ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2011, том 438, № 3, с. 300–302

МАТЕМАТИКА

УДК 517.51

НЕРАВЕНСТВО ХАРДИ–ЛИТТЛВУДА–ПОЛИА И ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНЫХ ПО НЕТОЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ

© 2011 г. Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко

Представлено академиком В.А. Ильиным 29.12.2010 г.

Поступило 26.01.2011 г.

Неравенство Харди–Литтлвуда–Полиа [1] – это точное неравенство вида

$$\|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \le \|x(\cdot)\|^{1-k/n}_{L_2(\mathbb{R})}\|x^{(n)}(\cdot)\|^{k/n}_{L_2(\mathbb{R})}, \qquad (1)$$

справедливое для всех функций $x(\cdot)$ из соболевского пространства $\mathcal{W}^n_2(\mathbb{R}) = \{x(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}) | x^{(n-1)}(\cdot)$ локально абсолютно непрерывные, $x^{(n)}(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})\}$, где k, n – натуральные и $k < n$.

Точность неравенства (1) означает, в частности, что для любых $\delta_1 > 0$ и $\delta_2 > 0$ значение задачи (т.е. величина верхней грани максимизируемого функционала)

$$\|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \to \max, \quad \|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \le \delta_1, \quad \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \le \delta_2 \qquad (2)$$

равно $\delta_1^{1-k/n}\delta_2^{k/n}$.

Задача (2) тесно связана с задачей оптимального восстановления k-й производной функции $x(\cdot) \in \mathcal{W}^n_2(\mathbb{R})$ по приближенной информации о самой функции и ее n-й производной. Допустим, что нам известны (мы наблюдаем) функции $y_1(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$ и $y_2(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$, такие что $\|x(\cdot) - y_1(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \le \delta_1$ и $\|x^{(n)}(\cdot) - y_2(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \le \delta_2$. Задача оптимального восстановления заключается в нахождении величины

$$E(D^k, \mathcal{W}^n_2(\mathbb{R}), \delta_1, \delta_2) = \inf_m \sup_{\substack{x(\cdot) \in \mathcal{W}^n_2(\mathbb{R}),\\ y_i(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}),\, i = 1, 2\\ \|x(\cdot) - y_1(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \le \delta_1,\\ \|x^{(n)}(\cdot) - y_2(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \le \delta_2,}} \|x^{(k)}(\cdot) - m(y_1(\cdot), y_2(\cdot))(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}, \qquad (3)$$

где нижняя грань берется по всем отображениям $m: L_2(\mathbb{R}) \times L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$, называемой погрешностью оптимального восстановления, и тех m, на которых нижняя грань достигается, называемых оптимальными методами восстановления.

Оказывается, что погрешность оптимального восстановления совпадает со значением задачи (2) и существуют целые семейства оптимальных методов восстановления k-й производной. Точнее говоря, справедлива следующая

Теорема. *Пусть k, n – натуральные, $k < n$, $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ и*

$$\lambda_1 = \frac{n-k}{n}\left(\frac{\delta_1}{\delta_2}\right)^{-2k/n}, \quad \lambda_2 = \frac{k}{n}\left(\frac{\delta_1}{\delta_2}\right)^{2(n-k)/n}.$$

Тогда

$$E(D^k, \mathcal{W}^n_2(\mathbb{R}), \delta_1, \delta_2) = \delta_1^{1-k/n}\delta_2^{k/n},$$

и если функция $a(\cdot)$ на $\mathbb{R}$ такова, что для п.в. $\xi \in \mathbb{R}$

$$\left|a(\xi) - \frac{\lambda_1(i\xi)^k}{\lambda_1 + \lambda_2\xi^{2n}}\right| \le \frac{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}|\xi|^n}{\lambda_1 + \lambda_2\xi^{2n}}\sqrt{-\xi^{2k} + \lambda_1 + \lambda_2\xi^{2n}}, \qquad (4)$$

то метод $m_a: L_2(\mathbb{R}) \times L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$, определяемый формулой

$$m_a(y_1(\cdot), y_2(\cdot))(\cdot) = \Lambda_1 y_1(\cdot) + \Lambda_2 y_2(\cdot), \qquad (5)$$

где $\Lambda_i: L_2(\mathbb{R}) \times L_2(\mathbb{R})$, $i = 1, 2$, – линейные непрерывные операторы, действия которых в образах Фурье имеют вид $F\Lambda_1 y_1(\xi) = a(\xi)Fy_1(\xi)$ и $F\Lambda_2 y_2(\xi) = (i\xi)^{-n}((i\xi)^k - a(\xi))Fy_2(\xi)$, является оптимальным.

