.

Список литературы

[1] *Micchelli C. A., Rivlin T. J.* A survey of optimal recovery. In: Optimal Estimation in Approximation Theory (C. A. Micchelli and T. J. Rivlin, Eds.). P. 1–54. New York: Plenum Press, 1977.

[2] *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных // Функц. анализ и его прил., 2003. С. 51–64.

[3] *Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М.* О неравенствах для производных колмогоровского типа // Матем. сб. 1997. Т. 188. №12. С. 73–106.