Операторы Λ_1 и Λ_2 – это сверточные операторы, ядра которых, вообще говоря, обобщенные функции. Выделим одно двухпараметрическое семейство таких операторов, где ядра – обычные функции, имеющие достаточно простое описание.

Следствие. *Пусть k, n – натуральные, $k < n$, $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ и*

$$\hat{\sigma}_1 = \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{1/(2k)}\left(\frac{\delta_1}{\delta_2}\right)^{-1/n},$$

$$\hat{\sigma}_2 = \left(\frac{n}{k}\right)^{1/(2(n-k))}\left(\frac{\delta_1}{\delta_2}\right)^{-1/n}.$$

Московский государственный институт радиотехники, электроники и автоматики (технический университет)

Южный математический институт Владикавказского научного центра Российской Академии наук

МАТИ – Российский государственный технологический университет им. К.Э. Циолковского, Москва

Тогда для любой пары $(\sigma_1, \sigma_2) \in [0, \hat{\sigma}_1] \times [\hat{\sigma}_2, \infty]$ *метод*

$$m_{\sigma_1, \sigma_2}(y_1(\cdot), y_2(\cdot)) = $$
$$= (K^1_{\sigma_1, \sigma_2} * y_1)(\cdot) + (K^2_{\sigma_1, \sigma_2} * y_2)(\cdot)$$

является оптимальным, где ядра $K^1_{\sigma_1, \sigma_2}(\cdot)$ *и* $K^2_{\sigma_1, \sigma_2}(\cdot)$ *таковы, что их образы Фурье имеют вид*

$$FK^1_{\sigma_1, \sigma_2}(\xi) = $$
$$= \begin{cases} (i\xi)^k, & |\xi| < \sigma_1, \\ (i\xi)^k\left(1 + \dfrac{k}{n-k}\left(\dfrac{\delta_1}{\delta_2}\right)^2 \xi^{2n}\right)^{-1}, & \sigma_1 \le |\xi| < \sigma_2, \end{cases}$$

и $FK^1_{\sigma_1, \sigma_2}(\xi) = 0$ *при* $|\xi| \ge \sigma_2$, *если* $\sigma_2 < \infty$;

$$FK^2_{\sigma_1, \sigma_2}(\xi) = $$
$$= \begin{cases} 0, & |\xi| < \sigma_1, \\ (i\xi)^{k-n}\left(1 + \dfrac{n-k}{k}\left(\dfrac{\delta_1}{\delta_2}\right)^{-2} \xi^{-2n}\right)^{-1}, & \sigma_1 \le |\xi| < \sigma_2, \end{cases}$$

и $FK^2_{\sigma_1, \sigma_2}(\xi) = (i\xi)^{k-n}$ *при* $|\xi| \ge \sigma_2$, *если* $\sigma_2 < \infty$.

Отметим, что оптимальный метод восстановления k-й производаной является линейным и заключается в том, что “наблюдения” $y_1(\cdot)$ и $y_2(\cdot)$ надо определенным образом “сгладить” (т.е. свернуть соответственно с ядрами $K^1_{\sigma_1, \sigma_2}(\cdot)$ и $K^2_{\sigma_1, \sigma_2}(\cdot)$ и затем сложить.

Близкая по духу задача, связанная с оптимальным восстановлением функции и ее производных по неточно заданному спектру самой функции, рассмотрена в работах [2, 3].

Доказательство теоремы. Покажем сначала, что погрешность оптимального восстановления не меньше значения задачи (2). Действительно, пусть $x(\cdot)$ – допустимая функция в (2). Тогда, очевидно, функция $-x(\cdot)$ также допустима и для любого m: $L_2(\mathbb{R}) \times L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$

$$2\|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \le \|x^{(k)}(\cdot) - m(0)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} +$$
$$+ \|-x^{(k)}(\cdot) - m(0)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \le$$
$$\le 2 \sup_{\|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \le \delta,\ \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \le 1} \|x^{(k)}(\cdot) - m(0)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \le$$
$$\le 2 \sup_{\substack{y_i(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}) \\ \|x(\cdot) - y_i(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \le \delta_i \\ i = 1, 2,\ \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \le 1}} \|x^{(k)}(\cdot) - m(y_1(\cdot), y_2(\cdot))(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}.$$

Переходя слева к верхней грани по всем допустимым функциям в (2), а справа к нижней грани по всем методам m, получаем требуемое.

Поскольку восстанавливаемый оператор (k-я производная) инвариантен относительно сдвига, то естественно и оптимальные методы искать среди таких операторов. Действие оператора, инвариантного относительно сдвига, из $L_2(\mathbb{R})$ в $L_2(\mathbb{R})$ в образах Фурье есть умножение на функцию из $L_\infty(\mathbb{R})$ (см. [4]) и поэтому будем искать оптимальные методы вида

$$m(y_1(\cdot), y_2(\cdot))(\cdot) = \Lambda_1 y_1(\cdot) + \Lambda_2 y_2(\cdot), \tag{6}$$

где $F\Lambda_i y_i(\cdot) = a_i(\cdot)Fy_i(\cdot)$, $a_i(\cdot) \in L_\infty(\mathbb{R})$, $i = 1, 2$.

Оптимальность метода m, как следует из формулы (3), означает, что значение задачи

$$\begin{gathered} \|x^{(k)}(\cdot) - \Lambda_1 y_1(\cdot) - \Lambda_2 y_2(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \to \max, \\ \|x(\cdot) - y_1(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \le \delta_1, \\ \|x^{(n)}(\cdot) - y_2(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \le \delta_2,\ y_i(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}),\ i = 1, 2, \\ x(\cdot) \in \mathcal{W}^n_2(\mathbb{R}), \end{gathered} \tag{7}$$

равно $E(D^k, \mathcal{W}^n_2(\mathbb{R}), \delta_1, \delta_2)$.

Метод (6) должен быть точен на функциях из $\mathcal{W}^n_2(\mathbb{R})$, т.е. должно выполняться тождество

$$x^{(k)}(\cdot) = \Lambda_1 x(\cdot) + \Lambda_1 x^{(n)}(\cdot) \quad \forall x(\cdot) \in \mathcal{W}^n_2(\mathbb{R}), \tag{8}$$

так как в противном случае значение задачи (7) равно бесконечности. Действительно, если для некоторого $x_0(\cdot) \in \mathcal{W}^n_2(\mathbb{R})$ равенство (8) не выполняется, то, полагая в (7) $x(\cdot) = Cx_0(\cdot)$, $y_1(\cdot) = Cx_0(\cdot)$ и $y_2(\cdot) = Cx_0^{(n)}(\cdot)$, за счет выбора $C \in \mathbb{R}$ максимизируемый функционал можно сделать сколь угодно большим.

Используя теорему Планшереля, учитывая тождество (8) (в образах Фурье) и обозначая $z_1(\xi) = Fx(\xi) - Fy_1(\xi)$, $z_2(\xi) = (i\xi)^n Fx(\xi) - Fy_2(\xi)$, нетрудно понять, что квадрат значения задачи (7) равен значению такой задачи:

$$\begin{gathered} \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} |a_1(\xi)z_1(\xi) + a_2(\xi)z_2(\xi)|^2 d\xi \to \max, \\ \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} |z_1(\xi)|^2 d\xi \le \delta_1^2, \quad \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} |z_2(\xi)|^2 d\xi \le \delta_2^2. \end{gathered} \tag{9}$$

Оценим сверху максимизируемый функционал. Для любых $\lambda_i > 0$, $i = 1, 2$, и любого $\xi \in \mathbb{R}$ имеем по неравенству Коши–Буняковского

$$|a_1(\xi)z_1(\xi) + a_2(\xi)z_2(\xi)|^2 \le$$
$$\le \left(\frac{|a_1(\xi)|^2}{\lambda_1} + \frac{|a_2(\xi)|^2}{\lambda_2}\right)(\lambda_1|z_1(\xi)|^2 + \lambda_2|z_2(\xi)|^2).$$

Интегрируя это неравенство (обозначив через $S_{a_1, a_2}(\cdot)$ функцию в скобках первого сомножителя справа) и учитывая ограничения в задаче (9), получаем, что ее значение не превосходит величины

$$\|S_{a_1, a_2}(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R})}(\lambda_1\delta_1^2 + \lambda_2\delta_2^2).$$

Если подобрать такие $a_i(\cdot) \in L_\infty(\mathbb{R})$ и $\lambda_i > 0$, $i = 1, 2$, что $\|S_{a_1, a_2}(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \le 1$ и

$$\lambda_1\delta_1^2 + \lambda_2\delta_2^2 = \delta_1^{2(1-k/n)}\delta_2^{2k/n}, \qquad (10)$$

то это будет означать (с учетом полученной оценки снизу для $E(D^k, \mathcal{W}_2^n(\mathbb{R}), \delta_1, \delta_2)$), что соответствующий метод оптимален и

$$E(D^k, \mathcal{W}_2^n(\mathbb{R}), \delta_1, \delta_2) = \delta_1^{1-k/n}\delta_2^{k/n}.$$

В силу (8), переходя к образам Фурье, получаем, что функции $a_1(\cdot)$ и $a_2(\cdot)$ связаны соотношением: $(i\xi)^k = a_1(\xi) + (i\xi)^n a_2(\xi)$ для п.в. $\xi \in \mathbb{R}$. Подставляя в $S_{a_1, a_2}(\cdot)$ вместо функции $a_2(\cdot)$ ее выражение через $a_1(\cdot)$, будем иметь

$$S_{a_1, a_2}(\xi) = \frac{|a_1(\xi)|^2}{\lambda_1} + \frac{|(i\xi)^k - a_1(\xi)|^2}{\lambda_2\xi^{2n}}.$$

Тогда условие $\|S_{a_1, a_2}(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \le 1$, как нетрудно проверить, может быть записано в виде неравенства (4) (с $a_1(\cdot)$ вместо $a(\cdot)$). Числа $\lambda_1 > 0$ и $\lambda_2 > 0$ должны быть такими, что (помимо (10)) выражение под корнем в правой части (4) должно быть неотрицательно на $\mathbb{R}$. Если из (10) найти λ_2 как функцию λ_1 и поставить ее в выражение под корнем в (4), то его неотрицательность означает, что для всех $\xi \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство

$$-\xi^{2k} + \lambda_2\left(\xi^{2n} - \left(\frac{\delta_1}{\delta_2}\right)^{-2}\right) + \left(\frac{\delta_1}{\delta_2}\right)^{-2k/n} \ge 0. \qquad (11)$$

Очевидно, что функция слева обращается в нуль в точке $\left(\frac{\delta_1}{\delta_2}\right)^{-1/n}$. Для того чтобы неравенство (11) было справедливо, эта точка должна быть точкой минимума данной функции. Из этого условия легко находится λ_2. Выражение для λ_1 следует из (10). Таким образом, с найденными λ_1 и λ_2 выражение под корнем в (4) неотрицательно на $\mathbb{R}$.

Из (4) нетрудно вывести, что функции $\xi \mapsto a(\xi)$ и $\xi \mapsto (i\xi)^{-n}((i\xi)^k - a(\xi))$ принадлежат $L_\infty(\mathbb{R})$ и тем самым Λ_1 и Λ_2 — линейные непрерывные операторы.

Доказательство следствия. Из теоремы сразу следует, что функция

$$a_1(\xi) = \frac{\lambda_1(i\xi)^k}{\lambda_1 + \lambda_2\xi^{2n}}$$

определяет оптимальный метод. Положим $a_2(\xi) = (i\xi)^{-n}((i\xi)^k - a_1(\xi))$. Подставляя выражения для λ_i, $i = 1, 2$, в выражения для $a_1(\cdot)$ и $a_2(\cdot)$, находим, что $a_i(\cdot) = FK_{0,\infty}^i(\cdot)$, $i = 1, 2$. Легко видеть, что $a_i(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$, $i = 1, 2$, и поэтому метод (5) можно записать в виде сверток с ядрами $K_{0,\infty}^1(\cdot)$ и $K_{0,\infty}^2(\cdot)$. Это доказывает следствие для случая $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = \infty$.

Пусть $(\sigma_1, \sigma_2) \in (0, \hat{\sigma}_1] \times [\hat{\sigma}_2, \infty)$. Покажем, что функции $a_i(\cdot) = FK_{\sigma_1, \sigma_2}^i(\cdot)$ с теми же λ_i, $i = 1, 2$, также определяют оптимальный метод. Действительно, $a_1(\xi) = (i\xi)^k$ на интервале $|\xi| < \sigma_1$ и, значит, $S_{a_1, a_2}(\xi) = \frac{|\xi|^{2k}}{\lambda_1}$. Поскольку $\sigma_1 \le \hat{\sigma}_1$, то элементарно проверяется, что $S_{a_1, a_2}(\xi) \le 1$, если $|\xi| < \sigma_1$. На промежутке $\sigma_1 \le |\xi| < \sigma_2$ функции $a_i(\cdot)$ являются сужениями функций $FK_{0,\infty}^i(\cdot)$, $i = 1, 2$, на этот промежуток и поэтому по уже доказанному $S_{a_1, a_2}(\xi) \le 1$, когда $\sigma_1 \le |\xi| < \sigma_2$. Наконец, если $|\xi| \ge \sigma_2$, то $S_{a_1, a_2}(\xi) = \frac{|\xi|^{2(k-n)}}{\lambda_2} \le \frac{1}{\hat{\sigma}_2^{2(n-k)}\lambda_2} = 1$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 10–01–00188 и 10–01–90002).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Харди Г.Г., Литтльвуд Д.Е., Полиа Г.* Неравенства. М.: Изд-во иностр. лит., 1948.
2. *Магарил-Ильяев Г.Г., Осипенко К.Ю.* // Функцион. анализ и его прил. 2003. Т. 37. С. 51–64.
3. *Магарил-Ильяев Г.Г., Осипенко К.Ю.* // Функцион. анализ и его прил. 2010. Т. 44. С. 76–79.
4. *Хермандер Л.* Оценки для операторов, инвариантных относительно сдвига. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.